

# MATEMÁTICA

**10.º Grado**  
GUÍA DEL DOCENTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA  
PROHIBIDA SU VENTA



# Matemática



GUÍA DEL DOCENTE



**PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA**

Rafael Correa Delgado

**MINISTRO DE EDUCACIÓN**

Augusto Espinosa Andrade

**Viceministro de Educación**

Freddy Peñafiel Larrea

**Viceministra de Gestión Educativa**

Daysi Valentina Rivadeneira Zambrano

**Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)**

Miguel Ángel Herrera Pavo

**Subsecretaria de Administración Escolar**

Mirian Maribel Guerrero Segovia

**Directora Nacional de Currículo (S)**

María Cristina Espinosa Salas

**Directora Nacional de Operaciones y Logística**

Ada Leonora Chamorro Vásquez

© Ministerio de Educación del Ecuador, 2016

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa

Quito, Ecuador

[www.educacion.gob.ec](http://www.educacion.gob.ec)

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por los editores y se cite correctamente la fuente.



**Matemática 10**



PROYECTO LICITACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN, ECUADOR 2016

**Dirección de contenidos editoriales Ecuador**

María Alexandra Prócel Alarcón

**Creación de contenidos**

Mario Cueva

**Conceptualización del proyecto para el área**

Luis Humberto Buitrón Aguas

**Diseño y diagramación**

David Rojas

**Corrección de estilo**

Michel Enrique Gamboa Graus

**Fotografía**

Archivo SM Ediciones Ecuador, Archivo SM Ediciones Colombia, Shutterstock

**Ilustración**

Roger Icaza L, Gisela Bohórquez, Mónica Medina

Impreso en Ecuador

Primera impresión: agosto 2016

© SMEcuadeciones, 2016

**ADVERTENCIA**

Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

• El nuevo currículo ecuatoriano	5
• El perfil de salida del Bachillerato ecuatoriano	6
• Objetivos integradores para el subnivel Superior de la Educación General Básica	7
• Objetivos generales del área de Matemática	8
• Objetivos del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica	9
• Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica	10
• Necesidades educativas especiales	18

## Unidad 1: números reales

1. Evaluación diagnóstica	20
2. Propósito de la unidad	21
3. Esquema conceptual	22
4. Planificación microcurricular	24
5. Libro del alumno	26
6. Evaluación formativa	40
7. Libro del alumno	42
8. Evaluación sumativa	52

## Unidad 2: funciones lineales

1. Evaluación diagnóstica	54
2. Propósito de la unidad	55
3. Esquema conceptual	56
4. Planificación microcurricular	58
5. Libro del alumno	60
6. Evaluación formativa	73
7. Libro del alumno	75
8. Ejercicios resueltos	81
9. Evaluación sumativa	82

## Unidad 3: sistemas de ecuaciones lineales

1. Evaluación diagnóstica	84
2. Propósito de la unidad	85
3. Esquema conceptual	86
4. Planificación microcurricular	88
5. Libro del alumno	90
6. Evaluación formativa	97
7. Libro del alumno	99
8. Evaluación sumativa	114

# Índice

## Unidad 4: funciones y ecuaciones cuadráticas

1. Evaluación diagnóstica	116
2. Propósito de la unidad	117
3. Esquema conceptual	118
4. Planificación microcurricular	120
5. Libro del alumno	122
6. Evaluación formativa	139
7. Libro del alumno	141
8. Ejercicios resueltos	143
9. Evaluación sumativa	144

## Unidad 5: razones trigonométricas

1. Evaluación diagnóstica	146
2. Propósito de la unidad	147
3. Esquema conceptual	148
4. Planificación microcurricular	150
5. Libro del alumno	152
6. Evaluación formativa	166
7. Libro del alumno	168
8. Evaluación sumativa	184

## Unidad 6: proporcionalidad

1. Evaluación diagnóstica	186
2. Propósito de la unidad	187
3. Esquema conceptual	188
4. Planificación microcurricular	190
5. Libro del alumno	192
6. Evaluación formativa	200
7. Libro del alumno	202
8. Evaluación formativa	214
9. Libro del alumno	216
10. Ejercicios resueltos	222
11. Evaluación sumativa	224
12. Pruebas quimestrales	226
13. Solucionario	230
14. Glosario	236
15. Bibliografía	238

# El nuevo currículo ecuatoriano



## Códigos de los elementos curriculares

Perfil de salida		Código	
Valor del perfil	Código	Matemática	M
Justicia	J.	Básica Superior	4
Innovación	I.	Bloques curriculares	Código
Solidaridad	S.	Álgebra y funciones	1
		Geometría y medida	2
		Estadística y probabilidad	3

	Código
Objetivo integrador del subnivel	OI. 4. <input type="checkbox"/>
Objetivo general del área	OG. M. <input type="checkbox"/>
Objetivo del área por subnivel	O. M. 4. <input type="checkbox"/>
Destreza con criterios de desempeño	M. 4. <input type="checkbox"/>
Criterio de evaluación	CE. M. 4. <input type="checkbox"/>
Indicador para la evaluación del criterio	I. M. 4. <input type="checkbox"/>

Número de secuencia

+Bloque curricular

# El perfil de salida del Bachillerato ecuatoriano

Somos justos porque:	Somos innovadores porque:	Somos solidarios porque:
<p><b>J.1.</b> Comprendemos las necesidades y potencialidades de nuestro país y nos involucramos en la construcción de una sociedad democrática, equitativa e inclusiva.</p> <p><b>J.2.</b> Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos.</p> <p><b>J.3.</b> Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.</p> <p><b>J.4.</b> Reflejamos y reconocemos nuestras fortalezas y debilidades para ser mejores seres humanos en la concepción de nuestro plan de vida.</p>	<p><b>I.1.</b> Tenemos iniciativas creativas, actuamos con pasión, mente abierta y visión de futuro; asumimos liderazgos auténticos, procedemos con proactividad y responsabilidad en la toma de decisiones y estamos preparados para enfrentar los riesgos que el emprendimiento conlleva.</p> <p><b>I.2.</b> Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.</p> <p><b>I.3.</b> Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.</p> <p><b>I.4.</b> Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.</p>	<p><b>S.1.</b> Asumimos responsabilidad social y tenemos capacidad de interactuar con grupos heterogéneos, procediendo con comprensión, empatía y tolerancia.</p> <p><b>S.2.</b> Construimos nuestra identidad nacional en busca de un mundo pacífico y valoramos nuestra multiculturalidad y multiétnicidad, respetando las identidades de otras personas y pueblos.</p> <p><b>S.3.</b> Armonizamos lo físico e intelectual; usamos nuestra inteligencia emocional para ser positivos, flexibles, cordiales y autocríticos.</p> <p><b>S.4.</b> Nos adaptamos a las exigencias de un trabajo en equipo en el que comprendemos la realidad circundante y respetamos las ideas y aportes de las demás personas.</p>

# Objetivos integradores para el subnivel Superior de la Educación General Básica

**OI.4.1.** Identificar y resolver problemas relacionados con la participación ciudadana para contribuir a la construcción de la sociedad del Buen Vivir, comprendiendo la complejidad del sistema democrático y el marco legal y de derechos en el contexto regional y global.

**OI.4.7** Construir, interpretar y debatir discursos y expresiones de diversa índole de forma responsable y ética, por medio del razonamiento lógico, logrando acuerdos y valorando la diversidad.

**OI.4.2.** Emplear un pensamiento crítico, ordenado y estructurado, construido a través del uso ético y técnico de fuentes, tecnología y medios de comunicación, en procesos de creación colectiva, en un contexto intercultural de respeto.

**OI.4.8.** Recopilar, organizar e interpretar materiales propios y ajenos en la creación científica, artística y cultural, trabajando en equipo para la resolución de problemas, mediante el uso del razonamiento lógico, fuentes diversas, TIC, en contextos múltiples y considerando el impacto de la actividad humana en el entorno.

**OI.4.3.** Analizar, comprender y valorar el origen, estructura y funcionamiento de los procesos sociales y del medio natural, en el contexto de la era digital, subrayando los derechos y deberes de las personas frente a la transformación social y la sostenibilidad del patrimonio natural y cultural.

**OI.4.9.** Actuar desde los espacios de participación juvenil, comprendiendo la relación de los objetivos del Buen Vivir, la provisión de servicios y la garantía de derechos por parte del Estado con la responsabilidad y diversidad social, natural y cultural.

**OI.4.4.** Analizar las consecuencias de la toma de decisiones relativas a derechos sociales, ambientales, económicos, culturales, sexuales y reproductivos en la formulación de su plan de vida, en el contexto de la sociedad del Buen Vivir.

**OI.4.10.** Explicar y valorar la interculturalidad y la multiculturalidad a partir del análisis de las diversas manifestaciones culturales del Estado plurinacional, reconociendo la influencia de las representaciones sociales, locales y globales sobre la construcción de la identidad.

**OI.4.5.** Tomar decisiones orientadas a la resolución de problemas, a partir del uso de diversas técnicas de investigación, nuevas tecnologías y métodos científicos, valorando los aspectos éticos, sociales, ambientales, económicos y culturales del contexto problemático.

**OI.4.11.** Observar, analizar y explicar las características de diversos productos culturales y artísticos, organizando espacios de creación, interpretación y participación en prácticas corporales, destacando sus posibilidades expresivas y los beneficios para una salud integral.

**OI.4.6.** Investigar colaborativamente los cambios en el medio natural y en las estructuras sociales de dominación que inciden en la calidad de vida, como medio para reflexionar sobre la construcción social del individuo y sus relaciones con el entorno en una perspectiva histórica, incluyendo enfoques de género, étnicos y de clase.

**OI.4.12.** Resolver problemas mediante el trabajo en equipo, adoptando roles en función de las necesidades del grupo y acordando estrategias que permitan mejorar y asegurar resultados colectivos, usando la información y variables pertinentes en función del entorno y comunicando el proceso seguido.

# Objetivos generales del área de Matemática

Al término de la Educación General Básica, como resultado de los aprendizajes en el área de Matemáticas, los estudiantes serán capaces de:

**OG.M.1.** Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

**OG.M.2.** Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.

**OG.M.3.** Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

**OG.M.4.** Valorar el empleo de las TICs para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

**OG.M.5.** Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

**OG.M.6.** Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

*\*El texto de esta sección ha sido reproducido textualmente del documento: Currículo de Matemática para EGB Superior, Ministerio de Educación, publicado en 2016, (página 60)*

# Objetivos del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

Al finalizar este subnivel, los estudiantes serán capaces de:

**O.M.4.1.** Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros, racionales, irracionales y reales; ordenar estos números y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas); y fomentar el pensamiento lógico y creativo.

**O.M.4.2.** Reconocer y aplicar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva; las cuatro operaciones básicas; y la potenciación y radicación para la simplificación de polinomios, a través de la resolución de problemas.

**O.M.4.3.** Representar y resolver de manera gráfica (utilizando las TIC) y analítica ecuaciones e inecuaciones con una variable; ecuaciones de segundo grado con una variable; y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, para aplicarlos en la solución de situaciones concretas.

**O.M.4.4.** Aplicar las operaciones básicas, la radicación y la potenciación en la resolución de problemas con números enteros, racionales, irracionales y reales, para desarrollar el pensamiento lógico y crítico.

**O.M.4.5.** Aplicar el teorema de Pitágoras para deducir y entender las relaciones trigonométricas (utilizando las TIC) y las fórmulas usadas en el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes, ángulos de cuerpos y figuras geométricas, con el propósito de resolver problemas. Argumentar con lógica los procesos empleados para alcanzar un mejor entendimiento del entorno cultural, social y natural; y fomentar y fortalecer la apropiación y cuidado de los bienes patrimoniales del país.

**O.M.4.6.** Aplicar las conversiones de unidades de medida del SI y de otros sistemas en la resolución de problemas que involucren perímetro y área de figuras planas, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, así como diferentes situaciones cotidianas que impliquen medición, comparación, cálculo y equivalencia entre unidades.

**O.M.4.7.** Representar, analizar e interpretar datos estadísticos y situaciones probabilísticas con el uso de las TIC, para conocer y comprender mejor el entorno social y económico, con pensamiento crítico y reflexivo.

*\*El texto de esta sección ha sido reproducido textualmente del documento: Currículo de Matemática para EGB Superior, Ministerio de Educación, publicado en 2016, (página 125)*

# Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.1. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas (adición y multiplicación), las operaciones con distintos tipos de números (Z, Q, I) y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones y ecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
<p>OG.M.1.</p> <p>OG.M.2.</p> <p>OG.M.3.</p> <p>OG.M.4.</p> <p>OG.M.5.</p> <p>OG.M.6.</p>	<p>M.4.1.1. Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.</p> <p>M.4.1.2. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros, utilizando la recta numérica y la simbología matemática (<math>=</math>, <math>&lt;</math>, <math>\leq</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math>).</p> <p>M.4.1.3. Operar en Z (adición, sustracción, multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.</p> <p>M.4.1.4. Deducir y aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en operaciones numéricas.</p> <p>M.4.1.5. Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales.</p> <p>M.4.1.6. Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas.</p> <p>M.4.1.7. Realizar operaciones combinadas en Z aplicando el orden de operación, y verificar resultados utilizando la tecnología.</p> <p>M.4.1.8. Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.</p> <p>M.4.1.9. Aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en la suma de monomios homogéneos y la multiplicación de términos algebraicos.</p> <p>M.4.1.10. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Z en la solución de problemas.</p> <p>M.4.1.11. Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z, de manera analítica, en la solución de ejercicios numéricos y problemas.</p> <p>M.4.1.12. Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</p> <p>M.4.1.13. Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos.</p> <p>M.4.1.14. Representar y reconocer los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.</p> <p>M.4.1.15. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números racionales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (<math>=</math>, <math>&lt;</math>, <math>\leq</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math>).</p>	<p>I.M.4.1.1. Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros; establece relaciones de orden empleando la recta numérica; aplica las propiedades algebraicas de los números enteros en la solución de expresiones con operaciones combinadas, empleando correctamente la prioridad de las operaciones; juzga la necesidad del uso de la tecnología. (I.4.)</p> <p>I.M.4.1.2. Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números enteros y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita; juzga e interpreta las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. (I.2.)</p> <p>I.M.4.1.3. Establece relaciones de orden en un conjunto de números racionales e irracionales, con el empleo de la recta numérica (representación geométrica); aplica las propiedades algebraicas de las operaciones (adición y multiplicación) y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas; atiende correctamente la jerarquía de las operaciones. (I.4.)</p>

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	<p>M.4.1.16. Operar en <math>Q</math> (adición y multiplicación) resolviendo ejercicios numéricos.</p> <p>M.4.1.17. Aplicar las propiedades algebraicas para la suma y la multiplicación de números racionales en la solución de ejercicios numéricos.</p> <p>M.4.1.18. Calcular potencias de números racionales con exponentes enteros.</p> <p>M.4.1.19. Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos (con operaciones combinadas) y algebraicos, atendiendo la jerarquía de la operación.</p> <p>M.4.1.20. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en <math>Q</math> en la solución de problemas sencillos.</p> <p>M.4.1.21. Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en <math>Q</math> de manera algebraica.</p> <p>M.4.1.22. Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en <math>Q</math>, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</p> <p>M.4.1.26. Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos.</p> <p>M.4.1.27. Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales.</p>	<p>I.M.4.1.4. Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita. (I.2.)</p>
Objetivos generales del área que se evalúan	<b>Criterio de evaluación:</b> CE.M.4.2. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas de las operaciones en $R$ y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones, ecuaciones y sistemas de inecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la notación y la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1.	M.4.1.23. Definir y reconocer polinomios de grados 1 y 2.	<p>I.M.4.2.1. Emplea las operaciones con polinomios de grado <math>\leq 2</math> en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos; expresa polinomios de grado 2 como la multiplicación de polinomios de grado 1. (I.4.)</p>
OG.M.2.	M.4.1.24. Operar con polinomios de grado $\leq 2$ (adición y producto por escalar) en ejercicios numéricos y algebraicos.	
OG.M.3.	M.4.1.25. Reescribir polinomios de grado 2 con la multiplicación de polinomios de grado 1.	
OG.M.4.	M.4.1.28. Reconocer el conjunto de los números reales $R$ e identificar sus elementos.	
OG.M.5.	M.4.1.29. Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.	
OG.M.6.	M.4.1.30. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática ( $=$ , $<$ , $\leq$ , $>$ , $\geq$ ).	
	M.4.1.31. Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en $R$ (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).	

# Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	<p>M.4.1.32. Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.</p> <p>M.4.1.33. Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas.</p> <p>M.4.1.34. Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica.</p> <p>M.4.1.35. Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en R.</p> <p>M.4.1.36. Reescribir expresiones numéricas o algebraicas con raíces en el denominador utilizando propiedades en R (racionalización).</p> <p>M.4.1.37. Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en R.</p> <p>M.4.1.38. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en R para resolver problemas sencillos.</p> <p>M.4.1.39. Representar un intervalo en R de manera algebraica y gráfica, y reconocer el intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en R.</p> <p>M.4.1.40. Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreando la solución.</p> <p>M.4.1.41. Resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica (en el plano) y reconocer la zona común sombreada como solución del sistema.</p>	<p>I.M.4.2.2. Establece relaciones de orden en el conjunto de los números reales; aproxima a decimales; y aplica las propiedades algebraicas de los números reales en el cálculo de operaciones (adición, producto, potencias, raíces) y la solución de expresiones numéricas (con radicales en el denominador) y algebraicas (productos notables). (I.4.)</p> <p>I.M.4.2.3. Expresa raíces como potencias con exponentes racionales, y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños. (I.3, I.4.)</p> <p>I.M.4.2.4. Resuelve problemas que requieran de ecuaciones de primer grado con una incógnita en R; utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica en la solución de inecuaciones de primer grado y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica, en R. (I.1, I.4.)</p>
Objetivos generales del área que se evalúan	<p><b>Criterio de evaluación:</b> CE.M.4.3. Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología.</p>	
	<p>Destrezas con criterios de desempeño a evaluar</p> <p>M.4.1.42. Calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos para definir relaciones binarias (subconjuntos), representándolas con pares ordenados.</p> <p>M.4.1.43. Identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.</p>	<p>I.M.4.3.1. Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos, e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto. (I.4.)</p>

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	<p><b>M.4.1.44.</b> Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica, con diagramas de Venn, determinando su dominio y recorrido en <math>Z</math>.</p> <p><b>M.4.1.45.</b> Representar funciones de forma gráfica, con barras, bastones y diagramas circulares, y analizar sus características.</p> <p><b>M.4.1.46.</b> Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas.</p> <p><b>M.4.1.47.</b> Definir y reconocer funciones lineales en <math>Z</math>, con base en tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica, con o sin el uso de la tecnología.</p> <p><b>M.4.1.48.</b> Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores.</p> <p><b>M.4.1.49.</b> Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes.</p>	
OG.M.1.	<b>M.4.1.50.</b> Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología), e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente.	<b>I.M.4.3.2.</b> Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema. (I.2.)
OG.M.2.	<b>M.4.1.51.</b> Definir y reconocer funciones potencia con $n=1, 2, 3$ , representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía.	<b>I.M.4.3.3.</b> Determina el comportamiento (función creciente o decreciente) de las funciones lineales en $Z$ , basándose en su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas; valora el empleo de la tecnología; y calcula funciones compuestas gráficamente. (I.4.)
OG.M.3.	<b>M.4.1.52.</b> Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas.	
OG.M.4.	<b>M.4.1.53.</b> Reconocer la recta como la solución gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas en $R$ .	
OG.M.5.	<b>M.4.1.54.</b> Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	<b>I.M.4.3.4.</b> Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia ( $n=1, 2, 3$ ), y para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones), la función potencia (monotonía) y la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares. (I.1., I.4.)
OG.M.6.	<b>M.4.1.55.</b> Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana.	
	<b>M.4.1.56.</b> Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	
	<b>M.4.1.57.</b> Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica, determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos y paridad.	
	<b>M.4.1.58.</b> Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.	
	<b>M.4.1.59.</b> Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoro, completación de cuadrados, fórmula binomial) en la solución de problemas.	

# Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	<p>M.4.1.60. Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.</p> <p>M.4.1.61. Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</p>	I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema. (I.4., J.2.)
Objetivos generales del área que se evalúan	<b>Criterio de evaluación:</b> CE.M.4.4. Valora la importancia de la teoría de conjuntos para definir conceptos e interpretar propiedades; aplica las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas y la elaboración de argumentos lógicos.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1.	M.4.2.1. Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para relacionarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción, condicionante y bicondicionante; y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado).	I.M.4.4.1. Representa, de forma gráfica y algebraica, las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos; utiliza conectivos lógicos, tautologías y la lógica proposicional en la solución de problemas, comunicando resultados y estrategias mediante el razonamiento lógico. (I.3., I.4.)
OG.M.2.	M.4.2.2. Definir y reconocer una tautología para la construcción de tablas de verdad.	
OG.M.3.	M.4.2.3. Conocer y aplicar las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas.	
OG.M.4.	M.4.2.4. Definir y reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica.	
OG.M.5.		
Objetivos generales del área que se evalúan	<b>Criterio de evaluación:</b> CE.M.4.5. Emplea la congruencia, semejanza, simetría y las características sobre las rectas y puntos notables, en la construcción de figuras; aplica los conceptos de semejanza para solucionar problemas de perímetros y áreas de figuras, considerando como paso previo el cálculo de longitudes. Explica los procesos de solución de problemas utilizando como argumento criterios de semejanza, congruencia y las propiedades y elementos de triángulos. Expresa con claridad los procesos seguidos y los razonamientos empleados.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	<p>M.4.2.5. Definir e identificar figuras geométricas semejantes, de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, determinando el factor de escala entre las figuras (teorema de Tales).</p> <p>M.4.2.6. Aplicar la semejanza en la construcción de figuras semejantes, el cálculo de longitudes y la solución de problemas geométricos.</p> <p>M.4.2.7. Reconocer y trazar líneas de simetría en figuras geométricas para completarlas o resolverlas.</p>	I.M.4.5.1. Construye figuras simétricas; resuelve problemas geométricos que impliquen el cálculo de longitudes con la aplicación de conceptos de semejanza y la aplicación del teorema de Tales; justifica procesos aplicando los conceptos de congruencia y semejanza. (I.1., I.4.)

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1.	M.4.2.8. Clasificar y construir triángulos, utilizando regla y compás, bajo condiciones de ciertas medidas de lados y/o ángulos.	I.M.4.5.2. Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados; dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetro y área de triángulos; comunica los procesos y estrategias utilizados. (I.3.)
OG.M.2.	M.4.2.9. Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos.	
OG.M.3.	M.4.2.10. Aplicar criterios de semejanza para reconocer triángulos rectángulos semejantes y resolver problemas.	
OG.M.4.	M.4.2.11. Calcular el perímetro y el área de triángulos en la resolución de problemas.	
OG.M.5.	M.4.2.12. Definir y dibujar medianas y baricentro, mediatrices y circuncentro, alturas y ortocentro, bisectrices e incentro en un triángulo.	
OG.M.6.	M.4.2.13. Plantear y resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.	
Objetivos generales del área que se evalúan	<b>Criterio de evaluación:</b> CE.M.4.6. Utiliza estrategias de descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras compuestas, y en el cálculo de cuerpos compuestos; aplica el teorema de Pitágoras y las relaciones trigonométricas para el cálculo de longitudes desconocidas de elementos de polígonos o cuerpos geométricos, como requerimiento previo a calcular áreas de polígonos regulares, y áreas y volúmenes de cuerpos, en contextos geométricos o en situaciones reales. Valora el trabajo en equipo con una actitud flexible, abierta y crítica.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1.	M.4.2.14. Demostrar el teorema de Pitágoras utilizando áreas de regiones rectangulares.	I.M.4.6.1. Demuestra el teorema de Pitágoras valiéndose de diferentes estrategias, y lo aplica en la resolución de ejercicios o situaciones reales relacionadas a triángulos rectángulos; demuestra creatividad en los procesos empleados y valora el trabajo individual o grupal. (I.1., S.4.)
	M.4.2.15. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.	
	M.4.2.16. Definir e identificar las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.	
	M.4.2.17. Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	
	M.4.2.18. Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos.	
OG.M.5.	M.4.2.19. Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas.	I.M.4.6.2. Reconoce y aplica las razones trigonométricas y sus relaciones en la resolución de triángulos rectángulos y en situaciones problema de la vida real. (I.3.)
	M.4.2.20. Construir pirámides, prismas, conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes), para calcular el área lateral y total de estos cuerpos geométricos.	

# Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	<p>M.4.2.21. Calcular el volumen de pirámides, prismas, conos y cilindros aplicando las fórmulas respectivas.</p> <p>M.4.2.22. Resolver problemas que impliquen el cálculo de volúmenes de cuerpos compuestos (usando la descomposición de cuerpos).</p>	<p>I.M.4.6.3. Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas y volúmenes de pirámides, prismas, conos y cilindros; aplica, como estrategia de solución, la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos; explica los procesos de solución empleando la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados. (I.3, I.4.)</p>
Objetivos generales del área que se evalúan	<p><b>Criterio de evaluación:</b> CE.M.4.7. Representa gráficamente información estadística, mediante tablas de distribución de frecuencias y con el uso de la tecnología. Interpreta y codifica información a través de gráficas. Valora la claridad, el orden y la honestidad en el tratamiento y presentación de datos. Promueve el trabajo colaborativo en el análisis crítico de la información recibida de los medios de comunicación.</p>	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.2.	M.4.3.1. Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada, y representarlos gráficamente con ayuda de las TIC.	<p>I.M.4.6.1. Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas (histogramas, polígono de frecuencias, ojiva y/o diagramas circulares), con el uso de la tecnología; interpreta funciones y juzga la validez de procedimientos, la coherencia y la honestidad de los resultados obtenidos. (J.2, I.3.)</p>
OG.M.4.	M.4.3.2. Organizar datos no agrupados (máximo 20) y datos agrupados (máximo 50) en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada, para analizar el significado de los datos.	
OG.M.6.	M.4.3.3. Representar de manera gráfica, con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular, en función de analizar datos.	

Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.8. Analiza y representa un grupo de datos utilizando los elementos de la estadística descriptiva (variables, niveles de medición, medidas de tendencia central, de dispersión y de posición). Razona sobre los posibles resultados de un experimento aleatorio sencillo. Calcula probabilidades aplicando como estrategia técnicas de conteo, el cálculo del factorial de un número y el coeficiente binomial, operaciones con conjuntos y las leyes de De Morgan. Valora la importancia de realizar estudios estadísticos para comprender el medio y plantear soluciones a problemas de la vida diaria. Emplea medios tecnológicos, con creatividad y autonomía, en el desarrollo de procesos estadísticos. Respeta las ideas ajenas y argumenta procesos.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
<p>OG.M.1.</p> <p>OG.M.2.</p> <p>OG.M.3.</p> <p>OG.M.4.</p> <p>OG.M.5.</p> <p>OG.M.6.</p>	<p>M.4.3.4. Definir y aplicar la metodología para realizar un estudio estadístico: estadística descriptiva.</p> <p>M.4.3.5. Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.</p> <p>M.4.3.6. Definir y aplicar niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón.</p> <p>M.4.3.7. Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) y medidas de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.</p> <p>M.4.3.8. Determinar las medidas de posición: cuartiles, deciles, percentiles, para resolver problemas.</p> <p>M.4.3.9. Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.</p> <p>M.4.3.10. Aplicar métodos de conteo (combinaciones y permutaciones) en el cálculo de probabilidades.</p> <p>M.4.3.11. Calcular el factorial de un número natural y el coeficiente binomial en el cálculo de probabilidades.</p> <p>M.4.3.12. Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) y aplicar las leyes de De Morgan para calcular probabilidades en la resolución de problemas.</p>	<p>I.M.4.8.1. Utiliza información cuantificable del contexto social; utiliza variables; aplica niveles de medición; calcula e interpreta medidas de tendencia central (media, mediana y moda), de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) y de posición (cuartiles, deciles, percentiles); analiza críticamente información a través de tablas o gráficos; resuelve problemas en forma grupal e individual; y comunica estrategias, opiniones y resultados. (I.4., S.4.)</p> <p>I.M.4.8.2. Calcula probabilidades de eventos aleatorios empleando combinaciones y permutaciones, el cálculo del factorial de un número y el coeficiente binomial; operaciones con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) y las leyes de De Morgan. Valora las diferentes estrategias y explica con claridad el proceso lógico seguido para la resolución de problemas. (I.2., I.4.)</p>

# Necesidades educativas especiales

La Educación es un derecho que todas las personas tienen en el transcurso de su vida, y es el Estado que debe promover, respetar y garantizar los mismos. Tal como indica la Ley de Educación del Ecuador, sección quinta, Art. 26 “.- La educación es un derecho de las personas a lo largo de su vida y un deber ineludible e inexcusable del Estado. Constituye un área prioritaria de la política pública y de la inversión estatal, garantía de la igualdad e inclusión social y condición indispensable para el buen vivir. Las personas, las familias y la sociedad tienen el derecho y la responsabilidad de participar en el proceso educativo”.

El artículo anteriormente citado manifiesta que la educación es un derecho fundamental del ser humano, y es el Estado el que garantiza el acceso a la educación de todos sus habitantes sin discriminación alguna en igualdad de condiciones para todos. Se puede entender que cada persona es un ser humano único e irrepetible, con sus propias características y ritmos de aprendizaje, por lo tanto el docente debe respetar las diferencias individuales. Los docentes deben considerar el empleo de respuestas y estrategias diversas en lo que refiere a las necesidades educativas de sus estudiantes, asociadas o no a discapacidad; sin que esto signifique excluirlos del sistema educativo formal, si no como una invitación a realizar adaptaciones curriculares de ser el caso, modificación en la modalidad y metodología de enseñanza- aprendizaje educativa; con el único objetivo de que todos tengan las mismas oportunidades de acceder a la educación respetando la condición propia de cada uno, son estos elementos los que definen a la Educación Inclusiva, que pretende disminuir toda forma de discriminación y exclusión.

Se conceptúa por Educación Inclusiva, en el acuerdo ministerial N 0295-13 en la Normativa referente a la atención a los estudiantes con necesidades educativas especiales en establecimientos de educación ordinaria o en instituciones educativas especializadas, en el Capítulo III Educación Inclusiva Art. 11 “La educación inclusiva se define como el proceso de identificar y responder a la diversidad de necesidades especiales de todos los estudiantes a través de la mayor participación en el aprendizaje, las culturas y en las comunidades, a fin de reducir la exclusión en la educación. La educación inclusiva se sostiene en los principios constitucionales, legales nacionales y en los diferentes instrumentos internacionales referentes a su promoción y funcionamiento”.

Reconociendo la importancia de promover mensajes de inclusión y respeto a la diversidad se considera oportuno incluir dentro de los textos escolares información general y con un lenguaje sencillo que les sirva de apoyo a los docentes, quienes dentro del aula, presenten diferentes estrategias para la construcción del aprendizaje con sus estudiantes, ya sea por razones de discapacidad o no necesariamente. Y como parte de su derecho fundamental e irrenunciable que se encuentra vigente en la Constitución de la República del Ecuador, en la Sección Quinta de los grupos vulnerables, Artículo 47, “En el ámbito público y privado recibirán atención prioritaria, preferente y especializada los niños y adolescentes, las mujeres embarazadas, las personas con discapacidad, las que adolecen de enfermedades catastróficas de alta complejidad y las de la tercera edad. Del mismo modo, se atenderá a las personas en situación de riesgo y víctimas de violencia doméstica, maltrato infantil, desastres naturales o antropogénicos”.

Por lo antes citado en este apartado se pretende sociabilizar con el docente en términos generales la caracterización y facilitación de sugerencias que podría emplear como herramienta de apoyo en el proceso educativo del estudiante, frente a algunos problemas de comportamiento de inicio en la niñez que podrían presentarse en el ambiente escolar y que requieren necesidad educativa especial no asociadas a la discapacidad; tales como la discapacidad cognitiva y las capacidades y talentos excepcionales y dentro de las situaciones de vulnerabilidad se señalará la problemática de las adicciones. Sin llegar a convertirse en una guía de adaptación curricular para la educación.

## Discapacidad cognitiva

Presentan dificultades en la adaptación al medio, por alteraciones en el funcionamiento neurológico. Como categoría diagnóstica, el retraso mental abarca una serie bastante amplia de síntomas y manifestaciones de tipo comportamental, adaptativo y de desempeño, que lo complejizan tanto en el proceso de identificación como de intervención. Por ello, la neurobiología, la psicología, las ciencias del desarrollo y el comportamiento, han tratado durante años de identificar componentes básicos que permitan caracterizar el cuadro clínico y establecer con claridad patrones de evaluación y atención oportuna; pero todos los esfuerzos han resultado parcialmente admisibles, pues se trata de un ejercicio en el que juegan un

## Necesidades educativas especiales

sin fin de variables, concepciones, actitudes y prácticas, sin mencionar los aspectos éticos y de procesos.

### Recomendaciones

- Las experiencias de aprendizaje que promueven la percepción clara, llevan a los estudiantes con discapacidad cognitiva a definiciones precisas del problema o tarea que deben resolver, a través del uso de los canales perceptivos y la verbalización de lo que creen que es la demanda de la tarea. Se deben ofrecer estímulos sensoriales (visuales, táctiles, auditivos, olfativos y gustativos) diversos para una misma tarea y realizar preguntas de monitoreo como ¿Qué es lo que te estoy diciendo?, ¿Qué debes hacer?, ¿Sabes cómo resolver la tarea?
- La atención educativa debe enfocarse hacia el desarrollo del pensamiento reflexivo, explicativo y argumentativo, evitando la impulsividad en las respuestas, la desorganización y la falta de coordinación de los elementos. Dado que responden con rapidez y generalmente de forma inapropiada o que se demoran más tiempo de lo normal para responder, por tanto se deben emplear estrategias que ayuden al estudiante a planificar su acción. En este caso son útiles los listados de prioridades (verbales o escritos dependiendo del nivel de funcionalidad en habilidades académicas funcionales), las preguntas de seguimiento ¿Qué es lo primero que debes hacer?, ¿Qué resultados obtuviste?, ¿Qué debes hacer luego?
- Son efectivas las estrategias de asociación como los ficheros de palabras por categorías, registros de procesos simples (bañarse, vestirse, comprar, preparar un desayuno, etc.). También la elaboración de diccionarios con términos comunes para el nivel escolar en que se encuentran y el uso de diccionarios formales para los que poseen habilidades académicas más funcionales.
- Emplear estrategias de ordenación (manejo de calendarios, uso de agendas diarias en clase o en el hogar, registros de actividades, diarios de campo de acuerdo a los niveles de desempeño en habilidades académicas),

comparación (aparejamientos, correspondencias, conjuntos, cuadros comparativos), organización de secuencias visuales, narración de secuencias). Estas estrategias favorecerán la comprensión de acontecimientos de forma diacrónica y sincrónica, lo que les permitirá conectar sucesos y las relaciones de orden entre ellos.

### Estudiantes con capacidades y talentos excepcionales

Son aquellas personas que presentan un desempeño superior en las múltiples áreas y tienen un alto potencial para aprender y desarrollar competencias que supera al de las demás personas de su edad. Estos estudiantes se caracterizan por tener un ritmo de aprendizaje rápido con coeficientes intelectuales altos y tienen habilidades meta-cognitivas superiores.

### Recomendaciones

- El docente, al detectar este tipo de necesidad educativa, debe reportar al DECE para que analice el caso y oriente al representante del estudiante para que acuda al especialista y realice el test correspondiente para saber el nivel de coeficiente intelectual del estudiante.
- Se recomienda que el docente planifique actividades con diferentes grados de dificultad, actividades variadas en las cuales los estudiantes puedan desarrollar diferentes destrezas y consiga objetivos distintos.
- Realizar preguntas a los estudiantes para que estimulen su pensamiento y les permitan analizar y expresar lo que han comprendido acerca de una lectura, de un libro o un artículo, también se puede desarrollar su imaginación a partir de preguntas tales como: ¿Qué piensas que ocurrirá después de leer tal libro?, ¿Qué final le darías a tal cuento?, etc.
- Realizar diferentes proyectos educativos como actividades extracurriculares en las cuales los estudiantes desarrollen sus habilidades, destrezas y descubran sus talentos escondidos, por ejemplo: organizar grupos de danza, de música, de teatro, de cocina, de oratoria, los cuales despierten el interés por aprender de los estudiantes y salgan de las clases monótonas.

UNIDAD

1 Evaluación diagnóstica

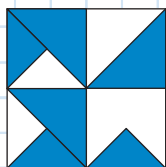
Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Un objetivo del Estado es de que en el 2017 el 90% de las Instituciones educativas tengan acceso a internet. Si tuviéramos 230 instituciones, deberían tener acceso a internet:

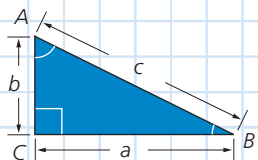
- A. 124                      B. 189  
C. 212                      D. 207

2. En la figura la parte pintada corresponde a:



- A.  $\frac{8}{9}$     B.  $\frac{9}{8}$     C.  $\frac{8}{12}$     D.  $\frac{9}{16}$

3. Para el triángulo de la figura, si  $c = 9$  y  $b = 8$ , el valor de  $a$  es:



- A. 1                      B.  $\sqrt{145}$   
C.  $\sqrt{17}$                 D.  $\sqrt{23}$

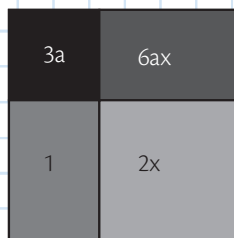
4. El mcd de: 200, 1 000 y 50 es:

- A. 10                      B. 30  
C. 50                      D. 100

5. El término que falta para que el binomio  $x^2 + 121$  sea un trinomio cuadrado perfecto es:

- A.  $2x$                       B.  $11x$   
C.  $22x$                       D.  $121x$

6. El área del rectángulo factorizada es:



- A.  $(x + 1)(2a + 1)$   
B.  $(2x + 1)(2a + 1)$   
C.  $(3x + 1)(2a + 1)$   
D.  $(2x + 1)(3a + 1)$

7. La probabilidad de sacar un múltiplo de 4 de una urna con 30 bolas numeradas del 1 al 30 es de es:

- A.  $\frac{9}{30}$                       B.  $\frac{8}{30}$   
C.  $\frac{7}{30}$                       D.  $\frac{6}{30}$

8. El punto que pertenece a la recta:  $y = 9 - x$  es:

- A.  $(-5, 2)$   
B.  $(-1, 10)$   
C.  $(2, -3)$   
D.  $(4, -7)$

9. El triángulo que por la longitud de sus lados no puede construirse es:

- A.  $a = 3, b = 4, c = 5$   
B.  $a = 2, b = 4, c = 8$   
C.  $a = 7, b = 5, c = 3$   
D.  $a = 6, b = 4, c = 9$

# Propósito de la unidad

## Bloque de álgebra y funciones:

El propósito de esta unidad es, que el estudiante tenga una idea muy cercana con respecto al campo de los números reales, para esto, es necesario hacer una breve retroalimentación sobre el conjunto de los números naturales y su alcance. De esta manera se puede introducir tanto el conjunto de los números racionales, así como también el conjunto de los números irracionales. Hay que hacer notar que dentro del conjunto de los números irracionales hay una infinidad de estos, entre los que se puede citar a las raíces inexactas, número  $\pi$ , número  $e$ , el número de oro entre otros; pero los números irracionales de nuestro interés son los que se producen por las raíces inexactas.

Una vez introducida la idea de número irracional, el estudiante estará en capacidad de aplicar los conocimientos sobre descomposición de un número en sus factores primos y la identificación de términos semejantes, de esta manera, podrá efectuar operaciones no solo con números naturales y números racionales, sino también operar con números irracionales.

## Bloque de geometría y medida:

Es de suma importancia aplicar regla y compás para construir números irracionales, en este sentido y como se indicó más arriba, lo importante es centrar el estudio en las raíces inexactas. Para reforzar la idea de número irracional, se puede interpretar con regla y compás el número de oro.

## Evaluaciones

La evaluación juega un papel muy importante en todo proceso educativo, tanto para el estudiante como para el docente.

La evaluación le permite al estudiante verificar sus avances para tomar decisiones en el futuro. La evaluación también le permite al estudiante conocer sus estilos de aprendizaje para luego poder escoger la carrera o profesión que más se adecúe a sus intereses y capacidades.

Una evaluación bien estructurada le permite al docente evaluar su estilo de enseñanza y medir los logros y aprovechamiento de sus estudiantes.

Según (Standaert, 2014) hay dos tipos de evaluación, una de carácter formativo y la otra sumativa.

### Diagnóstica

La evaluación diagnóstica se caracteriza por ser un tipo de evaluación que realiza por lo general al inicio de un año escolar, se la puede realizar también al momento de iniciar un bloque. Esta evaluación permite tener muy claro los conocimientos que se deben reforzar a través de distintas tareas antes del inicio de una nueva etapa. A la evaluación diagnóstica es una evaluación de carácter formativo.

### Formativa

Toda actividad que nos permita obtener información con la finalidad de encaminar, orientar y diri-

gir a los estudiantes, es una evaluación de carácter formativo. Con el propósito de que tenga una idea de cómo avanzan sus estudiantes, puede aplicar una evaluación de este tipo, la misma que se presenta a la mitad de la unidad.

### Sumativa

Se dice que una evaluación es de carácter sumativo, cuando el propósito es la promoción de los estudiantes. Es decir, la evaluación pretende aportar una imagen final y general de cada uno de los estudiantes, es por eso que; es el resultado de todos los datos disponibles, ya sean pruebas, lecciones, tareas, observaciones, etc.

Como conclusión es importante anotar que la única diferencia entre una evaluación de carácter formativo y una evaluación de carácter sumativo es el propósito. En este sentido, la evaluación sumativa siempre será cuantitativa; mientras que la formativa, puede ser cuantitativa o cualitativa

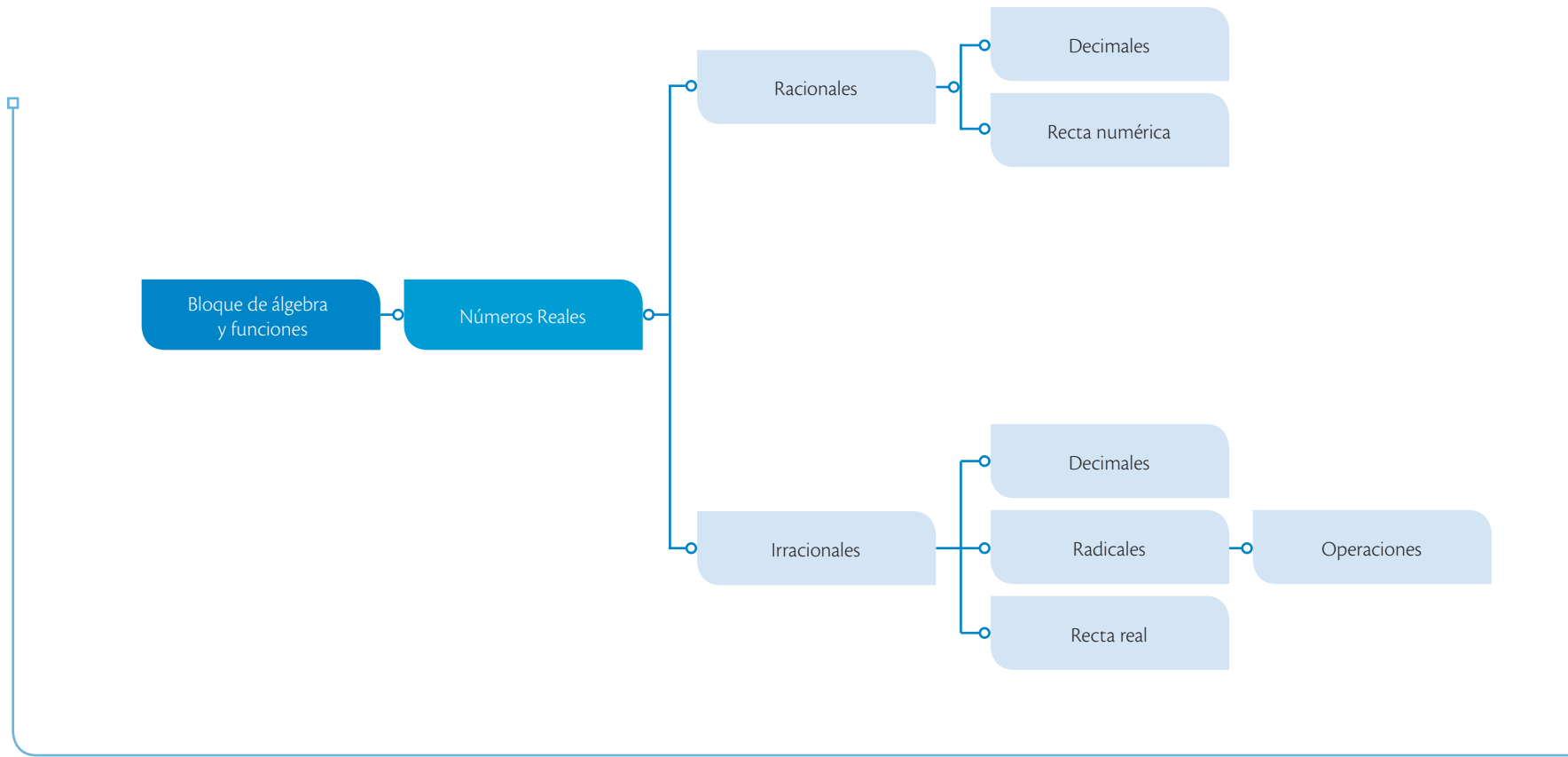
## Respuestas

### Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

# Esquema conceptual

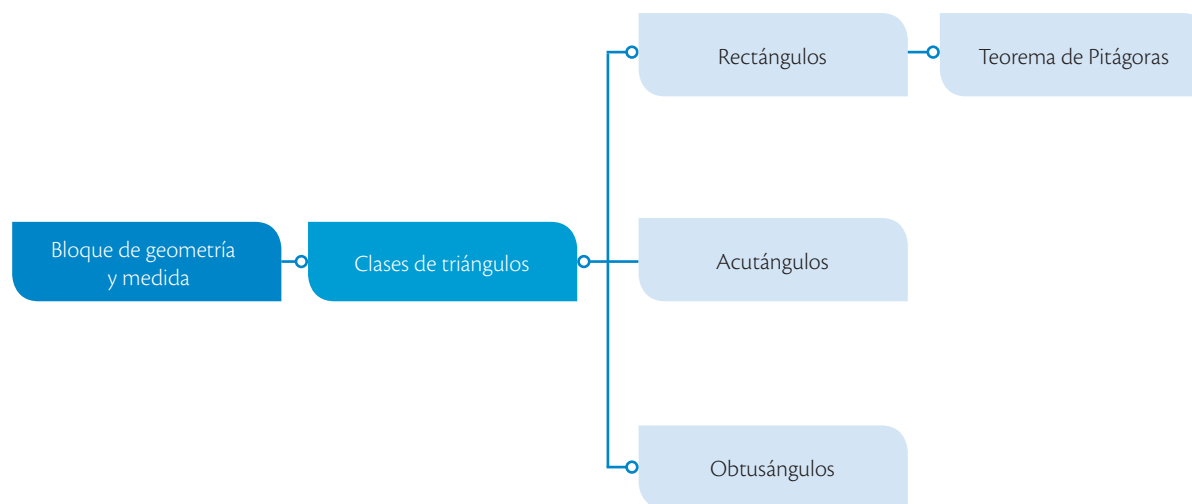
## Conocimientos de la unidad



## Cultura del Buen Vivir

### ■ Valor: La humildad

Las personas humildes reconocen sus virtudes y habilidades, pero no consideran necesario presumir de ellas frente a los demás.

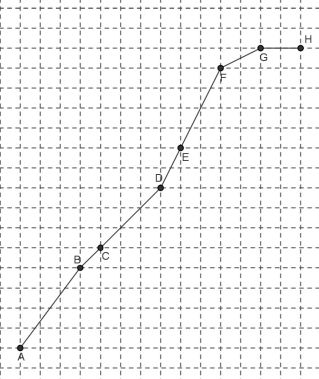


## ■ Compromiso a lograr

La educación integral con la que estamos comprometidos todos los docentes en desarrollar, debe buscar crear espacios de reflexión, ya sea de manera individual o grupal. Para esto es de suma importancia que primero reconozcamos nuestras limitaciones, luego nuestras faltas y por último que seamos agradecidos con todo lo que tenemos en nuestro entorno. Es por eso que por más sacrificio que te haya costado tener lo que tienes, no es razón suficiente para alardear de tus logros.

# Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 1: números reales				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.1. – OG.M.2 – OG.M.3. – OG.M.4.		O.M.4.1. – O.M.4.2. – O.M.4.4. – O.M.4.5.		
Objetivos de subnivel		Valores		
M.4.1.19. – M.4.1.26		Humildad:		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.1 – CE.M.4.2		I.M.4.1.4. – I.M.4.2.3		
Objetivos de la unidad				
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Operar con números racionales expresados en distintas formas</li> <li>• Reconocer la clasificación de los números reales</li> <li>• Resolver operaciones con números reales</li> </ul>				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
Álgebra y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos.</li> <li>• Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales.</li> <li>• Reconocer el conjunto de los números reales <math>\mathbb{R}</math> e identificar sus elementos.</li> <li>• Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.</li> <li>• Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (<math>=, &lt;, \leq, &gt;, \geq</math>).</li> <li>• Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en <math>\mathbb{R}</math> (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Plantee a sus estudiantes un problema en el cual intervengan números racionales e irracionales.</li> <li>• El gráfico que se presenta en el bloque de Geometría, es un tramo de la trayectoria que recorre una hormiga llevando alimento a su casa, ¿puedes calcular el valor exacto del recorrido? Toma en cuenta que el lado de cada cuadrícula es una unidad.</li> <li>• Advierta que los gráficos en matemática, únicamente sirven de ayuda.</li> <li>• Dígales que el Teorema de Pitágoras es una herramienta que nos permite resolver la situación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones de orden en el conjunto de los números reales; aproxima a decimales; y aplica las propiedades algebraicas de los números reales en el cálculo de operaciones (adición, producto, potencias, raíces) y la solución de expresiones numéricas (con radicales en el denominador) y algebraicas (productos notables). (I.4.)</li> </ul>	<p><b>Tarea</b> Resolver los ejercicios planteados en las actividades planteadas en desarrolla tus destrezas. / Tabla de doble entrada Tabla de doble entrada</p> <p><b>Actividad Individual</b> Resuelve y formula problemas. / Ficha de observación y coevaluación</p>

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
<p><b>Geometría y medida</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.</li> <li>• Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</li> <li>• Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El siguiente esquema representa la situación del problema planteado en el bloque de álgebra y funciones.</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• En cada tramo se puede formar un triángulo rectángulo, excepto en el último tramo, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene que la distancia recorrida corresponde a la suma:  <math display="block">5 + \sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{5} + \sqrt{20} + 2</math> </li> <li>• Esta situación se puede aprovechar para explicar también la simplificación de radicales, la expresión anterior quedaría:  <math display="block">\begin{aligned} &amp;5 + \sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{5} + \sqrt{20} + 2 \\ &amp;= 5 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ &amp;\quad + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2 \\ &amp;= 7 + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} \end{aligned}</math> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expresa raíces como potencias con exponentes racionales, y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños. (I.3, I.4.)</li> </ul>	<p><b>Actividad Grupal</b></p> <p>En grupos de 3 personas deben proponer solución al problema planteado.</p> <p><b>Actividades</b> colaborativas y talleres propuestos en el libro de trabajo. / Tabla de cotejo</p> <p><b>Prueba de bloque</b></p> <p>Prueba objetiva./ Rúbrica de evaluación</p>

Recursos: texto guía, cuaderno de trabajo, materiales elaborados por el docente, medios visuales y material concreto.

Bibliografía: SWOKOWSKI – COLE, Álgebra, editorial THOMSSON LEARNING, México D.F. 2011

LEHMAN, Álgebra, LIMUSA editores, México D.F. 2011

GALINDO Edwin, Matemáticas Superiores, Prociencia Editores, Ecuador 2010

## Ampliación conceptual

Los números racionales pueden expresarse como la división de dos enteros, siempre y cuando no se produzca una división por cero, por cuanto no es posible realizar esta división. Es importante comprender que las operaciones matemáticas están dispuestas en parejas opuestas (suma y resta, multiplicación y división, potenciación y radicación, etc.), en este sentido, es claro que los números racionales pueden producir tres clases de decimales al ejecutar la división respectiva; pero es de suma importancia cualquier expresión decimal que represente a un número racional pueda expresarse como fracción. Observemos los siguientes casos:

### 1. Decimal exacto 0.28

Para expresar 0.28 como una división de enteros, nombramos a este decimal con una letra, N por ejemplo:

$$N = 0.28$$

Se multiplica por 10, 100, 1000, etc., según el número de decimales, en este caso corresponde multiplicar por 100, con lo cual queda:

$$100N = 28$$

Resolviendo la ecuación y simplificando nos queda  $N = 7/25$ . De este modo se puede concluir que  $0.28 = 7/25$

### 2. Decimal periódico. $0.\overline{23}$

Igual que en el caso anterior, lo nombramos con N

$$N = 0.\overline{23} \text{ Ecuación (1)}$$

Se multiplica por 10, 100, 1000, etc., según el número de cifras periódicas, en este caso corresponde multiplicar por 100, con lo cual queda:

$$100N = 23.\overline{23} \text{ ecuación (2)}$$

Restamos la ecuación (1) de (2) y obtenemos:

$$99N = 23$$

Resolvemos la ecuación y se obtiene  $N = 23/99$ . De este modo se puede concluir que  $0.\overline{23} = 23/99$ .

## 1 Números racionales y números irracionales

### Explora

Cada una de las seis caras del cubo de Rubik está compuesta por nueve cuadrados de los colores blanco, amarillo, rojo, azul, naranja y verde (Figura 1).

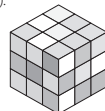


Figura 1

• La solución del rompecabezas consiste en que, al final, los cuadrados de cada cara sean del mismo color. ¿Qué parte del total representan los cuadrados que forman cada cara del cubo solucionado?

### Ten en cuenta

En la expresión  $\frac{p}{q}$ ,  $p$  es el numerador y  $q$  el denominador.

### Ten en cuenta

Si se toma la expresión fraccionaria de un número racional y se divide el numerador entre el denominador, se obtiene su expresión decimal.

### 1.1 El conjunto de los números racionales

Como el cubo consta de seis caras, y cada cara contiene nueve cuadrados, en total el cubo tiene  $6 \cdot 9 = 54$  cuadrados.

De acuerdo con lo anterior, la parte del total de cuadrados que representan los que forman una cara del cubo, es:

$$\frac{9}{54} \quad \frac{9}{54} \quad \frac{9}{54} \quad \frac{9}{54} \quad \frac{9}{54} \quad \frac{9}{54}$$

El número  $\frac{9}{54}$  es un **número racional**.

Un **número racional** se expresa de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros y  $q$  es distinto de cero.

El conjunto de los **números racionales**  $\mathbb{Q}$  se determina así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

#### Ejemplo 1

• El número  $-957$  pertenece al conjunto de los números racionales porque puede escribirse de la forma  $\frac{p}{q}$ , escribiendo en el denominador de esta fracción el número 1.

$$-957 = \frac{-957}{1}$$

• Otros números racionales son:

$$\frac{-4}{7}, -63, \frac{8}{3}, -\frac{3}{2}$$

### 1.2 Expresiones decimales

Todo número racional puede expresarse en forma de **fracción** o como un **decimal finito, infinito periódico puro o infinito periódico mixto**.

Las expresiones decimales de los números racionales se pueden clasificar así:

• **Exacta:** cuando el número de cifras decimales es finito.

$$\frac{5}{8} = 0,625 \leftarrow \text{expresión decimal finita}$$

• **Periódica pura:** cuando la parte decimal se repite indefinidamente, este conjunto de cifras se denomina periodo.

$$\frac{5}{9} = 0,55555\ldots = 0,\overline{5}$$

• **Periódica mixta:** cuando el periodo comienza después de una o varias cifras decimales. El conjunto de cifras que hay entre la coma y el periodo es el anteperiodo.

$$\frac{96}{55} = 1,74545454\ldots = 1,7\overline{45}$$

Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números racionales e irracionales e identificar sus elementos.

**Ejemplo 2**

- La expresión decimal del número racional  $\frac{7}{20}$  es 0,35. Por lo tanto, este número tiene una expresión decimal exacta.
- Para el número racional  $-\frac{5}{11}$  la expresión decimal es periódica pura porque  $-\frac{5}{11} = -0,454545\dots$  que se puede escribir  $-0,4\overline{5}$ . Esta notación indica que el periodo es 45.
- La expresión decimal de  $-\frac{3}{35}$  es  $-0,0857142857142\dots = -0,08\overline{57142}$ . La parte decimal está formada por el cero (anteperiodo) seguida por el periodo 857142. Por lo tanto, es una expresión decimal periódica mixta.

**1.3 El conjunto de los números irracionales**

Todo número irracional tiene una expresión decimal infinita no periódica. El conjunto de los números irracionales se simboliza con  $\mathbb{I}$ .

En otras palabras, los números irracionales no se pueden escribir de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros y  $q \neq 0$ .

**Ejemplo 3**

Los números  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\varphi$  pertenecen al conjunto de los números irracionales porque su expresión decimal es infinita no periódica:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4} &= 1,31950791\dots & \pi &= 3,141592653\dots \\ e &= 2,7182818284\dots & \sqrt{2} &= 1,189207115\dots \\ \sqrt{5} &= 2,2360679774\dots & \varphi &= 1,618033988749\dots \end{aligned}$$

Para mayor exactitud en los procesos aritméticos y algebraicos, los números irracionales se indican y no se escriben en su expresión decimal. Según su origen, los números irracionales se clasifican en algebraicos o trascendentes. Observa la Tabla 1.

Clase	Ejemplos
Número irracional algebraico	El número áureo representado por la letra griega phi. $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
	Las raíces no exactas. $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{21}$
Número irracional trascendente	El número pi es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. $\pi$
	La constante de Euler o constante de Napier. $e$

Tabla 1

**CULTURA** del Buen Vivir

**La humildad**

Una persona humilde reconoce sus logros pero evita ser egocéntrica para no perder la objetividad en su manera de actuar diariamente.

- ¿Qué implicaciones podría tener que una persona se concentre solamente en sus logros y deje de ser humilde?

**Razonamiento matemático**

**El primer número irracional**

Pitágoras utilizó su teorema para hallar la diagonal de un cuadrado de lado 1, como el que se observa en la Figura 2.

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

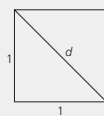


Figura 2

- ¿Cuál es el valor de la diagonal  $d$ ? ¿A qué conjunto numérico pertenece este valor? ¿Por qué?

**Ampliación conceptual**

**3. Decimal periódico mixto  $0,1\overline{23}$**

Nuevamente nombramos con  $N$ ,  $N = 0,5\overline{28}$ . Observamos el número de cifras no periódicas y multiplicamos por 10, 100, 1000, etc. En este caso hay solo una cifra no periódica, el 5, por lo que multiplicamos por 10 y tenemos:

$$10N = 528,2\overline{8} \text{ Ecuación (1)}$$

Ahora multiplicamos por 10, 100, 1000, etc, según corresponda al número de cifras periódicas, en este caso por 100 y obtenemos:  $1000N = 528,2\overline{8}$  Ecuación (2)

Restamos la ecuación (1) de la (2) y obtenemos

$$990N = 523 \text{ Resolvemos la ecuación, y se tiene } N = 523/990.$$

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Pida a sus estudiantes que representen fracciones de distintas situaciones
- Las fracciones que representaron, ahora deben expresarlas como un decimal, exacto, periódico y periódico mixto.
- Para iniciar con los números irracionales, plantee la situación de la planificación que se encuentra más arriba.
- Pida que trabajen en grupos y expongan.

**Actividades colaborativas**

- Pida a sus estudiantes que lleven una manzana.
- Solicite que trabajen en parejas y que corten cada manzana en 6 partes iguales.
- Ahora deben juntar las dos manzanas cortadas y representar fracciones de tal manera que su representación decimal sea exacto, periódico y periódico mixto.
- Si tienen dificultad para encontrar la fracción que produce decimal periódico mixto, ayúdeles,  $7/12$ .  $5/12$ .

## Ampliación conceptual

Un número se llama irracional si no es posible escribirlo como una fracción. La expresión decimal de un número irracional es infinita y no es periódica. Un ejemplo de número irracional es  $\sqrt{2}$ ; observa sus primeras cifras: 1,4142135623730950488....., otro número irracional es el número que se usa en geometría, el número  $\pi$  que se usa para calcular longitudes de circunferencias y áreas de círculos, para el cual la aproximación más usual es 3,1416. La representación decimal de este número continúa interminablemente sin repetición. Gracias a la tecnología que ahora tenemos, una computadora calculó  $\pi$  como decimal hasta cien cifras, he aquí algunas:  $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ \dots$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique las diferencias que existen entre un número decimal periódico y un decimal no periódico.
- Ejemplifique la densidad de los números irracionales.
- Muestre las propiedades de los números irracionales.
- Explique y ejemplifique el proceso de aproximación de raíces mediante intervalos encajados

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 5 estudiantes y pídale que ubiquen en la recta numérica los siguientes números:  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$ .
- Mediante el método de intervalos encajados, pida a los grupos que aproximen a cuatro decimales las raíces de:  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ .
- Realice la exposición de los grupos en papelote, para que cada grupo sea diferente puede escribir otros radicales.

## 1 Números racionales y números irracionales

### 1.4 Números irracionales en la recta numérica

A cada número irracional le corresponde un punto en la recta numérica.

#### Ejemplo 4

Para ubicar algunos números irracionales en la recta numérica se llevan a cabo los siguientes pasos.

- Se traza una recta y se ubican los números 0 y 1.
- Sobre la posición del número 1 se construye un segmento perpendicular con la misma longitud que la unidad.
- Se une con un segmento el 0 y el extremo superior del segmento perpendicular que se trazó anteriormente.
- Con un compás se hace centro en 0 y se traza un arco desde la parte superior del segmento perpendicular hasta cortar la recta numérica. Este punto de corte corresponde a  $\sqrt{2}$  y se justifica con el teorema de Pitágoras.
- Para construir las siguientes raíces cuadradas se aplica un proceso similar. Observa la Figura 3.

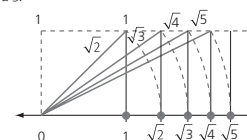


Figura 3

#### Ejemplo 5

Los números irracionales diferentes a raíces cuadradas no exactas se ubican en la recta numérica haciendo una aproximación en la parte decimal a una o dos cifras. Así, para representar los números irracionales  $\pi$ ,  $e$ ,  $-\sqrt{2}$ , se pueden utilizar aproximaciones como las siguientes:

$$\pi \approx 3,14 \qquad e \approx 2,72 \qquad -\sqrt{2} \approx -1,2$$

Luego, la representación de estos números puede hacerse como se muestra en la Figura 4.

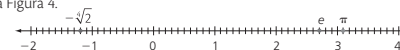


Figura 4

#### Ten en cuenta

El símbolo  $\approx$  se lee como "es aproximadamente igual a".

#### En la calculadora

Para calcular raíces con índice diferente a 2 se utiliza la segunda función de la tecla  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Así, para calcular  $\sqrt[3]{5}$ , se digita:

4  $\sqrt{\phantom{x}}$  ^ 3 5 EXE

• Calcula las raíces:

$$\sqrt{7}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[4]{13}$$

#### Actividad resuelta

##### Resolución de problemas

- Un terreno rectangular mide 12 m de largo y 6 m de ancho. ¿Cuánto mide la diagonal  $d$  del terreno? ¿El valor que se halla corresponde a un número irracional? ¿Por qué?

**Solución:**  
Para hallar la diagonal del terreno se hace uso del teorema de Pitágoras.

$$12^2 + 6^2 = d^2, \text{ entonces } d = \sqrt{180} = 13,41640\dots$$

Por lo tanto, la diagonal del terreno mide  $\sqrt{180}$  m, que es 13,42 m aproximadamente. El número  $\sqrt{180}$  pertenece al conjunto de los números irracionales, pues su expresión decimal es infinita no periódica.

**Bloque de Álgebra y funciones.**

**Destreza con criterios de desempeño:** Reconocer el conjunto de los números racionales e irracionales e identificar sus elementos.

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

2. Halla la expresión decimal de cada número racional.

• Luego, clasifícala según sea exacta, infinita periódica pura o infinita periódica mixta.

a.  $\frac{6}{7}$                       b.  $\frac{15}{17}$   
 c.  $\frac{5}{2}$                       d.  $\frac{5}{9}$   
 e.  $\frac{5}{42}$                      f.  $-\frac{3}{2}$

3. Utiliza la calculadora para hallar los valores aproximados a dos decimales de los siguientes números irracionales algebraicos:

a.  $\sqrt[3]{9}$                       b.  $\sqrt{21}$   
 c.  $-\sqrt{2}$                     d.  $\sqrt{5}$   
 e.  $\sqrt[3]{5}$                       f.  $-\sqrt{26}$

4. Aproxima a tres cifras decimales los siguientes números racionales:

a. 278,567 812            b. 12,734 1  
 c.  $\frac{4}{78}$                       d. -348,7239  
 e.  $-\frac{1}{9}$                       f. 0,54672

**Razonamiento**

6. Escribe F, si la proposición es falsa o V, si es verdadera.

• Todo número irracional puede escribirse de la forma  $\frac{p}{q}$ . ( )  
 b. Los números irracionales trascendentes pueden ubicarse con exactitud en la recta numérica por medio de aproximaciones decimales. ( )  
 c. Todo número racional puede expresarse de forma decimal. ( )  
 d. El primer número racional hallado fue  $\sqrt{5}$ . ( )  
 e. El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números naturales. ( )

**Modelación**

7. Representa en la recta numérica el número irracional  $\sqrt{10}$ . Explica el proceso que seguiste.

8. En la Figura 5 se muestra la construcción en espiral de las raíces cuadradas de los números 2 al 15. El procedimiento es similar al que se explicó en la página anterior. En una hoja en blanco haz la construcción utilizando una escuadra.

**Comunicación**

5. En la Tabla 2, marca con una X la casilla que corresponde, según los números sean racionales o irracionales.

	Es número racional	Es número irracional
$2\sqrt[3]{6}$		
$-\frac{4}{5}$		
55,0 $\bar{3}$		
-103		
$\pi$		
4,678		
$\frac{99}{8}$		
-345,231409...		
$\sqrt[3]{8}$		

Tabla 2

**Figura 5**

**Resolución de problemas**

9. El largo y ancho de una piscina olímpica es 50 m y 25 m, respectivamente. Si un nadador quiere recorrerla en diagonal, ¿qué distancia recorre? ¿A qué conjunto numérico pertenece este valor?

10. La parte de la herencia que le corresponde a un hijo es  $\frac{1}{9}$  del total. ¿El hijo recibe un valor exacto de dinero?

**Solucionario.**

- 2.
- a.  $0,857142$  Infinita periódica pura  
 b.  $-0,8823529411764$  Infinita no periódica  
 c.  $-2,5$  Decimal finita.  
 d.  $0,5$  Infinita periódica pura  
 e.  $0,119047$  Infinita periódica mixta  
 f.  $-1,5$  Decimal finita.
- 3.
- a. 2,08 b. 1,66 c.  $-1,08$  d. 1,50 e. 1,12 f.  $-1,59$
- 4.
- a. 278,568 b. 12,734 c. 0,051 d.  $-348,724$   
 e.  $-0,111$  f. 0,547

**Comunicación**

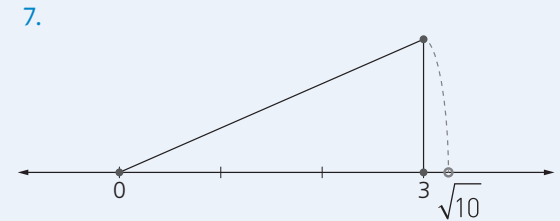
5.

	Es número racional	Es número irracional
$2\sqrt[3]{6}$		X
$-\frac{4}{5}$	X	
55,0 $\bar{3}$	X	
-103	X	
$\pi$		X
4,678	X	
$\frac{99}{8}$	X	
-345,231409...		X
$\sqrt[3]{8}$	X	

**Razonamiento**

- 6.
- a. F b. V c. V d. F e. F

**Modelación**



1. Se ubican en la recta numérica los números naturales 1, 2, 3, ...
2. Sobre el punto que representa el número 3 se construye un segmento perpendicular de longitud 1.
3. Luego, con un compás se traza un arco de longitud igual a la hipotenusa del triángulo y se marca sobre la recta numérica el punto que le corresponde  $\sqrt{10}$ .

- 8.
- Respuesta abierta

**Resolución de problemas**

- 9.
- La distancia que recorre es  $25\sqrt{5}$ . Este número pertenece al conjunto de los números irracionales.
- 10.
- Depende del valor total de la herencia, puede ser un valor exacto o no.

## Ampliación conceptual

Sabemos que los números reales es el conjunto que contiene a los números Naturales ( $\mathbb{N}$ ), enteros ( $\mathbb{Z}$ ), racionales ( $\mathbb{Q}$ ) e irracionales ( $\mathbb{I}$ ). Por lo que los conjuntos numéricos son:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\dots, -3, -7/3, -2, -1.5, -1, 0, 1/2, 1, 5/4, \sqrt{4}, 2.\overline{6}, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{I} = \{\dots, -\sqrt{5}, -\sqrt{2}, -\sqrt[8]{2}, e, \pi, \dots\}$$

Note que el cero no es un número irracional. De estos conjuntos numérico tenemos las siguientes conclusiones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recalque a sus estudiantes que los números naturales son los que permiten contar fácilmente. Y que los números enteros pueden ser negativos, positivos o el unitario cero.
- Elabore la clasificación de los números racionales en fracciones y decimales.
- Aclare que los números irracionales son expresiones decimales infinitas no periódicas.
- Explique a los estudiantes que la unión de los números racionales con los irracionales generan el conjunto de los números reales. Y que no existe intersección entre los números racionales con los irracionales.

## 2 Números reales

### Explora

La unión de los conjuntos numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$  forma el conjunto de los números reales.

- Haz un diagrama de inclusión que resuma la relación que existe entre estos conjuntos.

### Ten en cuenta

La representación en la recta numérica de los números reales se hace de la misma manera que la representación de los números racionales e irracionales.

### 2.1 El conjunto de los números reales

El diagrama que representa la inclusión de los conjuntos numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$  y la formación del conjunto de los números reales se presenta en la Figura 1.

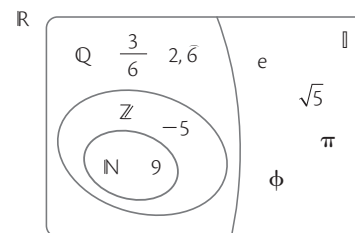


Figura 1

Los números reales son el resultado de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Se simboliza con  $\mathbb{R}$ .

### Ejemplo 1

Dada la expresión: "es la circunferencia de un disco volador que tiene un diámetro de 8 cm", ¿cuál es el conjunto de números que mejor describe esta situación? Los números irracionales son los que mejor describen la relación, ya que para hallar la longitud de la circunferencia se debe multiplicar el diámetro por la constante  $\pi$ . En este caso 8 se multiplica por  $\pi$ . Por lo tanto,  $8\pi$  cm es la longitud de la circunferencia del disco y este corresponde a un número irracional.

### 2.2 Expresión aproximada de un número real

Aproximar un número real a ciertas cifras decimales consiste en encontrar **por defecto** o **por exceso** un número muy próximo al dado.

La expresión aproximada de un número real puede hallarse por:

- Defecto:** cuando se busca un número con un determinado número de cifras decimales inmediatamente menor al dado.
- Exceso:** cuando se busca un número con un determinado número de cifras decimales inmediatamente mayor al dado.

### Ejemplo 2

La aproximación de los números 1,245 6; 8,343 58; y, 10,578 3 a dos cifras decimales es:

Números	Por defecto	Por exceso
1,245 6	1,24	1,25
8,343 58	8,34	8,35
10,578 3	10,57	10,58

Tabla 1

Bloque de Álgebra y funciones

**Destrezas con criterios de desempeño:**

- Reconocer el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  e identificar sus elementos.
- Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.

La mejor aproximación para un número real en su expresión decimal es:

- Por defecto, cuando la cifra siguiente a la que se va a aproximar es 0, 1, 2, 3 o 4.
- Por exceso, cuando la cifra siguiente a la que se va a aproximar es 5, 6, 7, 8 o 9.

**Ejemplo 3**

La mejor aproximación a cuatro cifras para el número 67,982 37 es por exceso 67,982 4 porque la cifra siguiente a 3 es 7.

**Actividades resueltas**

**Comunicación**

1 Justifica por qué la proposición "todo número irracional es natural" es falsa.

**Solución:**

La proposición es falsa porque el conjunto de los números irracionales no es un subconjunto de los números naturales y viceversa. Son conjuntos que nunca se intersecan.

**Resolución de problemas**

2 Álvaro paga cuotas mensuales de \$785,6 a un banco por un crédito. Si este banco siempre hace ajuste a la unidad. ¿Cuánto paga Álvaro en un mes?

**Solución:**

Hacer ajuste a la unidad significa aproximar la posición de las unidades. La cifra decimal 6 hace una aproximación por exceso a las 5 unidades, para completar así una unidad más. Por lo tanto, Álvaro paga una cuota mensual de \$786.

**TECNOLOGÍAS**  
de la información y la comunicación

www.e-sm.net/9smt01

Encontrarás ejemplos y datos relacionados con los números reales.

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

3 Escribe  $\in$  o  $\notin$  para establecer la relación de cada número con el conjunto numérico dado.

- a. -548   $\mathbb{Q}$
- b.  $\frac{4}{7}$    $\mathbb{I}$
- c. 78,2333...   $\mathbb{Z}$
- d.  $\sqrt[4]{16}$    $\mathbb{Q}$
- e. 0,4352...   $\mathbb{I}$
- f.  $6\pi$    $\mathbb{Z}$
- g. 46,89   $\mathbb{R}$
- h.  $-\sqrt{7}$    $\mathbb{I}$
- i. 8934   $\mathbb{Z}$
- j.  $-21e$    $\mathbb{I}$
- k.  $\frac{87}{5}$    $\mathbb{R}$

**Razonamiento**

4 Aproxima los siguientes números reales a cuatro cifras decimales:

- a.  $\sqrt[3]{54}$
- b.  $\pi$
- c.  $\frac{1}{3}$
- d. 429,12359034
- e.  $\sqrt{3}$
- f. -3,54781781...

5 Responde y justifica.

- ¿En qué se diferencian los números irracionales de los racionales?

**Resolución de problemas**

6 Un avión recorre entre dos ciudades 9 770,874 km.

- ¿Cuál es la mejor aproximación de esta distancia a las unidades?

7 Se necesita distribuir 27 libros entre 4 personas de manera equitativa. ¿Cuál sería la mejor manera de repartirlos y por qué?

APLICA © EDICIONES SM

Solucionario.

**Ejercitación**

- 3. a. -548  $\in \mathbb{Q}$
- b.  $\frac{4}{7}$   $\notin \mathbb{I}$
- c. 78,2333...  $\notin \mathbb{Z}$
- d.  $\sqrt[4]{16}$   $\in \mathbb{Q}$
- e. 0,4352...  $\in \mathbb{I}$
- f.  $6\pi$   $\notin \mathbb{Z}$
- g. 46,89  $\in \mathbb{R}$
- h.  $-\sqrt{7}$   $\in \mathbb{I}$
- i. 8934  $\in \mathbb{Z}$
- j.  $21e$   $\in \mathbb{I}$
- k.  $\frac{87}{5}$   $\in \mathbb{R}$

**Razonamiento**

- 4. a. 3,779 8    b. 3,1416    c. 0,333 3
- d. 429,123 6    e. 1,732 1    f. -3,547 8
- 5.

Los números irracionales no se pueden escribir de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros y  $q \neq 0$ , esto debido a que son número infinitos no periódicos.

**Resolución de problemas**

- 6. 154 km
- 7. A cada persona se le deben dar seis libros, los cuatro restantes se los deben rotar o rifar.

## Ampliación conceptual

La recta real tiene su centro en el origen que es el cero, por lo que del cero hacia la izquierda están los números reales negativos y del cero hacia la derecha están los números reales positivos.

Si un número negativo **a**, está más a la izquierda que otro **b**, entonces **a** es muy pequeño.

Pero si un número positivo **a** está más a la derecha que otro **b**, entonces **a** es muy grande.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recalque a sus estudiantes que la recta real contiene a todos los números reales.
- Trace la recta real empleando los números enteros indicando cuales son los enteros negativos, positivos y el unitario cero.
- Aclare que la unidad puede ser dividida en tantas partes iguales sean necesarias.
- Empleando regla y compas ubique  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{10}$
- Ubique en la recta real los números  $-9/2$ ,  $-5/3$ ,  $\sqrt{5}$ , y  $\pi$ .
- Explique a los estudiantes porque  $-9/2 < -5/3$  y  $\pi > \sqrt{5}$ .

## Actividades colaborativas

- Pida anticipadamente a sus estudiantes que traigan la carta de pago del consumo de luz eléctrica.
- Forme equipos de trabajo de 5 estudiantes para que escriban estas cantidades en una recta real y las expongan.
- Muestre un ejemplo de préstamo hipotecario donde se ha comprado una casa y pida a los mismos grupos que expliquen el orden que muestra la planilla y cuál es su interpretación respecto al préstamo.

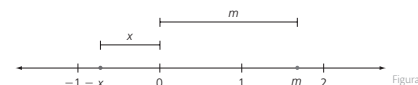
## 3 La recta real

### Explora

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta numérica.

- ¿Cuáles son las características de la recta real?

- La **recta real** cumple con ciertas características, tal como se observa en la Figura 1.
- Al punto de referencia arbitrario llamado **origen**, le corresponde el número real 0.
  - Dada una **unidad** conveniente de medición, cada número positivo  $m$  se representa por un punto en la recta a una distancia de  $m$  unidades a la derecha del origen, y cada número negativo  $-x$  se representa mediante un punto a una distancia de  $x$  unidades a la izquierda del origen.
  - Las flechas a la izquierda y derecha de la recta significan que el conjunto de los números reales es infinito.

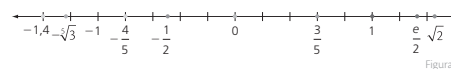


A cada número real le corresponde un **único punto** sobre la recta y a cada punto en la recta real se le asocia un **único número real**.

### Ejemplo 1

Los números reales ubicados en la recta real (Figura 2) están ordenados así:

- El número  $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$ , lo cual indica que  $-\frac{4}{5}$  está ubicado sobre la recta real más a la izquierda de  $-\frac{1}{2}$ .
- El número  $\sqrt{2} > \frac{e}{2}$ , entonces  $\sqrt{2}$  está ubicado a la derecha de  $\frac{e}{2}$ .
- El número  $-\sqrt[3]{3} \leq -\sqrt[3]{3}$ , esto significa que  $-\sqrt[3]{3}$  cumple alguna de las siguientes posibilidades  $-\sqrt[3]{3} < -\sqrt[3]{3}$ , o  $-\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{3}$ . En este caso se cumple la relación de igualdad ( $=$ ).



### Ten en cuenta

Entre dos números reales hay infinitos números reales.

### Ten en cuenta

El significado de los símbolos  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  es:  
 $<$  "menor que"  
 $>$  "mayor que"  
 $\leq$  "menor que o igual a"  
 $\geq$  "mayor que o igual a"

### Ejemplo 2

Para ordenar de menor a mayor el conjunto de números  $\{\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{5}, \sqrt[3]{2}, -\frac{7}{8}\}$  se puede hacer una aproximación (para facilitar la comparación) a dos decimales de las expresiones decimales como se muestra a continuación:

$$\sqrt[3]{2} \approx 1,10 \quad \sqrt[3]{2} \approx 1,19 \quad -\frac{7}{8} \approx -0,88 \quad -\frac{2}{5} \approx -0,4$$

Luego, el orden del conjunto es:  $-\frac{7}{8} < -\frac{2}{5} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2}$

### Ejemplo 3

Si  $a$  y  $b$  son números reales se cumple solo una de las siguientes relaciones:

Relación	Ejemplo
$a < b$ , si $a - b < 0$	$3,5 < 5,2$ , porque $3,5 - 5,2$ es $-1,7$ y $-1,7 < 0$ .
$a > b$ , si $a - b > 0$	$8,5 > 6,4$ , porque $8,5 - 6,4$ es $2,1$ y $2,1 > 0$ .
$a = b$ , si $a - b = 0$	$9,34 = 9,34$ , porque $9,34 - 9,34 = 0$ .

Tabla 1

Bloque de Álgebra y funciones

**Destrezas con criterios de desempeño:**

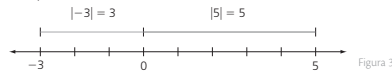
- Hallar el valor absoluto de números reales.
- Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática ( $=$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ).

**3.1 Valor absoluto**

El **valor absoluto** de un número real  $a$  se simboliza con  $|a|$  y es la distancia que hay desde  $a$  hasta cero sobre la recta real.

**Ejemplo 4**

En la Figura 3 se representa en la recta real el significado del valor absoluto de los números  $-3$  y  $5$ .



**Ten en cuenta**

La distancia entre dos puntos siempre es positiva porque es la longitud de un segmento de recta.

Para simplificar expresiones con valor absoluto es necesario utilizar las propiedades que se definen en la Tabla 2. Allí los valores de  $a$  y  $b$  son reales.

	Propiedad	Ejemplos
1	El valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.	$ a  \geq 0$ $ -8  = 8 \geq 0$
2	Un número y su opuesto tienen siempre el mismo valor absoluto.	$ a  =  -a $ $ 35,6  =  -35,6 $
3	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.	$ ab  =  a   b $ $ -4 \cdot 9  =  -4   9 $
4	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.	$\left  \frac{a}{b} \right  = \frac{ a }{ b }$ $\left  \frac{-12}{7} \right  = \frac{ -12 }{ 7 }$

Tabla 2

**Ejemplo 5**

Para simplificar la expresión  $\left| \frac{-5|23 \cdot 2|}{|5|} \right|$  se aplican algunas de las propiedades del valor absoluto, así:

$$\begin{aligned} \left| \frac{-5|23 \cdot 2|}{|5|} \right| &= \left| \frac{-5 \cdot 46}{|5|} \right| \text{ Propiedad 3} \\ &= \left| \frac{-230}{|5|} \right| \\ &= \left| \frac{230}{5} \right| \text{ Propiedades 2 y 4} \\ &= 46 \text{ Propiedad 1} \end{aligned}$$

Si  $a$  y  $b$  son números reales y  $a < b$ , entonces la **distancia** entre los puntos  $a$  y  $b$  en la recta real es:  $|b - a| = |a - b|$

**Ejemplo 6**

Para hallar la distancia entre los números  $-2$  y  $11$ , se calcula el valor absoluto de la resta del número mayor con el número menor, así:

$$|11 - (-2)| = |13| = 13 \text{ es la distancia entre los números } -2 \text{ y } 11.$$

**Ten en cuenta**

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto  $|a| \geq 0$

**Razonamiento matemático**

**De invierno a verano**

La temperatura de invierno a verano en una ciudad cambia de  $-27^\circ\text{C}$  a  $28^\circ\text{C}$  respectivamente.



• Utiliza la fórmula de distancia con valor absoluto para hallar cuántos grados Celsius hay entre las dos medidas.

**Ampliación conceptual**

A el valor absoluto lo expresamos en barra y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Puesto que la recta real está en una dimensión, el valor absoluto es la longitud o distancia entre dos puntos  $a$  y  $b$ .

Por lo que la distancia del punto  $a$  hasta el punto  $b$  es la misma que del punto  $b$  hasta el punto  $a$ . Entonces  $d_{ab} = d_{ba}$  o lo que es lo mismo que  $|b - a| = |a - b|$

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Recalque a sus estudiantes que el valor absoluto es siempre positivo o cero y se simboliza con las barras.
- Explicar la definición de valor absoluto, tomando por ejemplo:  $|4| = 4$  porque  $4 \geq 0$   
 $|-4/5| = -(-4/5) = 4/5$  porque  $-4/5 < 0$
- Aclare que si tenemos dos puntos en una recta real, es importante seleccionar a un punto como origen.
- Muestre el cálculo de distancias entre dos puntos en la recta real de por lo menos dos ejemplos.

**Actividades colaborativas**

- Pida que tracen una recta numérica y consideren que el origen es el número tres, seguido solicite que viajen tres cuartos a la izquierda, luego tres medios a la derecha para que indiquen cuanto recorrieron y cuál es su posición.
- Forme equipos de trabajo de 5 estudiantes para que realicen la misma actividad en el patio tomado un punto de origen diferente para cada grupo. Y viajen hacia el bar contando en pasos la distancia, luego viajen a otro lugar en sentido opuesto y digan cuantos pasos recorrieron y cuál es su posición.
- Pida que expliquen con sus propias palabras el valor absoluto.

## Ampliación conceptual

Un intervalo es aquel tiene todos los puntos dentro de los puntos  $a$  y  $b$  llamados extremos



Que es el intervalo cerrado  $[3,7]$  o como conjunto es  $A = \{\forall x \in \mathbb{R}/3 \leq x \leq 7\}$ .



Que es el intervalo abierto  $]3,7[$  o como conjunto es  $A = \{\forall x \in \mathbb{R}/3 < x < 7\}$ .



Que es el intervalo cerrado en la izquierda y abierto en la derecha  $[3,7[$  o como conjunto es  $A = \{\forall x \in \mathbb{R}/3 \leq x < 7\}$ .



Que es el intervalo abierto en la izquierda y cerrado en la derecha  $]3,7]$  o como conjunto es  $A = \{\forall x \in \mathbb{R}/3 < x \leq 7\}$ .

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recalque que no existe entorno para intervalos cerrado en la izquierda y abierto en la derecha o viceversa.
- Explique qué se puede partir de un intervalo abierto o cerrado y obtener su entorno.
- Aclare que las semirrectas pueden tender al infinito positivo o al infinito negativo.

Bloque de Álgebra y funciones

## 3 La recta real

### Ten en cuenta

En la notación y gráfica de intervalos: Los paréntesis ( ) y los círculos abiertos indican que los valores de los extremos están "excluidos" del intervalo.

Los corchetes [ ] y los círculos llenos indican que los valores de los extremos están "incluidos" en el intervalo.

### Ten en cuenta

El símbolo  $\infty$  no es un número. Significa "infinito" e indica que el intervalo no tiene punto final en el extremo indicado.

### 3.2 Intervalos, semirrectas y entornos

Un **intervalo** es un subconjunto de números reales que se corresponden con los puntos de un segmento o una **semirrecta** en la recta real.

La clasificación de los intervalos se presenta en la Tabla 3, donde los valores de  $a$  y  $b$  son reales.

Nombre	Notación	Conjunto	Gráfica
Intervalo abierto	$(a, b)$	$\{x/a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x/a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$[a, b)$	$\{x/a \leq x < b\}$	
	$(a, b]$	$\{x/a < x \leq b\}$	
Semirrecta	$(a, \infty)$	$\{x/x > a\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x/x \geq a\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x/x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x/x \leq b\}$	
Recta	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Tabla 3

### Actividad resuelta

#### Resolución de problemas

- Un sismo se considera fuerte según la escala de Richter si tiene una magnitud mayor o igual a 6 y menor que 6,9. ¿Qué intervalo hace relación a la situación planteada?

#### Solución:

El tipo de intervalo que representa la situación es semiabierto, por tanto su notación es  $[6, 6,9)$ , el conjunto correspondiente  $\{x/6 \leq x < 6,9\}$ , y su representación gráfica corresponde a la Figura 5.

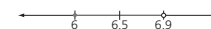


Figura 4

APLICA © EDICIONES SM

Bloque de Álgebra y funciones

Destrezas con criterios de desempeño: • Hallar el valor absoluto de números reales.  
• Representar un intervalo en R de manera algebraica y gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Halla el valor aproximado con cuatro decimales de las siguientes expresiones con valor absoluto.

- a.  $|5 - \pi|$
- b.  $||-10| - 4||$
- c.  $|\sqrt{5} - 5|$
- d.  $|-4|$
- e.  $|\frac{-1}{-1}|$
- f.  $|\frac{8-13}{15-7}|$
- g.  $|-15 - 8|$
- h.  $|35 \cdot 2 - 9|$

3. Determina la distancia entre cada par de números.

- a. -5 y 17
- b. -38 y 24
- c.  $\frac{3}{5}$  y  $-\frac{1}{2}$
- d. -34567 y 2986,21
- e.  $-\frac{56}{9}$  y  $-\frac{5}{6}$
- f. 8546 y -1234
- g. -23 y 14
- h. 3,45 y 1,45

4. Expresa en forma de intervalo los entornos.

- a.  $E_c(-2)$
- b.  $E_c(5)$
- c.  $E_c(10)$
- d.  $E_c(-3)$
- e.  $E_c(-7)$
- f.  $E_c(1)$

5. Representa en la recta real el siguiente conjunto de números reales.

$$\{\sqrt{-8}, -\frac{5}{8}, \frac{28}{99}, \sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{e}{2}, -1\}$$

6. Realiza la gráfica de los siguientes intervalos:

- a.  $\{x | x \geq -4\}$
- b.  $\{x | -\sqrt{2} \leq x \leq \frac{3}{4}\}$
- c.  $\{x | -\sqrt{3}, \frac{1}{3}\}$
- d.  $\{x | 1,5 \leq x \leq 3,56\}$
- e.  $\{x | x < -6,7\}$
- f.  $\{x | \frac{13}{4}, \infty\}$

7. Representa en la recta real cada pareja de números y escribe  $>$ ,  $<$  o  $=$ , según corresponda.

- a. -5,4  -3,8
- b. -1,2  2,3
- c.  $-\frac{5}{6}$    $-\frac{10}{12}$
- d.  $\frac{3}{5}$   1,6
- e. -0,91   $-\frac{7}{7}$
- f.  $-\frac{1}{4}$   2,3

8. Dentro de la notación de conjunto para un intervalo como  $\{x | a < x \leq b\}$ , la expresión  $a < x \leq b$  es llamada desigualdad.

¿Cuál es la desigualdad que representa al intervalo  $(-23, 56]$ ? Explica tu respuesta.

9. Expresa cada proposición mediante la notación de intervalo y conjunto.

- a. La estatura de los jugadores de un equipo de baloncesto es menor a 1,98 m y mayor o igual a 1,82 m.
- b. Los niveles normales de glucosa en ayunas en un ser humano deben ser mayores o iguales a 70 mg/dl y menores que 100 mg/dl.
- c. El tiempo que tarda una persona en llegar a su trabajo es mayor a  $\frac{5}{6}$  h y menor o igual a  $\frac{3}{2}$  h.

Resolución de problemas

10. La temperatura media en Montreal durante un año se muestra en la Figura 5. Utiliza la fórmula de distancia con valor absoluto para hallar el aumento en grados Celsius entre los meses de enero a julio.

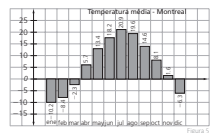


Figura 5

11. Un nutricionista hace un plan de alimentación para que un paciente mantenga su peso normal entre 56,6 kg y 61,5 kg máximo. Responde:

- a. Haz una gráfica del intervalo del peso normal.
- b. Si el paciente actualmente pesa 75,4 kg, ¿cuántos kilogramos debe perder el paciente para alcanzar el promedio del peso normal?

12. La escala numérica de evaluación por desempeños en una institución educativa se presenta en la Tabla 4.

Nivel de desempeño	Escala numérica
Bajo	(1,0 a 3,0)
Básico	(3,0 a 4,0)
Alto	(4,0 a 4,6)
Superior	(4,6 a 5,0)

a. ¿Qué tipo de intervalo representa la escala numérica de cada desempeño? Grafícalos.

b. Si un estudiante obtiene 3,94 en su promedio quimestral, ¿qué desempeño obtiene?

Solucionario.

Ejercitación

2.

- a. 1,858 4...
- b. 6
- c. 2,763 9
- d. 4
- e. -1
- f. 0,625
- g. 120
- h. 630

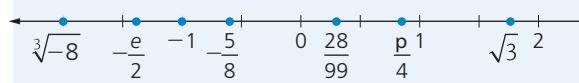
3.

- a. 22
- b. 6,2
- c.  $\frac{11}{10}$
- d. 3 331,88
- e.  $\frac{97}{18}$
- f. 9780
- g. 37
- h. 2

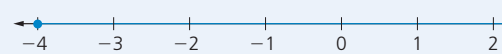
4.

- a.  $(-6, 2)$
- b.  $(3, 7)$
- c.  $(7, 13)$
- d.  $(-8, 2)$
- e.  $(-8, -6)$
- f.  $(-5, 7)$

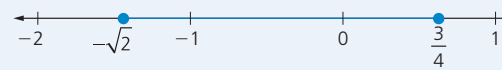
5.



6. a.



b.



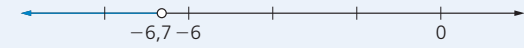
c.



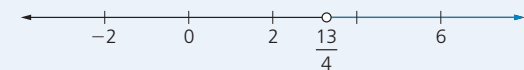
d.



e.



f.



7.

- a.  $<$
- b.  $<$
- c.  $=$
- d.  $<$
- e.  $>$
- f.  $<$

Comunicación

8.  $-23 < x \leq 56$

9.

a. Intervalo  $[1,82, 1,98]$  y conjunto  $\{x | 1,82 \leq x < 1,98\}$

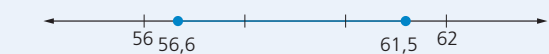
b. Intervalo  $[70, 100]$  y conjunto  $\{x | 70 \leq x < 100\}$

c. Intervalo  $(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}]$  y conjunto  $\{x | \frac{5}{6} < x \leq \frac{3}{2}\}$

Resolución de problemas

10. 31,1 grados Celsius

11.a



b. 16,35 kg

12.a. Intervalos cerrados



b. Básico

## Ampliación conceptual

Potencias con exponente entero.

Debemos recordar que la potenciación y radicación para 0 y 1 cumplen las siguientes propiedades.

$$1^n = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1; a \neq 0$$

$$0^n = 0; n \neq 0$$

$0^0$  no está definido

$$\sqrt[n]{1} = 1; n \in \mathbb{N}; n > 1$$

$$\sqrt[n]{0} = 0; n \in \mathbb{N}; n > 1$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Aclarar a los estudiantes que la base indica el factor que se repite y el exponente el número de veces que se repite el factor.
- Explicar que la potenciación y la radicación son distributivas en el caso de fracciones

## Actividades colaborativas

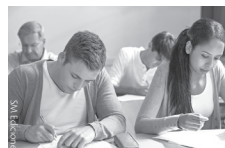
- Solicitar a los estudiantes que investiguen el número de habitantes en el Ecuador hace diez, cinco años y actualmente, para hacer una comparación del crecimiento poblacional en el país y establecer una relación entre el crecimiento poblacional y potencias de números enteros.

### 4

## Potencias con exponente entero

### Explora

Fernando y Luisa participan en un concurso de matemáticas. En una de las pruebas deben justificar si la expresión  $-5^2 = 25$  es verdadera. Fernando dice que la igualdad es correcta, mientras que Luisa dice que es falsa.



- ¿Quién tiene razón y cuál es la justificación a esta respuesta?

### Ten en cuenta

$$a^0 = 1, \text{ si } a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

### En la calculadora

#### Potencias con base negativa

Para calcular potencias con base negativa se utilizan las teclas  $(-)$ ,  $(\frac{\square}{\square})$  y  $(\wedge)$ .

Así, para calcular  $(-4)^5$ , se digita:

$$(-) 4 (\wedge) 5 = -1024$$

- Calcula las siguientes potencias:  $(-10)^3$ ,  $(-2,5)^2$ ,  $(-2)^{13}$

La igualdad  $-5^2 = 25$  es falsa porque:

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

Lo anterior indica que el exponente 2 afecta solo al número 5 y el signo  $(-)$  se ubica luego de hallar la potencia. Por lo tanto, Luisa tiene razón.

### 4.1 Propiedades de las potencias con exponente entero

Todo número real  $a$  diferente de cero, elevado a un exponente entero negativo  $n$ , cumple que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Para simplificar expresiones donde estén presentes potencias con exponentes enteros se utilizan las propiedades definidas en la Tabla 1. Las bases  $a$  y  $b$  son números reales diferentes de cero, en los casos que sean denominadores, y los exponentes  $m$  y  $n$  son números enteros.

	Propiedad	Ejemplo
1	$a^m a^n = a^{m+n}$	$(-3)^2 (-3)^3 = (-3)^5$
2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^{-5}}{2^4} = 2^{-5-4} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9}$
3	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$
4	$(ab)^n = a^n b^n$	$(-6 \cdot 8)^2 = (-6)^2 \cdot 8^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{7}\right)^6 = \frac{3^6}{7^6}$
6	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
7	$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{4^{-2}}{3^{-9}} = \frac{3^9}{4^2}$

Tabla 1

### Ejemplo 1

La simplificación de la expresión  $-8^2 \cdot 4^{-3} + 3^0$  es:

$$-8^2 \cdot 4^{-3} + 3^0 = -64 \cdot \frac{1}{64} + 1$$

$$= -\frac{64}{64} + 1 = 0$$

### Actividad resuelta

#### Resolución de problemas

- Un científico está creando una fórmula general para modelar una situación real. La expresión que escribió es  $(3ab^2c) \left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$ . Ayuda al científico a simplificar la expresión y a eliminar los exponentes.

#### Solución:

Para simplificar la expresión utilizamos las propiedades definidas en la Tabla 1.

$$(3ab^2c) \left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2} = (3ab^2c) \left(\frac{c^3}{2a^2b}\right)^2 = (3ab^2c) \left(\frac{c^3}{2a^2b}\right)^2 = \frac{3ab^2c^6}{4a^4b^2} = \frac{3c^7}{4a^3}$$

**Bloque de Álgebra y funciones**

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

2. Calcula las siguientes potencias:

a.  $(-35)^0$       b.  $8^0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^0$   
 c.  $-4^0 \cdot -2^0$       d.  $(99^0 - 23,4)^0$   
 e.  $3^{-2}$       f.  $0^0$   
 g.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$       h.  $10^2 \cdot 10^3$   
 i.  $((-4)^0)^{-1}$       j.  $\frac{-3^0}{(-3)^0}$

3. Simplifica cada una de las siguientes expresiones y elimina los exponentes negativos:

a.  $a^0 a^{-1}$       b.  $(16x^0 y^0) \left(\frac{1}{4} x^0 y^0\right)$   
 c.  $b^0 \left(\frac{1}{3} b^0\right) (12b^{-0})$       d.  $\frac{(x^0 y^0) (xy)^{-1}}{xy}$   
 e.  $\frac{a^{-0} b^0}{a^{-0} b^0}$       f.  $\left(\frac{c^0 d^0}{cd}\right) \left(\frac{d^0}{c^0}\right)$   
 g.  $\frac{(xy^{-0} z^{-0})^0}{(x^0 y^0)^{-1}}$       h.  $\frac{(a^0 x^0)^{-1}}{(x^0 y^0)^{-1}}$

4. Escribe los siguientes números como potencias cuyas bases sean números primos.

a. 8, 125, 243, 1024, 2 401  
 b.  $\frac{1}{625}$ ,  $\frac{1}{343}$ ,  $\frac{1}{256}$ ,  $\frac{1}{81}$ ,  $\frac{1}{32}$

**Comunicación**

5. Escribe la propiedad o definición que se utiliza en cada paso para simplificar la expresión  $\frac{36a^{-2} b^{-3}}{3a^{-1} b^{-2}}$ .

$= (4a^{-2-1})^{-1} b^{-3-(-2)}$    
 $= (4a^0 b^{-1})^{-2}$    
 $= \left(4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b}\right)^{-2}$    
 $= \left(\frac{4}{b}\right)^{-2}$    
 $= \left(\frac{b}{4}\right)^2$    
 $= \frac{b^2}{16}$

**Razonamiento**

6. Completa la Tabla 2.

Base	Exponente	Potencia
$-\frac{5}{3}$	3	$-\frac{125}{27}$
	-2	$\frac{1}{25}$
-101	0	
	3	1000
25		$\frac{1}{625}$

7. Calcula mentalmente las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los exponentes.

a.  $\frac{16^0}{9^0}$       b.  $20^0 (0,5)^0$

8. Determina el signo de cada expresión, sabiendo que a, b y c son números reales con  $a > 0$ ,  $b < 0$  y  $c < 0$ .

a.  $b^5$       b.  $(b - a)^0$   
 c.  $\frac{a^0 c^0}{b^0}$       d.  $(b - a)^0$   
 e.  $b^{0^0}$       f.  $ab^0 c^0$

9. Relaciona las expresiones equivalentes.

a.  $\frac{3^{-1}}{5^{-1}}$   64  
 b.  $\pi^{-2}$    $\frac{5}{3}$   
 c.  $\frac{1}{8^{-2}}$    $\frac{1}{\pi}$

**Resolución de problemas**

10. La edad de una micro bacteria J es de  $\frac{1}{3^2}$  días.

a. ¿Cuál es la edad total de tres micro bacterias?  
 b. Una micro bacteria M vive la tercera parte de la vida de la micro-bacteria J. ¿Cuántos días vive la micro bacteria M?

11. En tecnología informática, un kilobyte tiene el tamaño de  $2^{10}$  bytes. Un gigabyte es  $2^{30}$  bytes en tamaño. El tamaño de un terabyte es el producto del tamaño de un kilobyte por un gigabyte. ¿Cuál es el tamaño de un terabyte?

Solucionario.

Ejercitación

- 2.
- a.  $-42,875$ ; b.  $-\frac{16}{9}$ ; c. 8 192;  
 d. 501,76; e.  $\frac{1}{81}$ ; f. No está definido;  
 g.  $\frac{27}{8}$ ; h. 100 000; i.  $\frac{1}{4096}$ ; j.  $-\frac{1}{9}$
3. a.  $a^4$ ; b.  $4x^7 y^5$ ; c.  $\frac{4}{b^2}$ ; d.  $\frac{x^3}{y}$   
 e.  $\frac{a^2}{b}$ ; f.  $\frac{d^7}{c^6}$ ; g.  $\frac{x^8 y^5}{z^6}$ ; h.  $\frac{s^3}{q^7 r^6}$

- 4.
- a.  $2^3, 5^3, 3^5, 2^{10}, 7^4$ ;  
 b.  $5^{-4}, 7^{-3}, 2^{-8}, 3^{-4}, 2^{-5}$

Comunicación

5. a. Propiedad 2  
 b. Operaciones aritméticas  
 c. Propiedad 6 y definición  $a^0 = 1$ .  
 d. Operaciones aritméticas  
 e. Propiedad 6  
 f. Propiedad 5  
 g. Operaciones aritméticas

Razonamiento

6.

Base	Exponente	Potencia
$\frac{4}{5}$	3	$-\frac{125}{23}$
5	-2	$\frac{1}{25}$
-101	0	1

10	3	1 000
25	-2	$\frac{1}{625}$

7. a. 32    b. 1 000 000
- 8.
- a. Negativo      b. Positivo  
 c. Negativo      d. Negativo  
 e. Positivo      f. Negativo
- 9.
- a.  $\frac{5}{3}$       b.  $\frac{1}{\pi^2}$       c. 64

Resolución de problemas

- 10.
- a. 81 días    b. 9 días
- 11.
- $2^{40}$  bytes

## Ampliación conceptual

### Notación científica.

En notación científica se pueden considerar las siguientes propiedades que cumplen las operaciones:

$$(a \cdot 10^n) \cdot (b \cdot 10^m) = a \cdot b \cdot 10^{n+m}$$

$$(a \cdot 10^n) \div (b \cdot 10^m) = a/b \cdot 10^{n-m}$$

$$(a \cdot 10^n)^m = a^m \cdot 10^{n \cdot m}$$

$$a \cdot 10^n + b \cdot 10^n = (a + b) \cdot 10^n$$

$$a \cdot 10^n - b \cdot 10^n = (a - b) \cdot 10^n$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Destacar la importancia de la utilización de la notación científica en las diferentes materias, como Física, Química, Biología, Astrología, etc.
- Realizar ejercicios comparativos de operaciones con números extremadamente grandes o pequeños en la forma normal y utilizando notación científica, para que el estudiante visualice su utilidad.
- Hacer hincapié en los exponentes (positivos y negativos) que permitan expresar un número en notación científica.

## Actividades colaborativas

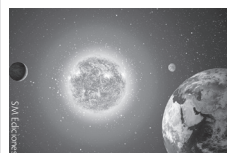
- Realizar grupos de trabajo a los cuales se les asignará unos diez números expresados en notación científica para que los ordenen en forma ascendente o descendente además se puede solicitar realicen las cuatro operaciones básicas aplicando las propiedades.

## 5

### Notación científica

#### Explora

La distancia entre el Sol y la Tierra es de aproximadamente 149 600 000 km.



- Escribe esta distancia en notación científica.

Para escribir la distancia 149 600 000 km usando notación científica, se deben seguir estos pasos:

- Se desplaza la coma decimal en 149 600 000 hacia la izquierda hasta obtener un número mayor o igual a 1 y menor que 10. Se quitan los ceros y se obtiene 1,496.
- Se escribe el producto entre 1,496 y  $10^8$ . El exponente 8 indica las cifras decimales que se desplazó la coma decimal en el paso anterior.

Por lo tanto,  $1,496 \cdot 10^8$  es la distancia del Sol a la Tierra en notación científica.

Un número positivo  $x$  está escrito en **notación científica** si está expresado como:

$$x = a \cdot 10^n \quad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}$$

#### Ejemplo 1

Para escribir el número  $3,13 \cdot 10^{-6}$  en notación decimal se desplazan seis cifras decimales hacia la izquierda como lo indica el exponente de 10.

$3,13 \cdot 10^{-6}$  en notación decimal es 0,000003 13.

### 5.1 Notación científica y operaciones

Para **sumar** y **restar** números escritos en notación científica es necesario que los números tengan la misma potencia de 10.

#### Ejemplo 2

Para sumar  $3,1 \cdot 10^8$  y  $3,38 \cdot 10^7$  se reescribe el número  $3,38 \cdot 10^7$  con potencia  $10^8$ , aumentando en 1 el exponente de 10 y desplazando una cifra a la izquierda en el número decimal, así:  $3,38 \cdot 10^7 = 0,338 \cdot 10^8$ .

Luego, se suman los números decimales y se deja la misma potencia, obteniendo:

$$(3,1 + 0,338) \cdot 10^8 = 3,438 \cdot 10^8$$

Para **multiplicar** y **dividir** números escritos en notación científica se utilizan las propiedades de las potencias.

#### Ejemplo 3

Para calcular el producto  $(1,8 \cdot 10^9) (6,7 \cdot 10^{12})$  se multiplican los números decimales y luego se aplica la propiedad 1 de las potencias para simplificar  $10^9 \cdot 10^{12}$ , entonces el producto se resuelve así:

$$(1,8 \cdot 10^9) (6,7 \cdot 10^{12}) = 12,06 \cdot 10^{21} = 1,206 \cdot 10^{22}$$

#### Actividad resuelta

##### Resolución de problemas

- Un cabello humano tiene un ancho aproximado de  $6,5 \cdot 10^{-5}$  mm. ¿Cuál es el ancho del cabello escrito en notación decimal?

##### Solución:

Para escribir el ancho del cabello  $6,5 \cdot 10^{-5}$  en notación decimal se debe:

- Desplazar cinco cifras decimales a la izquierda como lo indica el exponente de 10 en 6,5.
- Se escribe el número decimal: 0,000065 mm.

#### En la calculadora

##### Sumar números escritos en notación científica

Para sumar números escritos en notación científica se utiliza la tecla **EXP**.

Así, para calcular  $4,2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^{-5}$  se digita:



• Calcula:

$$6,8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^3$$

**Bloque de Álgebra y funciones**

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

2. Escribe cada número en notación científica.

a. 58 934 000 000      b. 0,000 26  
c. 97 000 000 000      d. 396 000 000 000  
e. 0,0419                  f. 634 000 000  
g. 0,000 000 000 325      h. 921 560 000 000  
i. 0,000 000 0659          j. 634 000 000  
k. 0,000002 13              l. 21860 000 000

3. Escribe cada número en notación decimal.

a.  $6,278 \cdot 10^{-10}$       b.  $6 \cdot 10^{10}$   
c.  $9,999 \cdot 10^{-1}$       d.  $2,721 \cdot 10^0$   
e.  $7,1 \cdot 10^{11}$           f.  $8,55 \cdot 10^{-1}$   
g.  $45,678 \cdot 10^{-1}$       h.  $3,19 \cdot 10^0$

4. Utiliza la notación científica, las propiedades de las potencias y la calculadora para obtener el resultado de las siguientes operaciones:

a.  $(7,2 \cdot 10^{-7})(1,806 \cdot 10^{-12})$   
b.  $\frac{(3,542 \cdot 10^{-9})^2}{(5,05 \cdot 10^0)^2}$   
c.  $\frac{(0,000162)(0,01582)}{(594621000)(0,0058)}$   
d.  $\frac{(73,1)(1,6341 \cdot 10^{-7})}{(0,000000019)}$   
e.  $\frac{1,295643 \cdot 10^0}{(3,610 \cdot 10^{-7})(2,511 \cdot 10^0)}$   
f.  $(7,2 \cdot 10^0)(8,61 \cdot 10^0)$

**Comunicación**

5. Completa la Tabla 1.

Objeto	Radio en metros	
	Decimal	N. científica
La Luna	1740 000	
Átomo de plata		$1,25 \cdot 10^{-10}$
Huevo de pez lobo	0,002 8	
Júpiter		$7,149 \cdot 10^7$
Átomo de aluminio	0,000 000 000 182	
Marte		$3,397 \cdot 10^6$

Tabla 1

6. Expresa cada proposición en notación científica.

a. La masa de la Tierra es aproximadamente de 5 970 000 000 000 000 000 kg.  
b. El diámetro de un electrón es de casi 0,000 000 000 000 000 4 cm.  
c. Un año luz equivale a 9 461 000 000 000 km.  
d. La longitud media de un ácaro de polvo es aproximadamente de 0,0001 mm.  
e. El diámetro aproximado del Sol es de 1 400 000 km.


**Razonamiento**

7. Analiza y responde.

a. ¿Cuál de las siguientes medidas no es necesario escribir en notación científica: número de estrellas en una galaxia, número de granos de arena en una playa, velocidad de un carro, o la población de un país?  
b. ¿El número  $0,9 \cdot 10^{-1}$  está escrito correctamente en notación científica? ¿Por qué?  
c. ¿Qué diferencia hay en el exponente de la potencia de 10 cuando escribes un número entre 0 y 1 en notación científica y cuando escribes un número mayor que 1 en notación científica?

**Resolución de problemas**

8. Si la velocidad de la luz es  $3 \cdot 10^8$  m/s, ¿cuánto tarda en recorrer 15 km?  
9. Un bebé recién nacido tiene cerca de 26 000 000 000 células. Un adulto tiene cerca de  $4,94 \cdot 10^{14}$  células. ¿Cuántas células más tiene un adulto que un recién nacido? Escribe la respuesta en notación científica.  
10. El área total de terreno en la Tierra es aproximadamente  $6 \cdot 10^7$  millas cuadradas. El área total de terreno de Australia es cerca de  $3 \cdot 10^6$  millas cuadradas. Aproximadamente, ¿cuántas veces es mayor el área total del terreno en la Tierra que en Australia?  
11. Sara puede digitar cerca de 40 palabras por minuto. ¿Cuántas horas le tomará digitar un texto de  $2,6 \cdot 10^6$  palabras?



Solucionario.

Ejercitación

2.

- a.  $5,8934 \cdot 10^{10}$       b.  $2,6 \cdot 10^{-4}$   
c.  $9,7 \cdot 10^{10}$       d.  $3,96 \cdot 10^{11}$   
e.  $4,19 \cdot 10^{-2}$       f.  $6,34 \cdot 10^8$   
g.  $3,25 \cdot 10^{-10}$       h.  $9,2156 \cdot 10^{11}$   
i.  $6,59 \cdot 10^{-8}$       j.  $6,34 \cdot 10^8$   
k.  $2,13 \cdot 10^{-6}$       l.  $2,186 \cdot 10^{10}$

3.

- a. 0,0000000006278      b. 6 000 000 000 000  
c. 0,000000009999      d. 272 100 000  
e. 710 000 000 000 000      f. 0,00855  
g. 0,00045678              h. 31 900

4.

- a.  $1,30032 \cdot 10^{-20}$       b.  $3,19 \cdot 10^{-102}$   
c.  $7,43 \cdot 10^{-14}$           d.  $6,29 \cdot 10^{38}$   
e.  $1,43 \cdot 10^{19}$             f.  $6,1992 \cdot 10^{44}$

Comunicación

5.

Objeto	N. Decimal	N. Científica
La luna	1 740 000	$1,74 \cdot 10^6$
Átomo de plata	0,000 000 000 125	$1,25 \cdot 10^{210}$
Huevo de pez lobo	0,002 8	$2,8 \cdot 10^{23}$
Júpiter	71 490 000	$7,149 \cdot 10^7$
Átomo de aluminio	0,000 000 000 182	$1,82 \cdot 10^{210}$
Marte	3 397 000	$3,397 \cdot 10^6$

6.

- a.  $5,97 \cdot 10^{24}$       b.  $4 \cdot 10^{-13}$       c.  $9,461 \cdot 10^{12}$   
d.  $1 \cdot 10^{-4}$           e.  $1,4 \cdot 10^6$

Razonamiento

7.

- a. La velocidad de un carro  
b. No, porque 0,9, debe estar entre 1 y 10.  
c. El exponente es negativo si el número está entre 0 y 1; y positivo, cuando si es mayor o igual que 1.

Resolución de problemas

8.

$5 \cdot 10^{-5}$  s.

9.

$4,9374 \cdot 10^{13}$  células

10.

20 veces

11.

Aproximadamente 108 horas

UNIDAD  
**1**

# Evaluación formativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Escriba el símbolo de pertenece ( $\in$ ) o no pertenece ( $\notin$ ), según corresponda cada literal.

Literal	Numero	pertenece ( $\in$ ) o no pertenece ( $\notin$ ) a:				
		$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
a)	-10					
b)	1 000					
c)	$\sqrt[3]{16}$					
d)	0,6					
e)	$\pi/2$					

2. Escriba verdadero (V) o falso (F), según corresponda cada literal.

Literal	Operación	verdadero (V) o falso (F)
a)	$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$	
b)	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = 0$	
c)	$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$	
d)	$\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$	
e)	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$	

3. Analice y subraye cual de las siguientes opciones corresponde al conjunto de los números racionales.

A.  $\{1, 2, 3, \dots\}$

B.  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

C.  $\{\dots, -3, -\frac{7}{3}, -2, -1.5, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \sqrt{4}, 2.6, \pi, \dots\}$

D.  $\{-\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}, e, \pi, \dots\}$

4. Analice y subraye cual de las siguientes opciones corresponde al conjunto de los números reales.

A.  $\{-3, -\frac{7}{3}, -2, -1.5, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \sqrt{4}, 2.6, 3, \dots\}$

B.  $\{\dots, -3, \sqrt{4}, -2, -1.5, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \sqrt{4}, 2.6, \pi, \dots\}$

C.  $\{\dots, -3, -2, -\sqrt{2}, -1, -1, 0, 1, 2, e, 3, \dots\}$

D.  $\{-\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}, 0, e, \pi, \dots\}$

5. Conteste el cero en un número racional o irracional. Y por qué.

6. Escriba si la aproximación es por defecto (D) o por exceso (E), según corresponda a cada literal.

Literal	Número	Aproximación	por defecto (D) o por exceso (E)
a)	0,457	0,5	
b)	1,239	1,23	
c)	12,28	12,3	
d)	0,25267	0,26	
e)	4,1276734	4,12	

7. En que intervalos se puede calcular el entorno.

A. Solo en intervalos abiertos

B. Solo en intervalos cerrados

C. En las dos anteriores

D. En intervalos semiabiertos o semicerrados.

1. Escriba el símbolo de pertenece ( $\in$ ) o no pertenece ( $\notin$ ), según corresponda cada literal.

Literal	Numero	pertenece ( $\in$ ) o no pertenece ( $\notin$ ) a:				
		$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
a)	- 10	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
b)	1 000	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
c)	$\sqrt[8]{16}$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
d)	0,6	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
e)	$\pi/2$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

2. Escriba verdadero (V) o falso (F), según corresponda cada literal.

Literal	Operación	verdadero (V) o falso (F)
a)	$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$	V
b)	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = 0$	F
c)	$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$	V
d)	$\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$	F
e)	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$	V

3. Analice y subraye cual de la siguientes opciones corresponde al conjunto de los números racionales.

C.  $\{ \dots, -3, -\frac{7}{3}, -2, -1.5, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \sqrt{4}, 2.6, \pi, \dots \}$

4. Analice y subraye cual de la siguientes opciones corresponde al conjunto de los números reales.

B.  $\{ \dots, -3, \sqrt{4}, -2, -1.5, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \sqrt{4}, 2.6, \pi, \dots \}$

5. Conteste el cero en un número racional o irracional. Y por qué.

El cero es un número racional, porque el 0 se puede escribir como una fracción cuyo numerador sea 0 y cuyo denominador sea cualquier número entero distinto de 0.

6. Escriba si la aproximación es por defecto (D) o por exceso (E), según corresponda a cada literal.

Literal	Número	Aproximación	por defecto (D) o por exceso (E)
a)	0,457	0,5	E
b)	1,239	1,23	D
c)	12,28	12,3	E
d)	0,25267	0,26	E
e)	4,1276734	4,12	D

7. En que intervalos se puede calcular el entorno.

C. En las dos anteriores

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Reconocer el conjunto de los números racionales, irracionales y reales e identificar sus elementos.	1, 2, 3, 4 y 5			
Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.	6			
Hallar el valor absoluto de números reales y representar un intervalo en R de manera algebraica y gráfica.	8			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

## Ampliación conceptual

### Radicales.

La potenciación y la radicación son operaciones inversas, por ejemplo:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

Como se puede apreciar

$$16 = 2^4$$

Y por ser operaciones inversas la potenciación y la radicación se puede simplificar el índice con el exponente que en este caso es 4.

### Propiedades de los radicales.

1) Raíz de un producto es igual al producto de sus raíces:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

2) Raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3) Raíz de una raíz es igual a multiplicar los índices de las raíces conservando el radicando:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

No existe propiedad de radicales para la adición o sustracción.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recuerde potencias pares e impares.
- Desarrolle el algoritmo de potenciación para poder simplificar el índice con el exponente, tal como se muestra al inicio.
- Realice por lo menos dos ejemplos de cada propiedad de los radicales.

## 6

## Radicales

### Explora

Andrés está hallando los valores de algunas raíces en la calculadora. Cuando digita la  $\sqrt{-8}$ , le aparece en la pantalla "Math Error".



• ¿Cuál es el significado de "Math Error" para esta raíz?

### Ten en cuenta

$$\begin{array}{c} \text{radical} \\ \downarrow \\ \text{índice} \\ \sqrt[n]{a} = b \leftarrow \text{raíz} \\ \uparrow \\ \text{radicando} \end{array}$$

### 6.1 Raíz cuadrada y cúbica de un número real

Cuando Andrés digita  $\sqrt{-8}$  en la calculadora, el aviso "Math Error" que aparece en la pantalla, significa que hay un error matemático o que el resultado no está definido.

En este caso, se deduce que la raíz cuadrada de  $-8$  no existe porque no hay un número real que multiplicado dos veces por sí mismo dé como resultado  $-8$ . Por lo tanto,  $\sqrt{-8}$  no está definida en los números reales.

En general, si  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces la raíz  $n$ -ésima de un número real  $a$  se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^n = a$$

Si  $n$  es par, se debe tener que  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ .

#### Ejemplo 1

Para expresar los números  $\sqrt{81}$ ,  $\sqrt[3]{125}$ ,  $\sqrt[3]{-64}$  y  $\sqrt{-216}$  en forma de potencia se debe realizar este procedimiento:

a. Calcular las raíces de cada expresión radical, así:

$$\sqrt{81} = 9 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-64} = -4 \quad \sqrt{-216} = -6$$

b. Se establece la relación entre los términos de la radicación y la potenciación. Así:

$$\sqrt{81} = 9 \Rightarrow 9^2 = 81 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow 5^3 = 125$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4 \Rightarrow (-4)^3 = -64 \quad \sqrt{-216} = -6 \Rightarrow (-6)^2 = -216$$

#### Ejemplo 2

El número de raíces reales que tiene un número real depende del signo del radicando y de si el índice es par o impar. Ten en cuenta la información de la Tabla 1.

Índice	Radicando	Número de raíces reales	Ejemplos
Tres	Cualquier número real	Una de igual signo que el radicando	$\sqrt[3]{8} = 2$ , porque $2^3 = 8$ $\sqrt[3]{-125} = -5$ , porque $(-5)^3 = -125$ $\sqrt[3]{0} = 0$ , porque $0^3 = 0$
		Positivo	Dos raíces opuestas $\sqrt{49} = \pm 7$ , porque $7^2 = 49$ o $(-7)^2 = 49$
		Nulo	Una raíz nula $\sqrt{0} = 0$ , porque $0^2 = 0$
Dos	Nulo	Una raíz nula $\sqrt{0} = 0$ , porque $0^2 = 0$	
	Negativo	No existen raíces reales $\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}$ , porque no existe un número real que elevado al cuadrado dé $-8$ .	

#### Ejemplo 3

Para resolver la expresión  $\frac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt{1}}{\sqrt{4}}$  se calculan las raíces y luego se realizan las operaciones indicadas, así:

$$\frac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{-3 + 1}{\pm 2}$$

Como en el denominador hay dos resultados posibles, entonces la expresión tiene dos soluciones:  $\frac{-3 + 1}{2} = -1$  o  $\frac{-3 + 1}{-2} = 1$ .

Bloque de Álgebra y funciones

**Destreza con criterios de desempeño:** Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en  $\mathbb{R}$ .

### 6.2 Potencias con exponente fraccionario

Toda potencia con exponente fraccionario puede escribirse como un radical.

Si  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

$$(a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**Ejemplo 4**

Las potencias  $(-3)^{\frac{5}{3}}, (13,4)^{\frac{-7}{2}}$ , escritas como radicales son:

$$(-3)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-3)^5} \quad (13,4)^{\frac{-7}{2}} = \sqrt{13,4^{-7}}$$

**Ejemplo 5**

Para resolver la expresión  $\frac{\sqrt[3]{-8} + (-27)^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{2}}}$  se reescriben las potencias como radicales, luego se calculan las raíces y por último se hacen las operaciones dadas, así:

$$\frac{\sqrt[3]{-8} + (-27)^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-27}}{\sqrt{64}} = \frac{-2 + (-3)}{8} = \frac{-5}{8}$$

**Ejemplo 6**

Identifica los valores de las incógnitas  $x, w$  y  $k$  en las expresiones:  $81^{\frac{1}{4}} = x$ ,  $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$  y  $k^{\frac{2}{3}} = 6$

Se pueden representar primero estas potencias como expresiones radicales. Así:

$$81^{\frac{1}{4}} = x \Rightarrow \sqrt[4]{81} = x; \quad (-27)^{\frac{1}{3}} = -3 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3; \quad k^{\frac{2}{3}} = 6 \Rightarrow \sqrt[3]{k^2} = 6$$

De esta manera es más fácil identificar el valor de las incógnitas. Luego:

$$\sqrt[4]{81} = x \Rightarrow x = 9; \quad \sqrt[3]{-27} = -3 \Rightarrow w = 3; \quad \sqrt[3]{k^2} = 6 \Rightarrow k = 36$$

### 6.3 Radicales equivalentes

Dos o más radicales son **equivalentes** si sus potencias correspondientes tienen la misma base y el mismo exponente.

**Ejemplo 7**

Los radicales  $\sqrt[4]{35^4}$  y  $\sqrt[16]{35^{16}}$  son equivalentes porque al escribirlos en forma de potencia sus bases y exponentes son iguales. Observa:

$$\sqrt[4]{35^4} = 35^{\frac{4}{4}} \quad \sqrt[16]{35^{16}} = 35^{\frac{16}{16}} = 35^{\frac{4}{4}}$$

**Ejemplo 8**

Para encontrar radicales equivalentes a  $\sqrt[3]{5}$  se amplifican o simplifican el índice y el exponente del radicando por un mismo número mayor que 1. Así:

- Si se amplifica por 6, se obtiene el radical equivalente  $\sqrt[18]{5^6}$ .
- Si se simplifica por 2, se obtiene el radical equivalente  $\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

**CULTURA** del Buen Vivir

**La humildad**

Una persona que actúa con humildad es una persona modesta que se preocupa por las personas que están en su alrededor, a pesar de que sus condiciones y talentos sean diferentes.

- Da algunos ejemplos de cómo consideras que actúa una persona humilde.

**Ten en cuenta**

Amplificar significa "multiplicar por" y simplificar "dividir por".

**Razonamiento matemático**

**Radicales equivalentes a  $\sqrt{2}$**

Para hallar radicales equivalentes a  $\sqrt{2}$  se amplifica o simplifica.

- ¿Por qué en este caso no funciona la simplificación?

## Ampliación conceptual

Una potencia de exponente fraccionario se puede transformar en una raíz cuyo Índice es el denominador, donde el radicando es la base elevada al numerador.

Por otro lado, si tenemos  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , entonces  $a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$  que es equivalente a:  $a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recuerde que una potencia de exponente fraccionario es un radical.
- Aclare que el número uno que se encuentre en el numerador del exponente indica el exponente del radicando, mientras que el denominador del exponente indica el índice del radical.
- Realice por lo menos dos ejemplos de potencias con exponentes fraccionarios negativos.
- Recalque que en este caso puede trabajar con propiedades de la potenciación o radiación.

## Actividades colaborativas

- Forme equipos de trabajo de 5 estudiantes para que analicen los siguientes ejercicios  $125^{0,3} + 100^{-0,5}$  y  $64^{-0,16} - 10\,000^{0,25}$ , pídale que obtengan la solución y que expongan en un papelote.
- Puede plantear ejercicios similares para que solución un par de ejercicios cada grupo.

## Ampliación conceptual

Reducción de radicales a índice común.

Si tenemos el producto de radicales con índice y exponente distintos lo podemos expresar así:

$$\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[m \cdot p]{a^{np}} \cdot \sqrt[m \cdot p]{a^{mq}}$$

Como ejemplo tenemos:

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{(2^2)^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^{4+3}} = \sqrt[6]{2^7}$$

Proceso:

- Calculamos el m.c.m., en este caso el m.c.m. de 3 y 2 es 6.
- Dividimos 6 entre 3 y obtenemos 2 como cociente. Este cociente multiplicamos por el o los exponentes de cada uno de los factores del radicando del primer multiplicador.
- Nuevamente dividimos 6 entre 2 y obtenemos 3 como cociente. Este cociente multiplicamos por el o los exponentes de cada uno de los factores del radicando del segundo multiplicador.
- Finalmente aplicamos propiedades de la potenciación.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recuerde que es el mínimo común múltiplo (m.c.m.)
- Recalque los términos que tienen los radicales como son índice, radicando, radical y raíz.
- Explique el algoritmo para obtener radicales con índice común.
- Realice por lo menos dos ejemplos de cada caso de reducción de radicales a índice común

## 6 Radicales

### 6.4 Reducción de radicales a índice común

Reducir a **índice común** dos o más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

#### Ejemplo 9

Para reducir a índice común los radicales  $\sqrt{2m}$ ,  $\sqrt[3]{2^2 \cdot (3t)^2}$ ,  $\sqrt[4]{2f^2 \cdot 3^3}$  se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Se halla el mínimo común múltiplo entre los índices: m.c.m. (2, 3, 4) = 12. Este será el índice común para todos los radicales.
- Se divide el m.c.m. por cada uno de los índices de los radicales y cada resultado se multiplica por los exponentes correspondientes en los radicandos, así:

$$\sqrt[12]{(2m)^6} \quad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8 \cdot t^8} \quad \sqrt[12]{2^3 \cdot f^6 \cdot 3^9}$$

#### Actividad resuelta

Resolución de problemas

- La relación entre el radio  $r$  de una esfera y su volumen  $V$  es  $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ .  
¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un volumen de  $36\pi \text{ cm}^3$ ?

#### Solución:

Para calcular el radio de la esfera, sustituimos el valor del volumen en la expresión dada, escribimos la potencia como un radical y resolvemos, así:

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3(36\pi)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{108\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ cm.}$$

#### Ten en cuenta

Cuando un radical no tiene índice es porque la raíz es cuadrada y su índice es 2.

### MatemaTICS

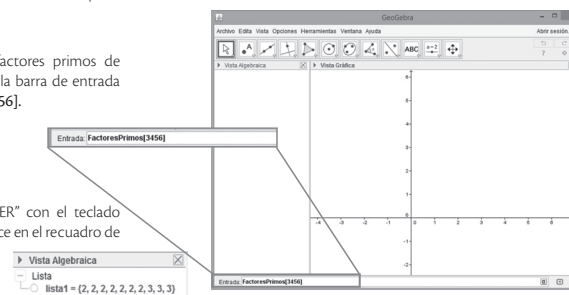
#### Hallar los factores primos de un número en GeoGebra

GeoGebra es un software matemático interactivo libre que tiene el comando "Factores Primos" para hallar los factores primos de cualquier número entero positivo.

- Observa cómo se hallan los factores primos de un número.

- Para obtener los factores primos de 3456 se escribe en la barra de entrada FactoresPrimos[3456].

Luego, se da "ENTER" con el teclado y el resultado aparece en el recuadro de vista algebraica, así:



Solucionario.  
Ejercitación

2. a.  $-1$  b.  $\frac{-2 + 3}{11} = 0,09090\dots$  c. Indefinido  
d.  $-40$  e.  $-8$  f.  $-1 - \sqrt[3]{5} \approx -2,71$

3. a.  $\sqrt[12]{5^3 x^3}$ ,  $\sqrt[5]{5^2 x^2}$  b.  $\sqrt[16]{(7d)^{44}}$ ,  $\sqrt[4]{(7d)^{11}}$

c.  $(27h)^{\frac{12}{14}}$ ,  $(27h)^{\frac{24}{28}}$  d.  $56^{\frac{2}{6}}$ ,  $56^{\frac{3}{9}}$

e.  $\sqrt[4]{\frac{g}{2}}$ ,  $\sqrt[8]{\left(\frac{g}{2}\right)^2}$  f.  $\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ ,  $\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{6}{18}}$

4. a.  $\sqrt[6]{15a^3 x^2}$ ,  $\sqrt[6]{8a^3}$ ,  $\sqrt[6]{9a^4 b^2}$

b.  $\sqrt[12]{125}$ ,  $\sqrt[12]{64}$ ,  $\sqrt[12]{81}$ ,  $\sqrt[12]{49}$

c.  $\sqrt[6]{7a^3 b}$ ,  $\sqrt[6]{125x^3}$ ,  $\sqrt[6]{16x^4 y^2}$

d.  $\sqrt[12]{512a^6 x^9}$ ,  $\sqrt[12]{9a^{10} b^8}$

e.  $\sqrt[15]{27a^6 x^3}$ ,  $\sqrt[15]{32a^5 b^5}$ ,  $\sqrt[15]{5a^3 x^2}$

f.  $\sqrt[18]{64}$ ,  $\sqrt[18]{81}$ ,  $\sqrt[18]{27}$

Razonamiento

5. a.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$  b.  $2^{\frac{1}{2}}$

6.

Raíz	Aproximación	
	Por exceso	Por defecto
$\sqrt{58}$	$7,62^2 = 58,06$	$7,61^2 = 57,91$
$\sqrt{120}$	$10,96^2 = 120,12$	$10,95^2 = 119,90$
$\sqrt[3]{150}$	$5,32^3 = 150,57$	$5,31^3 = 149,72$
$\sqrt{100}$	$10^2 = 100$	$10^2 = 100$

Comunicación

7.

Radical	Potencia
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{7^2}$	$7^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt[3]{4^2}$	$4^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt{11^3}$	$11^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[5]{5^3}$	$5^{\frac{3}{5}}$
$\sqrt[5]{a^2}$	$a^{\frac{2}{5}}$

Resolución de problemas

8. 2,5 s.  
9. 4

■ Actividades colaborativas

- Forme equipos de trabajo de 5 estudiantes para que analicen el siguiente ejercicio  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b}$  y  $\sqrt[3]{a^2}$  pídale que obtengan la solución y que expresen  $\sqrt[3]{b^3}$  pongan en un papelote.
- Puede plantear ejercicios similares para que solucionen un par de ejercicios cada grupo.

Bloque de Álgebra y funciones

**Destreza con criterios de desempeño:** Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en  $\mathbb{R}$ .

**Desarrolla tus destrezas**

Ejercitación

2 Simplifica cada expresión.

a.  $\sqrt{-8} + (-1)^2$  b.  $\frac{-1 - \sqrt{-27}}{\sqrt{121}}$   
c.  $\sqrt{100 - \sqrt{4}}$  d.  $-6\sqrt[4]{100}$   
e.  $\frac{(64)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1}}$  f.  $\sqrt{-1} - 5^{\frac{1}{2}}$

3 Halla dos radicales equivalentes a cada radical.

a.  $\sqrt{5x}$  b.  $\sqrt[3]{(7d)^2}$   
c.  $(27h)^{\frac{1}{2}}$  d.  $56^{\frac{1}{3}}$   
e.  $\sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2}$  f.  $\left(\frac{g}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

4 Reduce a índice común los siguientes radicales:

a.  $\sqrt[4]{150x^2} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt[3]{50^3 b}$   
b.  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$   
c.  $\sqrt[3]{7ab} \cdot \sqrt{5x} \cdot \sqrt[4]{4x^2 y}$   
d.  $\sqrt[3]{87x^4} \cdot \sqrt[4]{30b^2}$   
e.  $\sqrt[3]{30^2 x} \cdot \sqrt[4]{20ab} \cdot \sqrt[5]{50^2 x^2}$   
f.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5}$

**Razonamiento**

5 Determina qué número es más grande en cada par de expresiones. Evita usar calculadora.

a.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$  o  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$   
b.  $2^{\frac{1}{2}}$  o  $2^{\frac{1}{3}}$

6 Calcula la raíz con una aproximación de dos cifras decimales, por exceso y por defecto. Completa la tabla 2.

Raíz	Aproximación	
	Por defecto	Por exceso
$\sqrt{58}$		
$\sqrt{120}$		
$\sqrt[3]{150}$		
$\sqrt{100}$		

Tabla 2

**Comunicación**

7 Escribe los radicales en forma de potencia con exponente fraccionario o viceversa, en la Tabla 3.

Radical	Potencia
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
$\sqrt[3]{7^2}$	
	$4^{\frac{2}{3}}$
	$11^{\frac{3}{2}}$
	$5^{\frac{3}{5}}$
	$a^{\frac{2}{5}}$

Tabla 3

**Resolución de problemas**

8 Cerca de la superficie terrestre, el tiempo  $t$  que tarda un objeto en caer una distancia  $d$ , está dado por la expresión  $t = \frac{1}{4}d^{\frac{1}{2}}$ , donde  $t$  se mide en segundos y  $d$  se mide en pies. Halla el tiempo que tardará un objeto en caer 100 pies.

9 La relación entre el radio  $r$  de una esfera y su área total  $A$  es  $r = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ . ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un área total de  $64\pi$  unidades cuadradas?

27

## Ampliación conceptual

Operaciones con radicales.

Revisar las siguientes reglas.

Regla de Signos de Radicación		
Radicado	índice	Raíz
+	Par	+
	Impar	
-	Par	No existe en los R
	Impar	-

Por otro lado, si se desearía calcular una raíz aproximada de un área, podemos emplear el MÉTODO BABILÓNICO

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Revisar con los estudiantes las reglas de los signos de la radicación
- Realizar ejercicios de potenciación de bases positivas y negativas para aclarar estas definiciones.
- Descomponer radicandos en sus factores y aplicar las propiedades.
- Explicar aproximaciones

## Actividades colaborativas

- Formar grupos de 5 estudiantes y plantear problemas de áreas para solicitar en cálculo de su raíz cuadrada mediante el método Babilónico, y luego pedir que realicen su exposición.

7

## Operaciones con radicales

### Explora

El número aproximado  $C$ , de calorías, diarias que necesita un animal está dado por la expresión  $C = 72\sqrt{m} \cdot m^{\frac{1}{4}}$  donde  $m$  es la masa del animal en kg.



- Halla el número de calorías diarias que necesita un tigre siberiano que tiene una masa de 256 kg.

Para hallar el número de calorías diarias que necesita un tigre siberiano cuya masa es de 256 kg se realiza el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
 C &= 72\sqrt{m} \cdot m^{\frac{1}{4}} \\
 &= 72\sqrt{256} \cdot 256^{\frac{1}{4}} && \text{Se sustituye } m \text{ por } 256. \\
 &= 72\sqrt{256} \cdot \sqrt[4]{256} && \text{Se aplica la definición } (a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \\
 &= 72\sqrt{256^2} \cdot \sqrt[4]{256} && \text{Se reducen los radicales a índice común.} \\
 &= 72\sqrt{256^2} \cdot 256 && \text{Se aplica la propiedad } \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \\
 &= 72\sqrt{256^3} && \text{Se aplica la propiedad 1 de potencias } a^m a^n = a^{m+n}. \\
 &= 72\sqrt{(2^8)^3} && \text{Se escribe 256 en sus factores primos.} \\
 &= 72\sqrt[4]{2^{24}} && \text{Se aplica la propiedad 3 de potencias } (a^m)^n = a^{m \cdot n}. \\
 &= 72 \cdot 2^6 && \text{Se simplifica el radical.} \\
 &= 4608 && \text{Se hace la multiplicación.}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de calorías diarias que necesita el tigre es de 4608.

Para **simplificar** expresiones con radicales donde intervengan productos, cocientes o potencias se aplican las propiedades que se definen en la Tabla 1, donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ .

	Propiedad	Ejemplos
1	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-27 \cdot 8} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{8} = (-3)(2) = -6$
2	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ; $b \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{3}{2}$
3	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}} = \sqrt[12]{729} = 3$
4	$\sqrt[n]{a^m} = a$ si $n$ es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ y $\sqrt[3]{2^3} = 2$
5	$\sqrt[n]{a^m} =  a $ si $n$ es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} =  -3  = 3$

Tabla 1

### Actividad resuelta

#### Resolución de problemas

1 El área de una ventana cuadrada se expresa mediante la fórmula

$$A = \frac{1,44x^{16}}{w^8}. \text{ ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana?}$$

#### Solución:

Como el área de un cuadrado de lado  $l$  es la potencia  $P$ , entonces  $l = \sqrt{\frac{1,44x^{16}}{w^8}}$ .

Al simplificar esta expresión según las propiedades de los radicales, se obtiene:

$$l = \sqrt{\frac{1,44x^{16}}{w^8}} = \frac{\sqrt{1,44x^{16}}}{\sqrt{w^8}} = \frac{\sqrt{1,44} \cdot \sqrt{x^{16}}}{\sqrt{w^8}} = \frac{1,2x^8}{w^4}.$$

Bloque de Álgebra y funciones

**Destrezas con criterios de desempeño:**

- Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en R.
- Resolver operaciones con radicales en R.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Realiza las siguientes operaciones entre radicales.

a.  $\sqrt[10]{16^{10}} \cdot \sqrt[12]{8^{12}} \cdot \sqrt[10]{16^{10}}$

b.  $\sqrt[3]{\sqrt{16x^6}}$

c.  $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{3}}$

d.  $\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{f^6}}}{\sqrt[4]{f}}$

e.  $\sqrt[3]{a^3b} \cdot \sqrt[3]{a^3b}$

f.  $\sqrt[4]{x^7} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{(x^3)^3} \cdot \sqrt[4]{(x^3)^4}$

g.  $\frac{\sqrt[3]{t^3h^7}}{\sqrt[3]{th^2}}$

h.  $\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{16}}$

3 Simplifica cada expresión utilizando las propiedades de los radicales y eliminando los exponentes negativos.

a.  $\frac{\sqrt[3]{g^{15}b^{50}} \cdot \sqrt[4]{(-81)^4 b^{-20}}}{\sqrt[3]{g^3}}$

b.  $\sqrt[3]{\frac{216x^{-8}y^{-12}}{x^{16}}}$

c.  $\sqrt{196\sqrt[3]{a^{18}b^{12}}}$

d.  $\sqrt[4]{\sqrt{x^{16}c^{24}m^{-16}}}$

e.  $\sqrt[3]{\frac{128h^{15}f^{-10}}{4f^{20}}}$

f.  $\sqrt{\frac{1}{64}m^{-10}b^{14}} \cdot \sqrt[3]{-64m^9b^{-5}}$

g.  $\sqrt[3]{\frac{3125k^{25}g^{60}}{k^5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{-243s^{10}}{k^{-5}}}$

Razonamiento

4 Explica si cada igualdad es falsa o verdadera.

a.  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b.  $(4+3)\sqrt{2} = 4+3\sqrt{2}$

c.  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

d.  $(4+3)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

5 Encuentra el error en la siguiente simplificación y luego realizala de forma correcta.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{w^{30}g^{-90}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{w^{15}g^{-120}}}} \cdot \sqrt{-32768} &= \frac{\sqrt[3]{w^{30}g^{-90}}}{\sqrt[3]{w^{15}g^{-120}}} \cdot \sqrt{-32768} \\ &= \frac{\sqrt[3]{-32768 \cdot w^{30}g^{-90}}}{\sqrt[3]{w^{15}g^{-120}}} = \sqrt[3]{\frac{-32768 \cdot w^{30}g^{-90}}{w^{15}g^{-120}}} \\ &= \sqrt[3]{(-2)^{15} \cdot w^{15}g^{-210}} = \frac{-2w}{g^{14}} \end{aligned}$$

Comunicación

6 Analiza y responde.

Para introducir coeficientes bajo un mismo radical se eleva el coeficiente al número correspondiente del índice del radical. Así, en la expresión  $\frac{2}{3}ab^2\sqrt[3]{c^3}$  al introducir el coeficiente  $\frac{2}{3}ab^2$  dentro del radical se obtiene  $\sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}a^3b^6c^3}$ . Introduce los coeficientes en las siguientes expresiones.

a.  $0,2xy^3z^2\sqrt[3]{200w}$

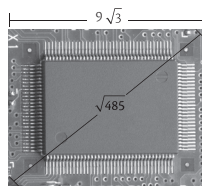
b.  $\frac{5m^2n^4}{4p^{24}}\sqrt[4]{\frac{4m}{p}}$

c.  $\frac{3}{5}h^3g^2\sqrt[3]{g^3h}$

d.  $\frac{1}{2}m^2h^3\sqrt[3]{c^3}$

Resolución de problemas

7 Un microchip rectangular mide  $9\sqrt{3}$  de largo y su diagonal mide  $\sqrt{485}$ . ¿Cuál es el área del microchip?



8 Antes de determinar la dosis de una droga para un paciente, los doctores a veces calculan su área de superficie corporal (BSA). La fórmula para hallarla es  $\sqrt{\frac{w \cdot h}{3600}}$ , donde  $w$  es el peso en kg y  $h$  es la altura en cm. Si un paciente pesa 80 kg y tiene un BSA de  $\sqrt{\frac{35}{9}}$  m<sup>2</sup>. ¿Cuál es su altura en metros?

Solucionario.

Ejercitación

2.

a.  $2^{21} = 2097152$       b.  $\sqrt[6]{16x^6} = \sqrt[6]{16x} \approx 1,59x$

c.  $\sqrt[6]{3} \approx 1,2$       d.  $\sqrt[5]{f}$       e.  $a^2\sqrt[3]{b^2}$

f.  $\sqrt[84]{x^{521}}$       g.  $-th^2\sqrt{t}$       h.  $4\sqrt[6]{2} \approx 4,49$

3.

a.  $-81g^2b^5\sqrt[20]{g^{17}}$       b.  $\frac{6}{x^8y^4}$       c.  $14a^3b^2$

d.  $\frac{x^2c^3}{m^2}$       e.  $\frac{2h^3}{f^6}$       f.  $-\frac{b^5}{2m^2}$       g.  $-15k^5s^{14}$

Razonamiento

4 a. Falsa, b. Falsa, c. Verdadera, d. Verdadera

5 El error está en  $\sqrt[15]{(-2)^{15} \cdot w^{15}g^{-210}}$  y la simplificación es:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[15]{\sqrt[3]{w^{30}g^{-90}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[15]{w^{15}g^{-120}}}} \cdot \sqrt{-32768} &= \frac{\sqrt[15]{w^{30}g^{-90}}}{\sqrt[15]{w^{15}g^{-120}}} \cdot \sqrt{-32768} \\ &= \frac{\sqrt{-32768 \cdot w^{30}g^{-90}}}{\sqrt[15]{w^{15}g^{-120}}} = \sqrt[15]{\frac{-32768 \cdot w^{30}g^{-90}}{w^{15}g^{-120}}} \\ &= \sqrt[15]{(-2)^{15} \cdot w^{15}g^{30}} = -2wg^2 \end{aligned}$$

Comunicación

6.

a.  $\sqrt[3]{1,6x^3y^9z^{15}w}$       b.  $\sqrt[3]{\frac{125m^7n^{12}}{16p^{73}}}$

c.  $\sqrt[5]{\frac{243g^{13}h^{16}}{3125}}$       d.  $\sqrt[4]{\frac{m^8 \cdot h^{12} \cdot c^3}{16}}$

Resolución de problemas

7. El área del microchip es  $99\sqrt{6}$

8. La altura del paciente es 1,75 m.

## Ampliación conceptual

Radicales semejantes – adición y sustracción.

Para reducir radicales se debe descomponer en sus factores primos, como por ejemplo:

$$\sqrt{120} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{30}$$

Proceso:

- Descomponemos al radicando en sus factores primos, en nuestro caso tenemos:

Radicando	Factores primos
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

- Como se trata de una raíz cuadrada escribimos los factores que se repiten en potencia par y los que no tiene potencia los conservamos. Así:

$$12 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recalque a sus estudiantes que la descomposición de los radicandos se hace mediante factores primos.
- Aclare que los radicales semejantes tienen el mismo índice e igual radicando.
- Ejemplifique radicales que no son semejantes.
- Resuelva por lo menos dos ejercicios de suma y resta de radicales, explicando el algoritmo para determinar la solución.

## 8

### Radicales semejantes

Bloque de Álgebra y funciones

#### Explora

A Juanita le piden reducir a radicales semejantes las expresiones  $\sqrt[3]{875}$  y  $\sqrt[3]{448}$ .



• ¿Cuál es el procedimiento para reducir estas expresiones a radicales semejantes?

#### Razonamiento matemático

“Equivalente” o “semejante”

Al simplificar las expresiones

$$-\frac{3}{4}\sqrt{(5)^4 h} \text{ y } \frac{3}{4}\sqrt{(-5)^4 h}$$

¿Puedes concluir que son equivalentes o semejantes? ¿Por qué?

#### 8.1 Reducción a radicales semejantes

Para reducir a radicales semejantes las expresiones  $\sqrt[3]{875}$  y  $\sqrt[3]{448}$ , se realiza el siguiente procedimiento:

- Los radicandos se expresan en sus factores primos:

$$\sqrt[3]{875} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{448} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 7}$$

- Se simplifican las expresiones aplicando las propiedades 1 y 4 de los radicales.

$$\sqrt[3]{5^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2^6 \cdot 7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{7} = 4\sqrt[3]{7}$$

Las expresiones simplificadas  $5\sqrt[3]{7}$  y  $4\sqrt[3]{7}$  son radicales semejantes porque tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Dos o más radicales son semejantes si al simplificarlos tienen el mismo índice y el mismo radicando.

#### Ejemplo 1

Para determinar si las expresiones radicales:

$$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{625x^6}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{1080}, -\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715x^9} \text{ y } \frac{3}{8}\sqrt[3]{16875}$$

son semejantes, se simplifican como se observa en la Tabla 1.

$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{625x^6}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{1080}$	$-\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715x^9}$	$\frac{3}{8}\sqrt[3]{16875}$
$= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{5^3 \cdot 5 \cdot x^6}$	$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5}$	$= -\frac{1}{7}\sqrt[3]{7^3 \cdot 5 \cdot x^9}$	$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3 \cdot 5}$
$= -\frac{3}{5} \cdot 5 \cdot x^2 \sqrt[3]{5}$	$= \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3\sqrt[3]{5}$	$= -\frac{1}{7} \cdot 7 \cdot x^3 \sqrt[3]{5}$	$= \frac{3}{8} \cdot 3 \cdot 5\sqrt[3]{5}$
$= -3x^2 \sqrt[3]{5}$	$= 9\sqrt[3]{5}$	$= -x^3 \sqrt[3]{5}$	$= \frac{45}{8}\sqrt[3]{5}$

Tabla 1

Una vez simplificadas las expresiones se observa que todas comparten  $\sqrt[3]{5}$ . Por lo tanto son semejantes.

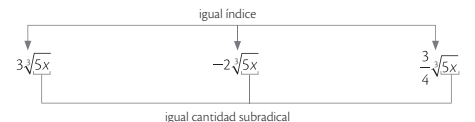
#### Ejemplo 2

Las expresiones radicales  $-\frac{1}{5}\sqrt{700m^{10}}$  y  $\sqrt{2187m}$  no son semejantes porque

al simplificarlas se obtiene  $-2\sqrt{7}$  y  $\sqrt{3m}$  y estos radicales no comparten el mismo radicando.

#### Ejemplo 3

Para comprobar si dos radicales son semejantes se pueden comparar cada uno de sus términos. Observa:



Destreza con criterios de desempeño: Operar con radicales semejantes en la resolución de ejercicios y problemas.

### 8.2 Adición y sustracción de radicales

Para sumar o restar radicales se reducen a radicales semejantes y se operan los coeficientes.

#### Ejemplo 4

Para realizar las operaciones indicadas en la expresión  $\sqrt[3]{40h^9} + \sqrt[3]{1029m^6} - \sqrt[3]{625h^9}$  se reduce a radicales semejantes y se opera, así:  
 $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5 \cdot h^9} + \sqrt[3]{3 \cdot 7^3 \cdot m^6} - \sqrt[3]{5^3 \cdot 5 \cdot h^9} = 2h^3 \sqrt[3]{5} + 7m^2 \sqrt[3]{3} - 5h^3 \sqrt[3]{5}$   
 $= (2h^3 - 5h^3) \sqrt[3]{5} + 7m^2 \sqrt[3]{3} = -3h^3 \sqrt[3]{5} + 7m^2 \sqrt[3]{3}$

#### Ejemplo 5

El resultado de la suma  $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$  es:  
 $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125} = 2\sqrt{5} + \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = (2 + 1 + 10)\sqrt{5} = 13\sqrt{5}$

#### Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 El perímetro del trapecio (Figura 1) está determinado por la expresión  $5\sqrt{2x} + 7\sqrt{3x^2}$  si la base mayor es el doble de la base menor. Determina la expresión de las medidas de sus bases.



**Solución:**  
 El perímetro es la suma de las medidas de los lados. Para determinar la medida de las bases, se plantea una ecuación donde  $b$  es la medida de la base menor:

$$\sqrt{3x^2} + 2\sqrt{2x} + 2b + b = 5\sqrt{2x} + 7\sqrt{3x^2}$$

Si se despeja  $b$  se obtiene:

$$b = \sqrt{2x} + 2\sqrt{3x^2}$$

Por lo tanto, la expresión de la base menor es  $\sqrt{2x} + 2\sqrt{3x^2}$  y de la base mayor es el doble de esta, es decir:  $2(\sqrt{2x} + 4\sqrt{3x^2}) = 4\sqrt{2x} + 8x\sqrt{3}$ .

#### Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Realiza las operaciones indicadas.

- a.  $\frac{1}{4}\sqrt{80} - \frac{1}{6}\sqrt{63} - \frac{1}{9}\sqrt{180}$
- b.  $0,5x\sqrt{y} + 1,8\sqrt{x^2y} - 0,7x^{-1}\sqrt{x^4y}$
- c.  $3\sqrt[3]{2x^2} - 7\sqrt[3]{16x^2} + 5\sqrt[3]{54x^2}$
- d.  $\frac{2}{3}b\sqrt[4]{a^6b^4} - \frac{5}{6}a\sqrt[4]{a^3b^8} + \frac{3}{4}b^{-1}\sqrt[4]{a^8b^{12}}$
- e.  $3\sqrt[3]{3a}(4\sqrt[4]{7a^2} + 5\sqrt[4]{7a^2})$
- f.  $-4 \cdot \sqrt{49b^{-4}} + \sqrt{81b^{-4}} + \sqrt{144b^{-4}}$

Razonamiento

- 3 La expresión  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  se llama **desigualdad triangular**. Encuentra un valor de  $a$  y otro de  $b$  para que se cumpla dicha desigualdad.

Resolución de problemas

- 4 La medida del lado de un cuadrado está dado por la expresión  $g\sqrt{g^3} - 3\sqrt{j^5}$  dm. ¿Cuál es el área del cuadrado?
- 5 ¿Cuál es el perímetro de un terreno rectangular cuyos lados son  $\sqrt[3]{32c}$  m y  $\sqrt[3]{243c}$  m?
- 6 ¿Cuál es el perímetro total de un paralelogramo oblicuo, cuya base mide  $2\sqrt[3]{54x^2}$  cm, y cuyo lado oblicuo mide  $3\sqrt[3]{54x^2}$  cm?

### Solucionario.

#### Ejercitación

2.  
 a.  $\frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}}{6}$  b.  $1,6x\sqrt{y}$  c.  $-668\sqrt[3]{2x^2}$   
 d.  $\frac{7}{12}ab^2\sqrt[4]{a^2}$  e.  $27a\sqrt[3]{21}$  f.  $-\frac{7}{b^2}$

#### Razonamiento

3. Para todos los números reales positivos.

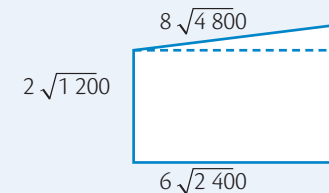
#### Resolución de problemas

- 4. El área del cuadrado es  $g^5 - 6g\sqrt{g^3j^5} + 9j^5$ .
- 5. El perímetro de un terreno rectangular es  $10\sqrt[5]{c}$
- 6. El perímetro de paralelogramo oblicuo es  $10\sqrt[3]{54x^2}$ .

### ■ Actividades colaborativas

1. Plantee la siguiente situación.

El terreno del Sr. Acosta tiene la siguiente forma:



Desea construir una casa que ocupe la mitad del terreno y que tenga una forma rectangular. ¿Cuál es el perímetro y el área que ocupará la casa?

Para solucionar este problema forme grupos de 4 o 5 estudiantes, los mismos que presentarán un papelote y expondrán su proceso.

2. Puede elaborar otros gráficos para que cada grupo tenga un problema diferente.

## Ampliación conceptual

### Racionalización.

Para racionalizar monomios se necesita de la multiplicación de radicales, como por ejemplo:

$$\sqrt{5x} \cdot \sqrt{5x} = \sqrt{(5x)^2} = 5x$$

$$\sqrt[3]{2y} \cdot \sqrt[3]{4y^2} = \sqrt[3]{8y^3} = \sqrt[3]{(2y)^3} = 2y$$

Como se puede observar la idea central es multiplicar por un radical que ayude a que el radicando obtenga exponente e índice iguales para su simplificación.

También se puede racionalizar mediante el Producto Notable de la suma por la diferencia que tiene la forma  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$  llamado también producto de dos binomios conjugados.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recalque a sus estudiantes que la racionalización de monomios consiste en obtener una expresión algebraica equivalente donde el denominador no involucra radicales.
- Aclare que racionalizar monomios es una multiplicación de radicales, mientras que la racionalización de binomios implica la aplicación de productos notables.
- Resuelva por lo menos dos ejercicios de racionalización de monomios y por lo menos de dos de racionalización de binomio.
- Fomente la actuación en clase planteando un ejercicio e indique que este tiene una calificación extra que queda a su criterio.

## 9

### Racionalización

#### Explora

Cuando una fracción tiene radicales en el denominador siempre es posible expresarla como una fracción equivalente sin radicales en él.

Para la expresión radical:

$$\frac{34}{\sqrt{5m}}$$

- Halla una expresión equivalente a esta, cuyo denominador no tenga radicales.

Para eliminar el radical en el denominador de la expresión  $\frac{34}{\sqrt{5m}}$ , se debe amplificar la fracción por  $\sqrt{5m}$ , así:

$$\frac{34}{\sqrt{5m}} \cdot \frac{\sqrt{5m}}{\sqrt{5m}} = \frac{34\sqrt{5m}}{5m}$$

De esta manera, se elimina el **radical de índice 2** en el denominador y se obtiene:

$$\frac{34\sqrt{5m}}{5m} \text{ que es una expresión equivalente a } \frac{34}{\sqrt{5m}}.$$

La **racionalización** es un proceso en el que se elimina la parte radical en el denominador de una expresión.

#### Ejemplo 1

Para racionalizar la expresión  $\frac{3h}{\sqrt[3]{9h}}$ , donde el **índice del radical es 3**, se amplifica la fracción por un factor que elimine el radical en el denominador. Es decir, se busca un **factor racionalizante** que multiplicado por  $\sqrt[3]{9h} = \sqrt[3]{3^2h}$  dé como resultado  $3h$ . En este caso el factor es  $\sqrt[3]{3h^2}$  porque  $\sqrt[3]{3^2h} \cdot \sqrt[3]{3h^2} = 3h$ . Al racionalizar la expresión se obtiene:

$$\frac{3h}{\sqrt[3]{3^2h}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3h^2}}{\sqrt[3]{3h^2}} = \frac{3h \cdot \sqrt[3]{3h^2}}{3h} = \sqrt[3]{3h^2}$$

#### Ejemplo 2

Para racionalizar la expresión  $\frac{3x}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$ , donde el denominador es un binomio, la fracción se amplifica por el **conjugado** del denominador, es decir, por el binomio con signo opuesto en el segundo término:  $\sqrt{x} - \sqrt{2}$ . La racionalización se hace así:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} &= \\ \frac{3x(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{2})^2} &= \\ \frac{3x(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{x - 2} & \end{aligned}$$

#### Actividad resuelta

Razonamiento

- ¿Cómo se racionaliza la expresión  $\frac{b^m}{\sqrt[m]{a^n}}$ , donde el radical tiene índice entero positivo  $m$ ?

**Solución:**

La racionalización de la expresión es:  $\frac{b^m}{\sqrt[m]{a^n}} \cdot \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{b^m \cdot \sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}$

Bloque de Álgebra y funciones

**Destreza con criterios de desempeño:** Reescribir expresiones numéricas o algebraicas con raíces en el denominador utilizando propiedades en  $\mathbb{R}$  (racionalización).

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe el conjugado de cada expresión.

- a.  $7\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$
- b.  $-5\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$
- c.  $\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}$
- d.  $1 + \sqrt{m+1}$
- e.  $-\sqrt{x} - 3$
- f.  $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

3 Racionaliza cada expresión.

- a.  $\frac{4ab}{\sqrt[3]{x^3y^2z^2b}}$
- b.  $\frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$
- c.  $\frac{m^3n\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2^2m^2n^4x}}$
- d.  $\frac{\sqrt{m+1}}{1 - \sqrt{m+1}}$
- e.  $\frac{3ab^2}{\sqrt{ab^5}}$
- f.  $\frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$
- g.  $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$
- h.  $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}}$
- i.  $\frac{3 - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2}$
- j.  $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$

Razonamiento

4 Halla el factor racionalizante para cada radical.

- a.  $\sqrt{\frac{x^2y}{m^2}}$
- b.  $\sqrt{\frac{5}{49}m^2np^2}$
- c.  $\sqrt[3]{\frac{5}{3}a^6b}$
- d.  $\sqrt[3]{5x}$
- e.  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}m^2n}$
- f.  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}xy^3z^2}$
- g.  $\sqrt[3]{4wz^2x}$
- h.  $\sqrt[3]{4wz^2}$

5 Relaciona cada binomio con su conjugado.

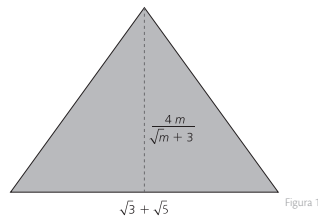
- a.  $\sqrt{5} + 3$
- b.  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$
- c.  $5 - \sqrt{3}$
- d.  $\sqrt{2a} + \sqrt{3b}$
- e.  $\sqrt{2a} - 3b$
- f.  $2a - \sqrt{3b}$
- g.  $\sqrt{3x} - 2\sqrt{y}$
- 1.  $5 + \sqrt{3}$
- 2.  $\sqrt{2a} - \sqrt{3b}$
- 3.  $2a + \sqrt{3b}$
- 4.  $\sqrt{5} - 3$
- 5.  $2\sqrt{y} + \sqrt{3x}$
- 6.  $\sqrt{2a} + 3b$
- 7.  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

6 Escribe F si la proposición es falsa o V si es verdadera.

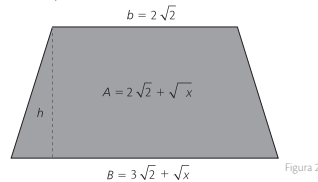
- a. Racionalizar significa eliminar todos los radicales de una expresión.
- b. Solo las expresiones con radicales de índice 2 se pueden racionalizar.
- c. El factor racionalizante es una expresión que permite eliminar un radical.
- d. El conjugado de un binomio es otro binomio con signos negativos.
- e. El factor racionalizante de  $\sqrt[3]{\frac{6^2f^3x}{16dm^2}}$  es  $\sqrt[3]{\frac{6^6f^5x}{16d^3m^6}}$ .
- f. El conjugado de  $-3x + \sqrt{2}$  es  $3x - \sqrt{2}$ .
- g. La expresión  $\frac{3}{\sqrt{3}}$  es equivalente a  $\sqrt{3}$ .

Resolución de problemas

7 Calcula el área del triángulo de la Figura 1 y racionaliza el resultado que obtengas.



8 En la Figura 2 se observa un trapecio con base mayor B, base menor b y área A. ¿Qué expresión determina la altura h del trapecio? Racionaliza el resultado.



9 El periodo T de un péndulo de longitud l está dado por la expresión:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  donde g es la constante gravitacional de valor  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Según esto, ¿cuál es el periodo de un péndulo de 1 m de longitud? Racionaliza la respuesta.

Solucionario.

Ejercitación

- 2. a.  $7\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$  b.  $-5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$  c.  $\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}$
- d.  $1 - \sqrt{m+1}$  e.  $-\sqrt{x} + 3$  f.  $2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

- 3. a.  $\frac{4a \cdot \sqrt[3]{xb^2}}{xyz}$
- b.  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$
- c.  $\frac{m\sqrt{x}\sqrt[5]{2m^3n^4x^4}}{2nx}$
- d.  $-\frac{\sqrt{m+1} + m + 1}{m}$
- e.  $\frac{3\sqrt{ab}}{b}$
- f.  $x(\sqrt{x^2+1} + x)$
- g.  $\frac{(\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x})}{1-x}$
- h.  $\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2})$
- i.  $\frac{(3-\sqrt{a})(\sqrt{a}+2)}{a-4}$
- j. 1

Razonamiento

- 4. a.  $\sqrt[3]{\frac{xy^2}{m}}$  b.  $\sqrt{5n}$  c.  $\sqrt[3]{\frac{5}{3}b}$  d.  $\sqrt[3]{5^2x^2}$
- e.  $\sqrt[3]{\frac{1}{4}mn^2}$  f.  $\sqrt[3]{\frac{9}{2}x^2z}$  g.  $\sqrt[3]{2\pi x^2}$  h.  $\sqrt[3]{2w^2}$

- 5. a.  $\sqrt{5} - 3$  b.  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$  c.  $5 + \sqrt{3}$  d.  $\sqrt{2a} - \sqrt{3b}$
- e.  $\sqrt{2a} + 3b$  f.  $2a + \sqrt{3b}$  g.  $2\sqrt{y} + \sqrt{3x}$

6. a. F, b. F, c. V, d. F, e. V, f. F, g. V

Resolución de problemas

- 7. El área del triángulo es  $\frac{2m(\sqrt{m}-3)(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{m-9}$
- 8.  $h = \frac{2(2\sqrt{2} + \sqrt{x})(5\sqrt{2} - \sqrt{x})}{50 - x}$
- 9.  $T = \frac{\pi\sqrt{10}}{5}$

## Evaluación sumativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Toda expresión de la forma  $\frac{a}{b}$ , en la cual a y b son número enteros con b distinto de cero se llama:

- A. cociente
- B. números enteros
- C. expresión fraccionaria
- D. números naturales

2. Cuando en una fracción, el numerador y el denominador son números primos entre si, decimos que la fracción es:

- A. denso
- B. irreducible
- C. reducible
- D. equivalente

3. El conjunto de los números racionales es denso porque:

- A. siempre se podrá encontrar entre dos números otro número racional.
- B. no siempre se podrá encontrar entre dos números otro número racional.
- C. el cociente es otro número racional.
- D. no se puede expresar como fracción.

4. De la siguiente fracción  $\frac{3}{5}$  escribe:

- A. Una fracción equivalente con denominador 20 \_\_\_\_\_
- B. Una fracción equivalente con numerador 21 \_\_\_\_\_
- C. Una fracción equivalente con numerador 45 \_\_\_\_\_
- D. Una fracción equivalente con denominador 40 \_\_\_\_\_

5. Completen con <, > o =, según corresponda a cada literal:

A.  $\frac{7}{5}$    $\frac{5}{6}$

B.  $-\frac{7}{5}$    $-\frac{5}{6}$

C.  $\frac{1}{7}$    $-\frac{1}{5}$

D.  $\frac{9}{2}$    $\frac{18}{4}$

E.  $-\frac{4}{3}$    $\frac{6}{7}$

6. Pasar a fracción las siguientes expresiones decimales.

A. 0,25 =

B. 1,256 =

C.  $8,\overline{12}$  =

D.  $0,\overline{002}$  =

7. ¿Cuánto valen los  $\frac{3}{8}$  de un terreno de 352 m<sup>2</sup> si se piden \$ 145 por m<sup>2</sup>?

A. \$19140                      B. \$19410

C. \$19410                      D. \$19410

8. Escriba tres ejemplos de números irracionales.

9. Calcule el entorno del intervalo  $E_{(-2,4)}$  y muestre su gráfica.

10. Completa con = o ≠ según corresponda, explica el caso en que sea distinto.

A.  $(\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^{-3} \square (\frac{1}{2})^6$       B.  $(\frac{3}{4})^3 \div (\frac{3}{4})^{-3} \square (\frac{3}{4})^6$

C.  $(\frac{7}{5})^3 \square (\frac{7}{5})^6$                       D.  $(3 - \frac{1}{4})^3 \square 3^3 - (\frac{1}{4})^3$

11. Aplique Notación científica y propiedades de potenciación en

$\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$  para que seleccione su solución.

A.  $1,2 \cdot 10^3$

B.  $1,5 \cdot 10^2$

C.  $5,1 \cdot 10^{-2}$

D.  $2,5 \cdot 10^3$

12. Ejecute propiedades de potenciación y radicación en  $\sqrt{\frac{7}{3} - 0,1} \cdot \frac{50}{3}$  para que seleccione la respuesta:

A.  $\frac{5}{3}$

B.  $\frac{10}{3}$

C.  $2\frac{5}{3}$

D.  $\frac{4}{3}$

13. Aplique racionalización de monomio en  $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$  para que seleccione la respuesta.

A.  $\sqrt{5}$

B.  $\sqrt{15}$

C.  $\sqrt{3}$

D.  $2\sqrt{3}$

14. Aplique racionalización de binomios en  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}}$  para que seleccione la respuesta.

A.  $\frac{\sqrt{2x} - x}{2 - x}$

B.  $\frac{\sqrt{2x} - x}{\sqrt{2} + \sqrt{x}}$

C.  $\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{x}}{2 + x}$

D.  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{2 + x}$

UNIDAD

2

Evaluación diagnóstica

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

- Identifica la respuesta correcta.
  - A. Todo número real es un número racional.
  - B. Todo número racional es número natural.
  - C. Raíz de cuatro es un número racional.
  - D.  $\frac{2}{0}$  es un número racional
- El conjunto de los número reales está formado por
  - A. Enteros y racionales
  - B. Racionales e irracionales
  - C. Enteros e irracionales
  - D. Naturales y racionales
- Ordena de mayor a menor los siguientes números:  $-2; -3; -\frac{3}{2}; -\pi$ .
  - A.  $-2; -3; -\frac{3}{2}; -\pi$
  - B.  $-2; -\pi; -3; -\frac{3}{2}$
  - C.  $-\frac{3}{2}; -2; -3; -\pi$
  - D.  $-2; -3; -\pi; -\frac{3}{2}$

- La fracción que genera el decimal:  $0,\overline{27}$ 
  - A.  $\frac{3}{11}$
  - B.  $\frac{3}{12}$
  - C.  $\frac{27}{100}$
  - D.  $\frac{3}{7}$
- La fracción que genera el decimal  $0,322\overline{5}$  es:
  - A.  $\frac{3\ 193}{9\ 000}$
  - B.  $\frac{3\ 193}{9\ 900}$
  - C.  $\frac{3\ 225}{10\ 000}$
  - D.  $\frac{30\ 193}{9\ 900}$
- Resuelve las siguientes operaciones:  
 $(0,5 + 2\sqrt{3} - \frac{3}{7} - 2\sqrt{2})$ 
  - A.  $\frac{71}{100}$
  - B.  $\frac{8}{63}$
  - C.  $\frac{7}{62}$
  - D.  $\frac{8}{60}$
- Representa en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados  $A(-1, 1); B(-1, -1); C(2, 1); A(1, 2)$  y al unirlos con una línea, se obtiene
  - A. Un cuadrado
  - B. Un rectángulo
  - C. Un rombo
  - D. Un cuadrilátero

- Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen en la gráfica.
    - A.  $A(0,2); B(3,1); C(1,3); D(2,0)$
    - B.  $A(0,2); B(3,1); C(3,1); D(0,2)$
    - C.  $A(1,2); B(3,1); C(3,1); D(2,0)$
    - D.  $A(0,2); B(1,3); C(3,1); D(2,0)$
- 
- Une con una línea los puntos del ejercicio anterior y decide la respuesta correcta.
    - A. La figura formada es un rectángulo porque tiene lados paralelos
    - B. La figura formada es un rectángulo porque tiene ángulos rectos
    - C. La figura formada es un rectángulo porque tiene lados paralelos y ángulos rectos
    - D. La figura formada es un rectángulo porque tiene lados paralelos y lados iguales

## Propósito de la unidad

### Bloque de álgebra y funciones:

El propósito de esta unidad es, que el estudiante tenga una idea clara sobre función, esto es, dominio, recorrido, formas de expresión de una función. En lo referente a la función lineal, es necesario que el estudiante pueda expresar la función lineal en sus diferentes formas, así como también calcular la ecuación de la función lineal o afín a través del conocimiento de distintos parámetros tales como: dos puntos, punto – pendiente, etc.

Una vez que el estudiante pueda expresar y calcular la ecuación de la función lineal y afín, es de suma importancia que se realicen algunas aplicaciones, pueden ser estas de modelación o reconocimiento de las propiedades de las rectas perpendiculares y paralelas.

### Bloque de geometría y medida:

Paralelamente al desarrollo del estudio de la función lineal, hay que retroalimentar algunos conceptos básicos de geometría, punto, recta y par ordenando. Estos conceptos básicos juegan un papel primordial en el estudio de la función lineal y afín.

### Evaluaciones

La evaluación en esta unidad, está constituida por una evaluación formativa y una evaluación sumativa. La evaluación formativa se encuentra al inicio de la unidad con un diagnóstico y con un control de los conocimientos a la mitad de la unidad aproximadamente; la evaluación sumativa se encuentra ubicada al final de la unidad, la misma que está constituida por reactivos de

opción múltiple y preguntas de desarrollo.

### Diagnóstica

La evaluación diagnóstica para esta unidad está constituida por preguntas de cuestionamiento directo. EL propósito de esta evaluación es verificar el manejo de números reales, esto es: clasificación, orden, expresión decimal y racional, operaciones con números reales, ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano e identificación de figuras geométricas sencillas.

Tabule los resultados obtenidos en esta evaluación y considere los contenidos a reforzar antes de empezar a abordar los contenidos de la presente unidad.

### Formativa

Como bien se dijo, parte de esta evaluación es el diagnóstico, la otra parte, se encuentra después de haber tratado el tema pendiente de una recta. Es importante resaltar que estas evaluaciones no tienen impacto en el promedio de las calificaciones, a pesar de que se pueda asignar un valor cuantitativo.

### Sumativa

Se dice que una evaluación es de carácter sumativo, cuando el propósito es la promoción de los estudiantes. Es decir, la evaluación pretende aportar una imagen final y general de cada uno de los estudiantes, es por eso que; es el resultado de todos los datos disponibles, ya sean pruebas, lecciones, tareas, observaciones, etc.

Como conclusión es importante anotar que la

única diferencia entre una evaluación de carácter formativo y una evaluación de carácter sumativo es el propósito. En este sentido, la evaluación sumativa siempre será cuantitativa; mientras que la formativa, será cualitativa o cuantitativa.

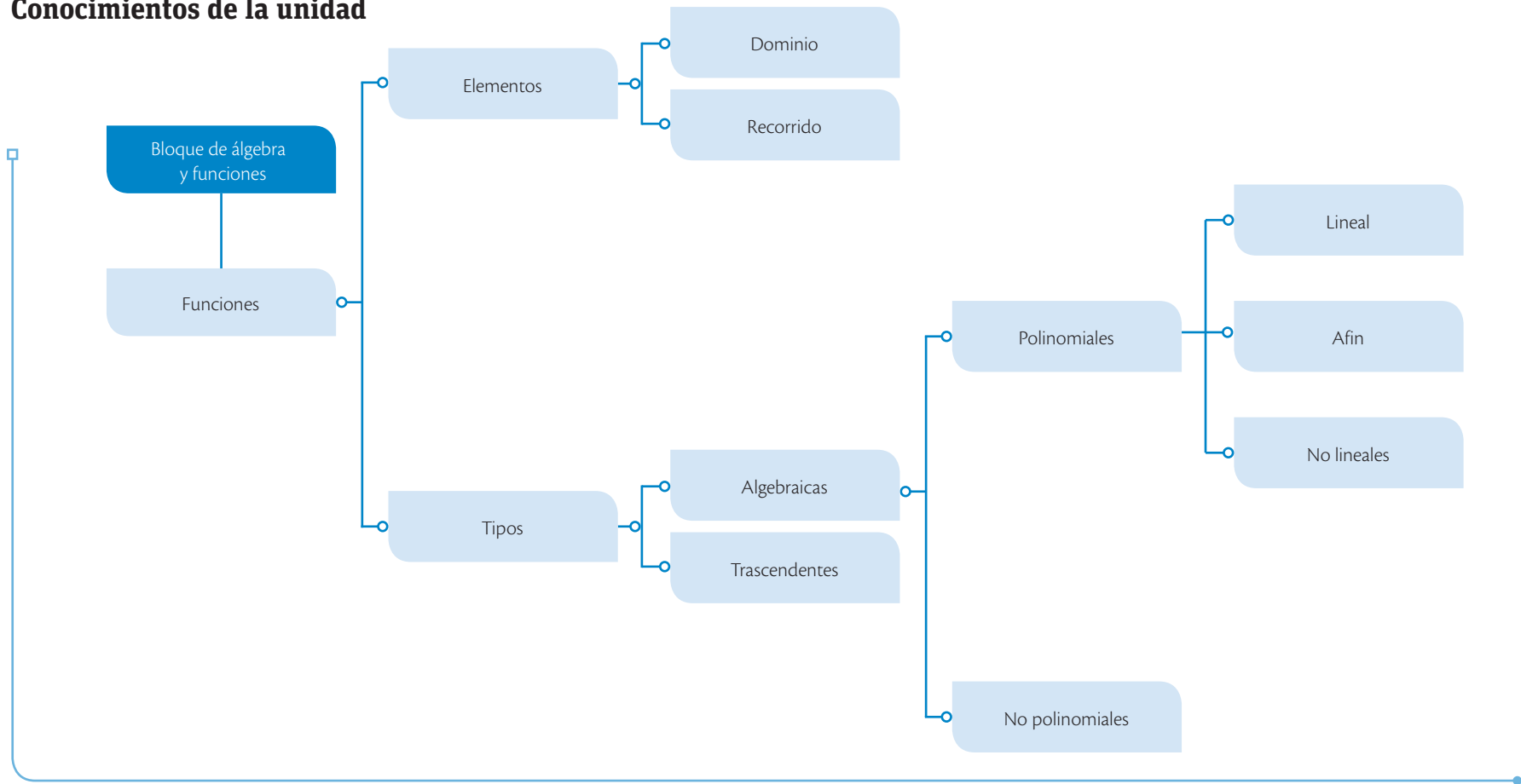
### Respuestas

#### Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
6	7	8	9	
A	A	A	A	
B	B	B	B	
C	C	C	C	
D	D	D	D	

# Esquema conceptual

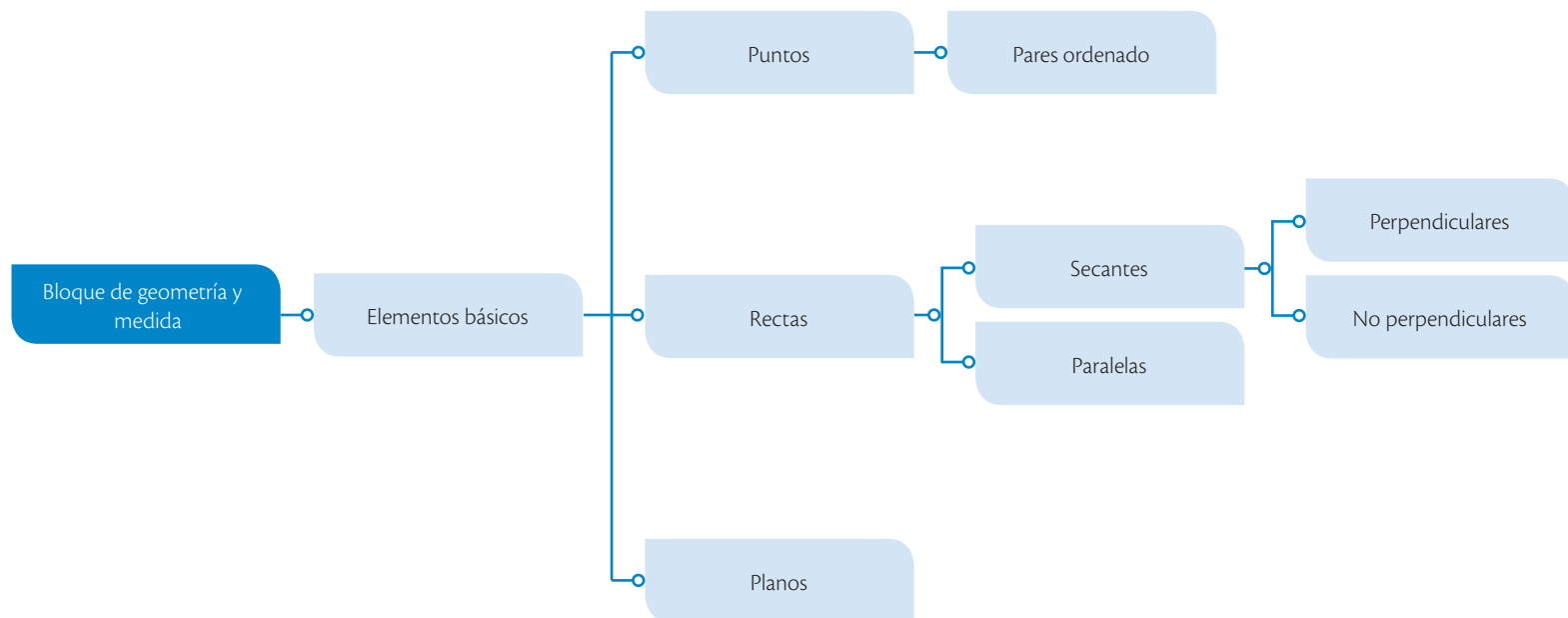
## Conocimientos de la unidad



## Cultura del Buen Vivir

### ■ Valor: La fortaleza

Cuando se tiene fortaleza, se puede vencer el temor y los obstáculos que atentan contra nuestros propósitos personales. La fortaleza está relacionada directamente con la perseverancia y la constancia.



## ■ Compromiso a lograr

Dentro de la cultura educativa, estamos comprometidos todos los que conformamos la comunidad educativa a brindar apoyos a nuestros estudiantes, con la finalidad de fortalecer hábitos encaminados a fortalecer el espíritu de nuestros educandos. Esto se verá reflejado en la persistencia demostrada en cada uno de los obstáculos encontrados en la ruta del aprendizaje.

# Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica												
Unidad 2: Funciones lineales												
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel										
OG.M.2 – OG.M.3. – OG.M.6.		O.M.4.2. – O.M.4.3.										
Objetivos de subnivel		Valores										
M.4.1.43. – M.4.1.44.		Fortaleza: J2 – J										
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación										
CE.M.4.3.		I.M.4.3.2. – I.M.4.3.3.										
Objetivos de la unidad												
<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocer funciones en sus distintas expresiones</li> <li>Identificar elementos y propiedades de las funciones</li> <li>Resolver problemas de aplicación de la función lineal y afín</li> </ul>												
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:								
Álgebra y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes</li> <li>Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología), e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente.</li> <li>Definir y reconocer funciones potencia con <math>n=1, 2, 3</math>, representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía.</li> <li>Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lea con sus estudiantes el capítulo V de la obra “El Hombre que Calculaba”. En este capítulo se presenta una situación sobre la incertidumbre del pago de un hospedaje.</li> <li>Luego de haber leído el capítulo, elabore una tabla de datos con los valores del joyero y del dueño del hospedaje,</li> </ul> <table border="1" data-bbox="719 1011 1257 1215"> <thead> <tr> <th>Precio de la venta de las joyas</th> <th>Costo del hospedaje</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>200</td> <td>35</td> </tr> <tr> <td>100</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Precio de la venta de las joyas	Costo del hospedaje	200	35	100	20			<ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema. (I.2.)</li> <li>Determina el comportamiento (función creciente o decreciente) de las funciones lineales en <math>Z</math>, basándose en su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas; valora el empleo de la tecnología; y calcula funciones compuestas gráficamente. (I.4.)</li> </ul>	<p><b>Tarea</b></p> <p>Resolver los ejercicios planteados en las actividades planteadas en desarrolla tus destrezas.</p> <p><b>Actividades</b></p> <p>Resuelve y formula problemas. / Ficha de observación y coevaluación</p>
		Precio de la venta de las joyas	Costo del hospedaje									
200	35											
100	20											
<ul style="list-style-type: none"> <li>Represente estos valores en el plano cartesiano, encuentre la pendiente y la ecuación de la recta.</li> <li>En la función encontrada evalúe cuando <math>x=140</math> y encuentre el valor del hospedaje según Beremis.</li> <li>Del mismo modo puede proceder para verificar que el costo es de 26,6 por el método de interpolaciones.</li> </ul>												

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
Geometría y medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</li> <li>Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>En virtud de que las proporciones están fundamentadas en el Teorema de Tales, también puede aprovechar la situación y retroalimentar este conocimiento</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados; dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetro y área de triángulos; comunica los procesos y estrategias utilizados. (I.3.)</li> </ul>	<p><b>Tarea grupal</b></p> <p>En grupos de 3 personas deben proponer solución al problema planteado.</p> <p><b>Actividades</b></p> <p>colaborativas y talleres propuestos en el libro de trabajo. / Tabla de cotejo.</p> <p><b>Prueba de bloque</b></p> <p>Prueba objetiva./ Rúbrica de evaluación</p>

Recursos:

texto guía, cuaderno de trabajo, materiales elaborados por el docente, medios visuales y material concreto.

Bibliografía:

Tan T. Soo, Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida 5a ed. 2012 – LEHMAN, Algebra, LIMUSA editores, México D.F. 2011 – GALINDO Edwin, Matemáticas Superiores, Prociencia Editores, Ecuador 2010

## Ampliación conceptual

El concepto de función es uno de los conceptos más importantes en el desarrollo de la matemática, si bien es cierto, este concepto no se trató como ahora lo conocemos, ya aparecieron sus primeras nociones en las tablillas de los babilónicos. También se puede ver desarrollada la idea de función en los matemáticos griegos, tales como Tptolomeo, Apolonio a través del estudio del movimiento y de las cónicas. Luego del período medieval, se retoman estas ideas en las figuras de Vieta, Descartes y Fermat.

Al parecer, el primer matemático que usó la palabra función en sus escritos, fue el matemático Británico Isaac Newton y el primero en introducir la definición de función el matemático suizo Leonhard Euler, en el año 1748. A finales del siglo XIX, el matemático alemán Hermann Hankel, da la definición de función utilizada hoy en día.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Escriba la expresión "Todo hijo tiene una sola madre" u otra similar.
- Explique que en la expresión indicada hay una relación entre el conjunto de partida (hijo) y el conjunto de llegada (madre).
- Escriba varias situaciones que determinen esta relación, por ejemplo, en el conjunto de los hijos escriba dos nombres y en el conjunto madres dos nombres. Una con una flecha a cada uno de los hijos con una de las madres y pregunte si es posible la situación. Escriba el mismo caso anterior, solo que esta vez, una con una flecha a un hijo con dos madres y pregunte si es posible la situación.

## 1 Concepto de función

### Explora

Considera estos conjuntos A y B:  
 $A = \{2, 3, 5, 6\}$  y  $B = \{1, 2, 4, 9, 10\}$ .  
 • Si  $x$  es un elemento de A y  $y$ , un elemento de B, puede definirse una relación R de A en B, mediante el enunciado: "y es múltiplo de x".  
 ¿Cuáles son los elementos de R?

### Ten en cuenta

Todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

### Ten en cuenta

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) dio una definición precisa de función e introdujo en 1734 el símbolo  $f(x)$  para designar la imagen de  $x$  mediante una función  $f$ . Actualmente, también se acostumbra a escribir la expresión  $y = f(x)$ .

De acuerdo con su definición, la relación R hace corresponder a  $x$ , en A, algún elemento  $y$ , de B, siempre y cuando  $y$  sea múltiplo de  $x$ .

Por lo tanto, la relación está conformada por todas las **parejas ordenadas** de la forma  $(x, y)$  que cumplan la condición que define a R, así:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (3, 9), (5, 10)\}.$$

En general, una **relación** R, definida como un conjunto A en un conjunto B, es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Cuando una relación dada entre dos conjuntos A y B asocia a cada elemento de A exactamente un elemento de B es denominada **función de A en B**.

Una **función**  $f$  es una relación definida de un conjunto A en un conjunto B, tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B mediante  $f$ .

### Ejemplo 1

- En la Figura 1, se representa en un diagrama sagital la relación  $R_1$ , que hace corresponder a cinco personas sus respectivos números de celular. Se observa que esta relación no es una función, pues existe una persona asociada a dos números de celular; además, existe un elemento del primer conjunto que no se relaciona con algún elemento del segundo.



Figura 1

- Sean  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  y  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ , y  $R_2$  una relación definida mediante el enunciado: "x es el siguiente de y", siempre que  $x$  sea un elemento del conjunto A y  $y$ , un elemento del conjunto B.

Se observa que la relación  $R_2$  está dada por:

$$R_2 = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}.$$

De acuerdo con lo anterior, puede concluirse que esta relación es una función, pues no existen pares ordenados que tengan el mismo primer elemento y cada elemento del conjunto A está asociado a un único elemento del conjunto B.

### 1.1 Dominio y recorrido de una función

El **dominio de una función**  $f$ , denotado por  $D(f)$ , es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente  $x$ . El **rango o recorrido de una función**  $f$ , denotado por  $R(f)$ , es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente  $y$ .

### Ejemplo 2

- Observa cómo se determinan el dominio y recorrido de la función  $y = \frac{2}{x-1}$ .
- Como la expresión de la función es un cociente, entonces estará definida para todo número real, excepto para aquel que anula el denominador. En este caso, el valor que anula el denominador es  $x = 1$ , por lo tanto,  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ .
- Para determinar el recorrido de la función, se despeja la variable  $x$  en términos de la variable  $y$ . Luego, se intercambian los nombres de las variables, con lo cual se obtiene la expresión  $y = \frac{2+x}{x}$ , que estará definida para todo número real, excepto para  $x = 0$ , es decir,  $R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ .

Bloque de Álgebra y funciones

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido y cortes con los ejes, con el uso de la tecnología.

1.2 Representación gráfica de una función

La **representación gráfica de una función**  $y = f(x)$  en el plano cartesiano consta de todos los puntos cuyas coordenadas se expresan mediante parejas ordenadas de la forma  $(x, y)$ , que pertenecen a dicha función.

En la práctica, para representar una función se determinan las coordenadas de puntos asignando valores arbitrarios a la variable  $x$ , los cuales se reemplazan en la expresión algebraica de la función para obtener los valores correspondientes de la variable  $y$ . Luego se ubican los puntos en el plano cartesiano y se traza una línea que los una, según el análisis del dominio y del recorrido.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Obtén la gráfica de la función  $f(x) = 3x - 1$ .

Solución:

Para representar gráficamente la función, puede completarse una tabla de valores como la Tabla 1. En ella, se encuentran parejas de valores obtenidas al asignar a la variable  $x$  algunos valores del dominio de la función y reemplazarlos en la expresión  $y = 3x - 1$  para obtener los valores correspondientes de la variable  $y$ . Como en este caso  $D(f)$  y  $R(f)$  coinciden con el conjunto  $\mathbb{R}$ , se traza una línea continua para unir los puntos (Figura 2).

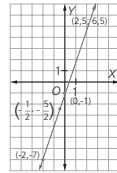


Figura 2

Razonamiento matemático

Funciones y relaciones

Gráfica las siguientes relaciones en el plano cartesiano.

$R: x^2 - y = 1$

$R: y^2 - x = 1$

• ¿Cuál de ellas NO representa una función? ¿Por qué?

x	f(x)
-2	-7
-1/2	-5/2
0	-1
2,5	6,5

Tabla 1

MatemáticaTICS

Grafica funciones con WolframAlpha

Con WolframAlpha puedes obtener la gráfica de una función empleando la función *Plot*, de la siguiente manera:

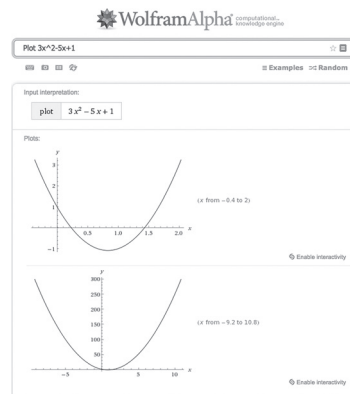
Una vez accedas al programa, ingresa en la caja de texto la expresión algebraica de la función. Por ejemplo, para graficar la función:

$y = 3x^2 - 5x + 1$ ,

se escribe:

Plot 3x^2-5x+1.

Luego, oprime *Enter* y obtendrás la gráfica de la función representada con dos escalas diferentes, como se observa en la imagen de la derecha.



APLICA © EDICIONES SM

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

La representación gráfica de una función se puede realizar mediante una tabla de datos o a través del estudio de traslaciones, dilataciones y contracciones.

■ Actividades TIC

Con la ayuda del Geogebra representar una familia de funciones, por ejemplo:  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 0.5x$ ,  $y = x + 2$ , etc.

■ Actividades colaborativas

- Forme grupos de 3 o hasta 5 estudiantes.
- Entregue un hilo a cada grupo, pero de distinta longitud.
- Con el hilo entregado cada grupo debe formar distintos rectángulos y registrar en una tabla de dos columnas. En la primera columna debe constar la base del rectángulo y en la segunda columna el área respectiva.
- Cada grupo debe generar una tabla de 10 valores por los menos. Los valores de los lados del rectángulo deben ser entre cero y el valor máximo del hilo entregado.
- La tabla de datos debe ser representada en un plano cartesiano. Pida que expongan sus trabajos en un papelote y que deduzcan (parábola) la curva que se genera en todos los trabajos.

Ejemplo para un hilo de 10 cm

Base	0	2,25	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25	0
Área	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5

## 1

### Concepto de función

#### Desarrolla tus destrezas

##### Razonamiento

- 2 Determina si cada relación representa una función. En el caso de las funciones, indica su dominio y su rango.

a.

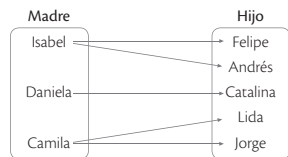


Figura 3

b.

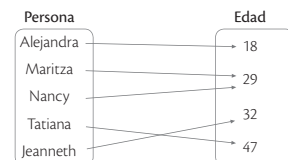


Figura 4

c.

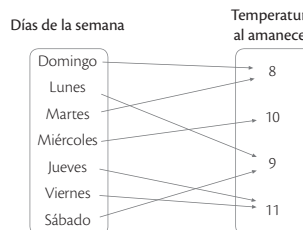


Figura 5

- d.  $R_1 = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 7), (6, 8), (7, 9)\}$   
 e.  $R_2 = \{(-4, 9), (-9, 4), (1, 7), (-4, 8), (3, 1)\}$

##### Modelación

- 3 Escribe la función que representa cada enunciado. En cada caso, determina la variable independiente y la variable dependiente.

- a. El costo mensual del servicio de telefonía celular ( $C$ ) es de \$ 0,10 por minuto más \$ 10 de cuota fija.  
 b. El salario neto ( $G$ ) de una persona que gana \$ 10 por hora.

##### Comunicación

- 4 Completa la Tabla 2. Observa el ejemplo.

Función expresada mediante un enunciado	Función expresada mediante su expresión algebraica
Función que a cada número le asocia su triple.	$y = 3x$
Función que a cada número le asocia su doble menos 3.	
Función que a cada número le asocia su mitad.	$y = x^2$
Función que a cada número le asocia su opuesto aditivo.	
Función que relaciona el volumen de un cubo y su arista.	$y = 2x - 10$
Función que relaciona el radio de un círculo y su área.	$P(r) = 2\pi r$
El valor de $y$ es igual a la tercera parte del valor de $x$ disminuido en 8.	

Tabla 2

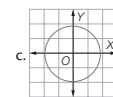
- 5 Halla el dominio y el rango de cada función.

- a.  $f(x) = 5x - 7$   
 b.  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 c.  $f(x) = -2x^3 + 8x + 3$   
 d.  $f(x) = \frac{12}{x-5}$   
 e.  $f(x) = \sqrt{x+1}$

##### Razonamiento

- 6 Indica cuáles de las siguientes gráficas no corresponden a una función. Justifica tus respuestas.

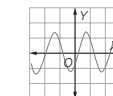
a.



b.



c.



d.



Figura 6

Figura 7

Figura 8

Figura 9

#### Razonamiento

2. a. No

b.  $D(f) = \{\text{Alejandra, Maritza, Nancy, Tatiana, Jeanneth}\}$   $R(f) = \{18, 29, 32, 47\}$

c.  $D(f) = \{\text{Días de la semana}\}$   $R(f) = \{8, 9, 10, 11\}$

d.  $D(f) = \{-3, 2, 4, 6, 7\}$

$R(f) = \{6, 7, 8, 9\}$

e. No

#### Modelación

3. a.  $C(x) = 0,10x + 10$

Variable independiente: cantidad de minutos

Variable dependiente: costo mensual

b.  $G(x) = 10x$

Variable independiente: número de horas

Variable dependiente: salario

#### Comunicación

4.  $y = 2x - 3$ ;  $y = \frac{x}{2}$  A cada número le asocia su cuadrado  $y = -\frac{x}{2}$ ;  $V(a) = a^3$

A cada número le asocia su doble disminuido en diez.  $A(r) = \pi r^2$

Función que relaciona el radio de un círculo

con su perímetro  $y = \frac{x}{3} - 8$ .

5. a.  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $R(f) = \mathbb{R}$

b.  $D(y) = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $R(y) = \mathbb{R} - \{0\}$

c.  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $R(f) = \mathbb{R}$

d.  $D(y) = \mathbb{R} - \{5\}$ ,  $R(y) = \mathbb{R} - \{0\}$

e.  $D(f) = [-1, \infty)$ ,  $R(f) = \mathbb{R}$

#### Razonamiento

6. a. y d. porque se puede trazar una recta vertical que corta la curva en dos puntos diferentes.

**Bloque de Álgebra y funciones.**

**Destaca con criterios de desempeño:** Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, cortes con los ejes.

**Comunicación**

7 Observa las gráficas de las funciones  $g$  y  $f$  de las Figuras 10 y 11. Luego, responde cada pregunta.

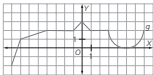


Figura 10

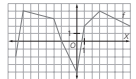


Figura 11

a. ¿Cuáles son los valores de  $g(0)$  y  $f(0)$ ?

b. ¿Es  $f(0)$  positiva o negativa?

c. ¿Es  $g(0)$  positiva o negativa?

d. ¿Cuáles son los valores de  $g(5)$  y  $f(5)$ ?

e. ¿Para qué valores de  $x$ ,  $f(x) = 0$ ?

f. ¿Para qué valores de  $x$ ,  $f(x) = 4$ ?

g. ¿Para qué valores de  $x$ ,  $g(x) = 2$ ?

h. ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

i. ¿Cuál es el rango de  $f$ ?

j. ¿Cuál es el dominio de  $g$ ?

k. ¿Cuál es el rango de  $g$ ?

**Modelación**

10 Observa el ortoedro de la Figura 12 y resuelve.

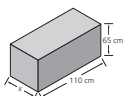


Figura 12

a. Escribe una función que relacione el volumen del ortoedro  $V(x)$  con la medida de su ancho  $x$ .

b. Determina el volumen del ortoedro para las medidas de  $x$  dadas en la Tabla 3.

$x$	$V(x)$
15 cm	
20 cm	
25 cm	
30 cm	
35 cm	
40 cm	
45 cm	
50 cm	

Tabla 3

**Resolución de problemas**

11 Si una piedra cae al piso libremente desde una altura de 50 m (la altura  $h$ ), en metros, al transcurrir  $x$  segundos es aproximadamente:

$$h(x) = 50 - 4,9x^2.$$

a. ¿A qué altura está la piedra cuando transcurre un segundo?

b. ¿A qué altura está la piedra cuando transcurren dos segundos?

12 En un local se disminuyen los precios de los artículos de la sección de electrodomésticos en un 10%. Designa con  $x$  el precio de un artículo antes de la rebaja y con  $y$  el precio del mismo artículo después de la rebaja.

a. Completa la Tabla 4, según la información.

$x$	1200	1900	4000	5000
$y$	1530	2250	2700	4500

Tabla 4

b. Escribe la función que representa la situación.

c. Realiza la gráfica correspondiente a la función.

**Ejercitación**

8 Haz una tabla de valores y la gráfica para cada una de las funciones.

a.  $y = x$

b.  $f(x) = |x|$

c.  $f(x) = -2x + 11$

d.  $y = x^2$

e.  $y = 1$

9 Considera la siguiente función:  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

a. ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

b. ¿Está el punto  $(1, 2)$  en la gráfica de  $f$ ?

c. ¿Está el punto  $(-1, 0)$  en la gráfica?

d. Si  $x = 4$ , ¿a qué equivale  $f(x)$ ?

e. Si  $f(x) = \frac{3}{2}$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?

f. Si  $f(x) = 0$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?

**Comunicación**

7.

- a.  $g(0) = 3, f(0) = -4$     b. Es negativa.
- c. Es positiva.    d.  $g(5) = 0$  y  $f(5) = 3$
- e.  $x = -7\frac{2}{3}, -2, \frac{7}{3}$     f.  $x = -\frac{22}{3}, 5$
- g.  $x = -7, 3$     h.  $[-4, -1], [1, 7]$
- i.  $[-8, 7]$     j.  $[-4, 4]$
- k.  $[-8, 7]$     l.  $[-2, 3]$

**Ejercitación**

8.

**Verificar** la validez de las representaciones.

a.

$x$	$f(x)$
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2

b.

$x$	$f(x)$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

c.

$x$	$f(x)$
-2	25
-1	18
0	11
1	4
2	-3

d.

$x$	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

e.

$x$	$f(x)$
-2	1
-1	1
0	1
1	1
2	1

9.

- a.  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$     b. Sí
- c. No    d.  $f(4) = \frac{7}{5}$
- e.  $x = 3$     f.  $x = -3$

**Modelación**

10.

a.  $V(x) = 7150x$

b.

$x$	$V(x)$
15 cm	107 250 cm <sup>3</sup>
20 cm	143 000 cm <sup>3</sup>
25 cm	178 750 cm <sup>3</sup>
30 cm	214 500 cm <sup>3</sup>
35 cm	250 250 cm <sup>3</sup>
40 cm	286 000 cm <sup>3</sup>
45 cm	321 750 cm <sup>3</sup>
50 cm	357 500 cm <sup>3</sup>

**Resolución de problemas**

11.

- a.  $h(1) = 45,1$  m    b.  $h(2) = 30,4$  m

12.

a.

$x$	1200	1700	1900	2500	3000	4000	5000
$y$	1080	1530	1710	2250	2700	3600	4500

b.  $y = 0,9x$

c. Verificar la validez de la representación de la recta.

## Ampliación conceptual

Las funciones monótonas aparecieron primero en el Cálculo, luego fueron generalizadas a la teoría del orden.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Utilice la tasa de variación para determinar si una función es creciente o decreciente en un intervalo dado.
- Tenga cuidado de que, en el intervalo a investigar, la función únicamente crezca o decrezca.
- Ponga a un intervalo en el que la función crezca y decrezca.

## Actividades colaborativas

- Pida a sus estudiantes que analicen si la función  $y=(x+1)^2$  es creciente o decreciente en el intervalo de 0 a 1.
- En grupos de dos o tres, invite a sus estudiantes para que determinen un método para asegurar en qué intervalo la función presentada es creciente y en qué intervalo es decreciente.
- Nombre un responsable de cada grupo, un secretario y un estudiante encargado de exponer los resultados a los que el grupo ha llegado

## 2

## Monotonía: funciones crecientes y funciones decrecientes

### Explora

Observa la gráfica de la función  $f$  representada en la Figura 1.

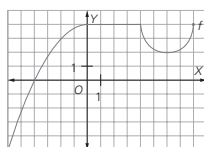


Figura 1

- ¿En qué intervalos crece la gráfica de  $f$ ? ¿En cuáles decrece?



### TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

[www.e-sm.net/9smt03](http://www.e-sm.net/9smt03)

Evalúa tus conocimientos sobre crecimiento y decrecimiento de funciones.

### App

#### Funciones crecientes y funciones decrecientes

Abre la aplicación *Desmos Graphing Calculator* y utilízala para analizar el crecimiento, decrecimiento y simetría de funciones mediante gráficas, para representar funciones lineales y afines, y para relacionar ecuaciones, pendientes, puntos de corte y relaciones entre rectas.



En la gráfica de la función, se observa que:

- $f$  es creciente en los intervalos  $[-6, 0]$  y  $[6, 8]$ , pues los valores de  $y$  crecen en estos intervalos.
- $f$  es decreciente en  $[4, 6]$ , ya que los valores de  $y$  decrecen en este intervalo.
- $f$  es constante en el intervalo  $[0, 4]$ .

Una función  $f$  es **creciente** en un intervalo  $I$  cuando, para todo  $a \in I$  y  $b \in I$  con  $a < b$ , se cumple que  $f(a) < f(b)$ .

Una función  $f$  es **decreciente** en un intervalo  $I$  cuando, para todo  $a \in I$  y  $b \in I$  con  $a < b$ , se cumple que  $f(a) > f(b)$ .

#### Ejemplo 1

En la Figura 1 se observa que la gráfica de la función  $f$  no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

### 2.1 Tasa de variación

La **tasa de variación** de una función  $f$ , al pasar de un punto  $a$  a un punto  $b$ , está dada por la expresión:  $TV[a, b] = f(b) - f(a)$ .

#### Ejemplo 2

En la función  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ , cuando el valor de  $x$  pasa de 1 a 2, la tasa de variación se halla de la siguiente manera:

$$TV[1, 2] = f(2) - f(1) \Rightarrow TV[1, 2] = 1 - 2 = -1.$$

La tasa de variación de  $f(x)$  en el intervalo  $[1, 2]$  es  $-1$ .

### 2.2 Crecimiento y decrecimiento

Las definiciones de crecimiento y decrecimiento de una función pueden reformularse en términos de la tasa de variación de la siguiente manera.

Si la monotonía es constante se tiene que:

Una función es **creciente** en un intervalo si para todo par de valores  $a$  y  $b$  en el intervalo con  $a < b$  su **tasa de variación es positiva**,  $TV > 0$ .

Una función es **decreciente** en un intervalo si para todo par de valores  $a$  y  $b$  en el intervalo con  $a < b$  su **tasa de variación es negativa**,  $TV < 0$ .

#### Ejemplo 3

- La función  $h(x) = 3x^2 - 1$  es **decreciente** en el intervalo  $[-5, -2]$ , porque la tasa de variación  $TV[-5, -2] = -63$  y  $-63 < 0$ .
- La función  $g(x) = x^5 + 2$  es **creciente** en el intervalo  $[-4, -1]$ , porque la tasa de variación  $TV[-4, -1] = 1\,023$  y  $1\,023 > 0$ .

#### Actividad resuelta

Ejercitación

- Determina si la función  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  es creciente o decreciente en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Solución:**

Se calcula la tasa de variación de la función  $f$ , así:

$$TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 2 - (-3) = 5.$$

Como  $5 > 0$ , la función  $f$  es creciente en el intervalo  $[0, 1]$ .

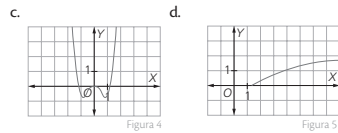
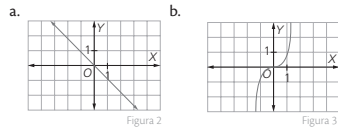
Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Observa las gráficas de las Figuras 2 a 5. Luego, indica en qué intervalos son crecientes o decrecientes.



- 3 Calcula la tasa de variación de cada función en los intervalos dados.

- a.  $f(x) = 2x^2$   
TV[-3, 0] y TV[1, 2]
- b.  $g(x) = -9x^2 + 7x - 5$   
TV[2, 4] y TV[-3, 0]
- c.  $i(x) = 7$   
TV[-3, 5] y TV[8, 15]

Razonamiento

- 4 Clasifica las siguientes funciones en crecientes o decrecientes, según corresponda.

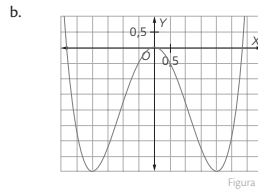
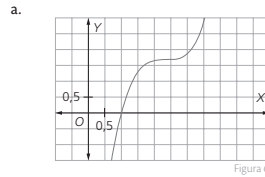
- a.  $g(x) = -5$                       b.  $h(x) = 2x + 4$
- c.  $j(x) = 2x$                         d.  $l(x) = 3$
- e.  $f(x) = -4x + 5$

- 5 Indica si son verdaderas o falsas estas afirmaciones:

- a. La función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$  es creciente en el intervalo [0, 2].
- b. La función  $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$  es creciente en el intervalo  $[-\frac{1}{2}, 1]$ .
- c. La función  $f(x) = x + \frac{x}{4}$  es decreciente en el intervalo [2, 6].
- d. La función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$  es decreciente en el intervalo  $[-\frac{1}{2}, 0]$ .

Comunicación

- 6 Describe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones representadas en las siguientes gráficas.



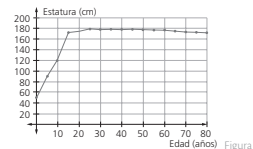
Razonamiento

- 7 Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = 4x + x^2$  en los intervalos [-2, 2] y [-2, -1,8].

Resolución de problemas

- 8 Un jardinero quiere cercar un terreno de forma cuadrada y área desconocida en el que plantó unas flores. Encuentra la fórmula que permite obtener el lado del cuadrado en función de su área.
- a. Si el área estuviera comprendida entre 120 m<sup>2</sup> y 180 m<sup>2</sup>, ¿cuáles serían el dominio y el recorrido de la función?
- b. ¿Es la función descrita creciente o decreciente?

- 9 En la gráfica de la Figura 8, se muestra la variación de la estatura de una persona en función de su edad, cada 5 años.



¿Entre qué edades la estatura de esta persona fue creciente? ¿Y cuándo fue decreciente?

Ejercitación

2. a. Decreciente                      b. Creciente  
c. Creciente y decreciente      d. Creciente

3. a. 18 y 6  
b. -94 y 102  
c.  $i(x)$  es constante, TV es 0.

Razonamiento

4. a. Constante                      b. Creciente  
c. Creciente      d. Constante      e. Decreciente

5. a. F; b. V; c. F; d. F

Comunicación

6. a. Creciente en todo su dominio.  
b. Decreciente en:  $(-\infty, -2]$  y  $(0, 2]$   
Creciente en:  $[-2, 0)$  y  $[2, +\infty)$

Razonamiento

7. Decreciente y creciente, respectivamente.

Resolución de problemas

8. a. Dominio: [120, 180] y Rango:  $[\sqrt{120}, \sqrt{180}]$   
b. Creciente.
9. Hasta los 25 años fue creciente y decreciente de 50 años en adelante.

## Ampliación conceptual

Uno de los errores más frecuentes que tienden a cometer los estudiantes, es pensar que las funciones pares y las funciones impares son mutuamente excluyentes. Es decir, que las funciones se clasifican en pares e impares. Es importante hacerles notar que hay funciones que no son pares ni impares, por ejemplo, la función  $f(x) = 2x + 3$  no es par ni impar.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Antes de introducir las definiciones respectivas de paridad, es conveniente que puedan visualizar estos conceptos a través de un software o a través de material concreto.
- Grafique con sus estudiantes distintas funciones pares en material transparente y plegable. Pida que doblen haciendo centro en el eje  $y$ , si se juntan en una sola figura, la función es par.
- Grafique con sus estudiantes distintas funciones impares en material transparente y plegable. Pida que doblen haciendo centro en el eje  $x$ . Si se juntan en una sola figura, la función es impar.

## Actividades colaborativas

- Divida en dos grupos
- Pida al primer grupo que reproduzcan en material transparente las gráficas de desarrolla tus destrezas (numeral 2) y que verifiquen a través de dobleces si las funciones son pares, impares o ninguna de las dos.

## 3 Funciones simétricas

### Explora

En la Figura 1, se muestra la gráfica de la función  $g(x) = |2x| + 3$ .

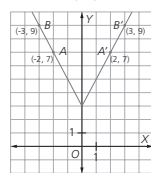


Figura 1

- ¿Qué clase de simetría presenta la función  $g(x)$ ?

### Ten en cuenta

Si una función es simétrica con respecto al eje de las ordenadas o con respecto al origen, basta con construir su gráfica en los puntos en donde  $x \geq 0$ . Por simetría, puede dibujarse el resto de la gráfica.

### 3.1 Simetría con respecto al eje de ordenadas.

#### Funciones pares

En la figura se observa que:

- $f(-2) = f(2)$ , luego, los puntos  $A(-2, 7)$  y  $A'(2, 7)$  son simétricos con respecto al eje de ordenadas.
- $f(-3) = f(3)$ , luego, los puntos  $B(-3, 9)$  y  $B'(3, 9)$  son simétricos con respecto al eje de ordenadas.

Una función  $f$  es simétrica con respecto al eje de ordenadas si para cualquier punto  $x$  de su dominio se cumple que  $f(x) = f(-x)$ , es decir, si los puntos  $P(x, y)$  y  $P'(-x, y)$  son simétricos con respecto al eje de ordenadas. A las funciones con este tipo de simetría se les llama **funciones pares**.

#### Ejemplo 1

La función  $f(x) = x^2 - 3$ , representada en la Figura 2, es simétrica con respecto al eje  $Y$ . Es decir,  $f(x)$  es una función par, porque:

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x).$$

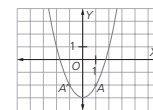


Figura 2

### 3.2 Simetría con respecto al origen. Funciones impares

Una función  $f$  es simétrica con respecto al origen si para cualquier punto  $x$  de su dominio se cumple que  $f(-x) = -f(x)$ , es decir, si los puntos  $P(x, y)$  y  $P'(-x, -y)$  son simétricos con respecto al origen. A las funciones con este tipo de simetría se les llama **funciones impares**.

#### Ejemplo 2

La función  $g(x) = x^3$ , que se observa en la Figura 3, es simétrica con respecto al origen. La función es impar, porque se cumple la siguiente igualdad:

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x).$$

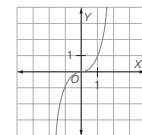


Figura 3

#### Actividad resuelta

Razonamiento

- Estudia la simetría de la función  $f(x) = \frac{2}{x}$  e indica si es par o impar.

#### Solución:

Al reemplazar  $x$  por  $(-x)$  en la expresión algebraica de  $f$ , se obtiene:

$$f(-x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x} = -f(x).$$

por lo tanto,  $f$  es simétrica respecto al origen y es una función impar.

En la Figura 4, se observa la gráfica de  $f$ .

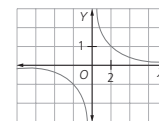


Figura 4

Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones pares e impares, con base a su formulación algebraica y/o representación gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Marca la opción correcta en cada caso.

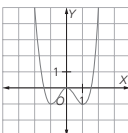
a.   Función par  
 Función impar  
 Ninguna de las anteriores

Figura 5

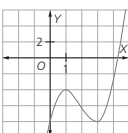
b.   Función par  
 Función impar  
 Ninguna de las anteriores

Figura 6

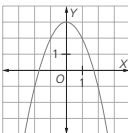
c.   Función par  
 Función impar  
 Ninguna de las anteriores

Figura 7

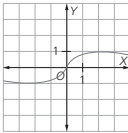
d.   Función par  
 Función impar  
 Ninguna de las anteriores

Figura 8

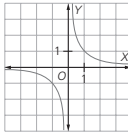
e.   Función par  
 Función impar  
 Ninguna de las anteriores

Figura 9

Razonamiento

3 Determina cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles, impares.

- a.  $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 3}$
- b.  $g(x) = x^2 + 4$
- c.  $h(x) = x^3 - 4x$
- d.  $i(x) = |x - 1|$
- e.  $j(x) = x^5 - x^3$
- f.  $k(x) = |x^6 - x^2|$
- g.  $p(x) = \frac{x^4 - 2}{3 - x^2}$
- h.  $q(x) = x^2 + x$

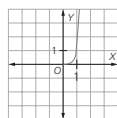
4 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).  
 ● Justifica tus respuestas.

- a. La función  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$  es simétrica con respecto al eje de ordenadas.
- b. La función  $g(x) = 4x^5 - 3x^3$  es simétrica con respecto al origen.
- c. La función  $h(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x}$  es simétrica con respecto al origen.
- d. La función  $h(x) = |x|$  es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

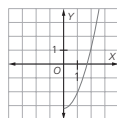
Modelación

5 Completa las gráficas, según el tipo de función que representa cada una.

a. Función impar



b. Función par



Resolución de problemas

6 La altura y, medida en kilómetros de un proyectil que se lanza desde cierto punto, puede expresarse mediante la función  $f(x) = -0,125x^2 + 4$ , donde x es el tiempo medido en horas.

- a. Completa una tabla de valores en la que se relacionen las variables involucradas.
- b. Haz la gráfica de la función.
- c. ¿Presenta  $f(x)$  simetría? ¿Es  $f$  par o impar?

Ejercitación

2.  
 a. Par b. ninguna de las anteriores c. Par  
 d. Impar e. Impar

Razonamiento

3. Funciones pares: b, f, g  
 Funciones impares: c y e

4.  
 a. V b. V c. V d. V

Modelación

5.  
 a. Se refleja con respecto al origen.  
 b. Se refleja con respecto al eje y.

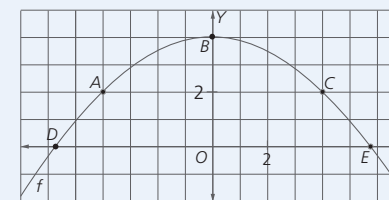
Resolución de problemas

6.

a.

x	f(x)
-4	2
-2	3,5
0	4
2	3,5
4	2

b.

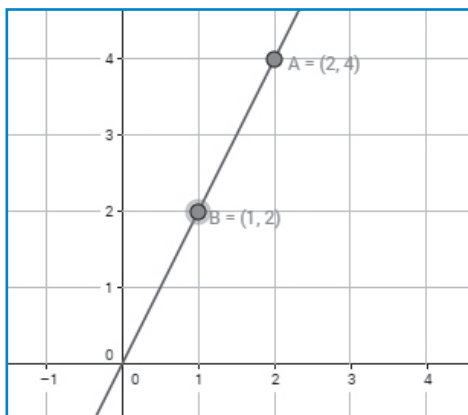


c. Si es par.

## Ampliación conceptual

### Función lineal.

Si bien es cierto que la función lineal se puede definir a través de la ley de asignación  $f(x) = mx$ , es de suma importancia entender que el valor  $m$  corresponde a la pendiente (inclinación) de la recta, la misma que se puede obtener del cociente entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de cualquier par de puntos pertenecientes a la recta. Por ejemplo, en la gráfica de la función definida por  $f(x) = 2x$  se pueden tomar dos puntos A (2,4) y B (1,2). Claramente se verifica que la pendiente  $m = \frac{4-2}{2-1} = 2$ .



### Función Afín.

La función afín está determinada por la ley de asignación  $f(x) = mx + b$ , donde  $m$  es el valor de la pendiente de la recta y  $b$  es el corte de la recta con el eje  $y$ . Esto significa que  $b$  tiene coordenadas  $(0, b)$ , es decir, el valor  $b$  puede obtenerse evaluando la función para  $x=0$ . Esto nos lleva a pensar que fácilmente se puede graficar una función al conocer

## 4 Funciones lineal y afín

### Explora

La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de  $540 \text{ cm}^3$  y la velocidad de caída es de  $9 \text{ cm}^3$  por minuto.



- ¿Cuánto tiempo transcurre para que haya la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj?
- Elabora una gráfica que represente la situación.

Para analizar la situación, puede completarse una tabla que muestre la relación entre el tiempo transcurrido  $t$ , en minutos, y el volumen de la arena  $V$ , en centímetros cúbicos, que queda en la parte superior del reloj. Observa la Tabla 1.

$t$	1	10	20	30	40	50	60
$V(t)$	$531 \text{ cm}^3$	$450 \text{ cm}^3$	$360 \text{ cm}^3$	$270 \text{ cm}^3$	$180 \text{ cm}^3$	$90 \text{ cm}^3$	$0 \text{ cm}^3$

Tabla 1

Al estudiar los datos, se encuentra que la relación entre  $t$  y  $V$  corresponde a una función. El tiempo transcurrido hasta el momento en el que la cantidad de arena es la misma en ambos lados del reloj es de 30 minutos.

La gráfica que representa la relación entre  $t$  y  $V$  puede observarse en la Figura 1 y corresponde a un segmento de recta, cuya expresión algebraica está dada por:

$$V(t) = 540 - 9t.$$

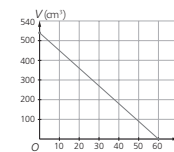


Figura 1

Muchos fenómenos físicos, científicos y de la vida cotidiana pueden modelarse mediante funciones cuya expresión algebraica es de primer grado con una incógnita.

### 4.1 Función lineal

Una **función lineal** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma  $f(x) = mx$ , siendo  $m$  un número real diferente de 0.

Algunas características de la función lineal  $f(x) = mx$  son las siguientes:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen, es decir, por el punto  $(0, 0)$ .
- El valor de  $m$  se llama **constante de proporcionalidad**. Si  $m > 0$ , la función es creciente y si  $m < 0$ , la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto  $\mathbb{R}$ .
- Es una función **continua**, es decir, no presenta saltos ni interrupciones en todo su dominio.

#### Ejemplo 1

El ICE (*Inter City Express*) es un tren de alta velocidad que conecta todas las ciudades principales de Alemania. Tiene conexiones internacionales a Dinamarca, los Países Bajos, Bélgica, Francia, Suiza y Austria. Uno de sus trenes lleva una velocidad media de  $270 \text{ km/h}$ . En la Tabla 2 se muestra la distancia  $D$  que recorre en función del tiempo  $t$ .

$t$ (Tiempo en horas)	1	2	3	4	5	...
$D(t)$ (Distancia recorrida en km)	270	540	810	1080	1350	...

Tabla 2

Esta situación puede modelarse por medio de la función  $D(t) = 270t$ , cuya gráfica es una línea recta que pasa por  $(0, 0)$ , como se observa en la Figura 2. En este caso, la constante de proporcionalidad es 270.

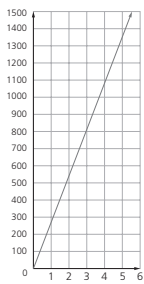


Figura 2



**TECNOLOGÍAS**  
de la información y la  
comunicación

[www.e-sm.net/9smt04](http://www.e-sm.net/9smt04)

Amplía y practica lo que sabes acerca de la función lineal.

Bloque de Álgebra y funciones

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología) e identificar su monotonía a partir de la gráfica.

4.2 Función afín

Una función afín es aquella cuya expresión algebraica es de la forma  $f(x) = mx + b$ , siendo  $m$  y  $b$  números reales distintos de 0.

Las principales características de la función afín  $f(x) = mx + b$  son:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el punto  $(0, b)$ . Este se denomina **punto de corte** con el eje de ordenadas.
- El número  $m$  se llama **constante de proporcionalidad**. Si  $m > 0$ , la función es creciente y si  $m < 0$ , la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto  $\mathbb{R}$ .
- Es una función **continua**.

4.3 Gráfica de una función afín

La **gráfica de la función afín**  $f(x) = mx + b$  se obtiene al desplazar verticalmente ( $b$  unidades) la gráfica de la función  $f(x) = mx$ .

En la Figura 3, se observa que:

- Si  $b > 0$ , el desplazamiento es hacia arriba.
- Si  $b < 0$ , el desplazamiento es hacia abajo.

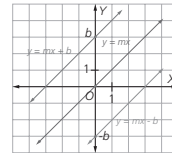


Figura 3

**Ejemplo 2**

En la Tabla 3, se muestran los valores asociados a la función afín  $f(x) = 3x - 5$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-14	-11	-8	-5	-2	1

Tabla 3

Al representar estos datos, se obtiene la gráfica de la Figura 4. Si se compara con la gráfica de la función lineal  $g(x) = 3x$ , se verifica que  $f(x)$  es una traslación de  $g(x)$  cinco unidades hacia abajo.

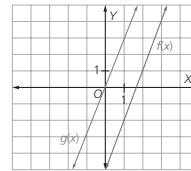


Figura 4

**Actividad resuelta**

**Resolución de problemas**

- En cierto experimento se midió la temperatura de un líquido sometido a un aumento gradual de temperatura. Los datos se muestran en la Tabla 4.

Tiempo en minutos ( $x$ )	0	1	2	3	4	5	...
Temperatura en $^{\circ}\text{C}$ ( $y$ )	12	24	36	48	60	72	...

Tabla 4

Representa estos datos gráficamente. ¿Qué tipo de función representan?

**Solución:**

Al graficar la relación dada entre el tiempo que transcurre y la temperatura del líquido, se obtiene una línea recta que no pasa por el origen (Figura 5). Esto significa que dicha relación es una función afín cuya constante de proporcionalidad es 12 y corta el eje  $Y$  en el punto  $(0, 12)$ .

Del razonamiento anterior se tiene que  $m = 12$  y  $b = 12$ , con lo cual puede deducirse que la expresión algebraica de la función es  $y = 12x + 12$ .

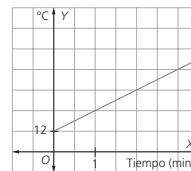


Figura 5

**CULTURA** del Buen Vivir

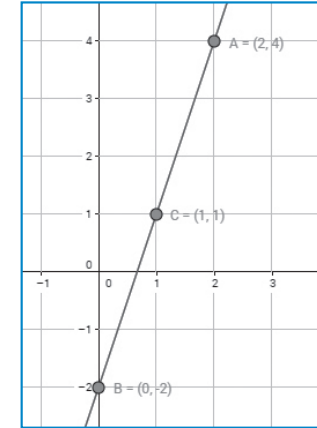


**La fortaleza**

El valor de la fortaleza surge cuando tenemos claros nuestros objetivos y proyectos personales.

- Cuando te enfrentas a una tarea difícil y complicada, ¿qué pensamientos te dan fortaleza?

su ley de asignación, así como fácil resulta obtener la ley de asignación al conocer dos puntos de la función y su corte con el eje  $y$ . Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra información suficiente para determinar la ley de asignación de la función afín.



Reemplazando los datos de los puntos A y C, obtenemos  $m$

$$m = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

Y el valor de la ordenada del punto B, obtenemos  $b$

$b = -2$ ; con esto la ecuación nos queda  $y = 3x - 2$

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Empiece la clase resolviendo una situación, en la que se pueda elaborar una tabla de datos para poder resolver, puede utilizar las situaciones del texto u otras. Lo importante es que en estas situaciones se pueda diferenciar la función del tipo  $f(x) = mx$  y la función  $f(x) = mx + b$  lineal y afín respectivamente.
- Pida que grafiquen en un plano cartesiano la situación ofrecida.
- Como un indicador de que sus estudiantes han comprendido las características de cada una de las funciones, es importante que estén en la capacidad de generar situaciones similares.

## Comunicación

2. a. 7; b.  $\frac{1}{2}$ ; c. -3; d. -5; e. 1; f. -1

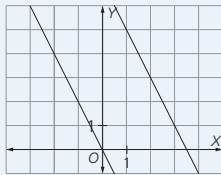
3. Lineales: d y g

Afines: b, f y h

Ninguna de las dos: a, c, e

4. a.  $m = -2$  y  $(0, 1)$       b.  $m = -3$  y  $(0, -15)$   
 c.  $m = -7$  y  $(0, 4)$       d.  $m = -1$  y  $(0, 10)$   
 e.  $m = -\frac{2}{7}$  y  $(0, -15)$       f.  $m = \frac{1}{5}$  y  $(0, -3)$

5. a.



Verificar la validez de las demás representaciones.

6. a. No lineal; b. Lineal; c. Afín; d. No lineal

## Razonamiento

7. b.

## Resolución de problemas

8. a. F; b. V

9. a.  $y = 2x + 20$ ; b. \$620

10. a. \$ 1 015 y \$ 2 015, respectivamente.

b.

x	100	150	250	300
y	1 015	1 515	2 515	3 015

c.  $y = 10x + 15$

Destrezas con criterios de desempeño: • Definir y reconocer funciones lineales en  $\mathbb{Z}$ , en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología.  
 • Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resolver problemas.

## Desarrolla tus destrezas

### Comunicación

- 2 Determina, en cada caso, cuál es la constante de proporcionalidad de la función.

- a.  $j(x) = 7x$       b.  $k(x) = \frac{1}{2}x$   
 c.  $l(x) = -3x$       d.  $g(x) = -5x$   
 e.  $p(x) = x$       f.  $f(x) = -x$

- 3 Indica si las siguientes funciones son lineales, afines o ninguna de las dos.

- a.  $g(x) = 25x^2 - 13$       b.  $h(x) = 2x + 4$   
 c.  $j(x) = 15^x$       d.  $k(x) = \frac{4}{3}x$   
 e.  $l(x) = 3$       f.  $f(x) = -4x + 5$   
 g.  $p(x) = x$       h.  $r(x) = -3(x + 5)$

- 4 Identifica la constante de proporcionalidad y el punto de corte con el eje de ordenadas de cada función.

- a.  $j(x) = -2x + 1$       b.  $f(x) = -3(x + 5)$   
 c.  $m(x) = 4 - 7x$       d.  $g(x) = -x + 10$   
 e.  $p(x) = -\frac{2}{7}x - 15$       f.  $r(x) = -3 + \frac{1}{5}x$

- 5 Representa en un mismo plano cartesiano cada función afín con su respectiva función lineal asociada.

- a.  $f(x) = -2x + 7$       b.  $g(x) = 9x - 3$   
 c.  $t(x) = 5 - 3x$       d.  $j(x) = 3 - 9x$   
 e.  $h(x) = x - 5$       f.  $k(x) = \frac{1}{2}x + 11$   
 g.  $m(x) = 2x + \frac{1}{2}$       h.  $n(x) = -\frac{2}{3} - 3x$

- 6 Representa en un plano cartesiano los valores de cada tabla. Luego, determina si corresponden a una función lineal, afín o no lineal.

a.

x	y = f(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Tabla 5

b.

x	y = f(x)
-2	-8
-1	-4
0	0
1	4
2	8

Tabla 6

c.

x	y = f(x)
-2	-8
-1	-3
0	2
1	7
2	12

Tabla 7

d.

x	y = f(x)
-2	-8
-1	1
0	0
1	-8
2	1

Tabla 8

### Razonamiento

- 7 Observa y responde.

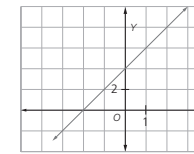


Figura 6

¿A cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la Figura 6?

- a.  $g(x) = -3x + 3$       b.  $h(x) = 2x + 4$   
 c.  $j(x) = -8x - 3$       d.  $k(x) = -\frac{4}{3}x + 5$   
 e.  $l(x) = 9$       f.  $f(x) = 4x - 50$   
 g.  $p(x) = x - 1$       h.  $r(x) = 1 - x$

### Resolución de problemas

- 8 La función  $f(x) = 4x + 9$  representa la variación del capital (en millones de dólares) de una empresa con  $x$  años de funcionamiento. ¿Estas afirmaciones son verdaderas o falsas?

- a. La función no es lineal, porque 9 y 4 son números cuadrados.  
 b. El capital inicial fue de nueve millones.

- 9 Por el alquiler de un auto, sin conductor, se cobra \$ 20 diarios más \$ 2 por kilómetro.

- a. Halla la función lineal que relaciona el costo diario del alquiler con el número de kilómetros y represéntala.  
 b. Si en un día se recorren 300 km, ¿cuánto debe pagarse por el alquiler?

- 10 Una empresa que transporta maletas establece sus tarifas de la siguiente manera: \$ 10 por kilómetro recorrido y \$ 15 por cada maleta transportada.

- a. ¿Cuánto costará trasladarse 100 km con una maleta?  
 ¿Cuánto costará trasladarse 200 km con una maleta?

- b. Completa la Tabla 8 considerando que se lleva una sola maleta:

Distancia en km (x)	100	150	250	300
Precio en USD (y)				

Tabla 9

- c. Expresa la fórmula de la función que relaciona la distancia en kilómetros y el valor del traslado de una sola maleta.

## 5 Pendiente de una recta

### Explora

En la Tabla 1, se muestra el número máximo de latidos del corazón de una persona sana mientras hace actividad física en un intervalo de 30 segundos.

Edad en años $x$	Número máximo de latidos $y$
20	100
30	95
40	90

Tabla 1

- ¿Cuál es la variación de la cantidad máxima de latidos cada 10 años?

### Ten en cuenta

Si las variables en una función lineal o afín no tienen ninguna dependencia, la tasa de cambio o pendiente es cero.

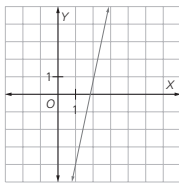


Figura 1

En la Tabla 1, se observa que el número de latidos del corazón disminuye a medida que aumenta la edad, pero también se infiere que el cambio sobre el número de los latidos del corazón es **constante**.

Este valor constante indica el cambio de una variable por unidad de cambio de la otra y es llamado **tasa de cambio**. Gráficamente, en el plano cartesiano, correspondería a la **pendiente** de la recta que modela la situación.

En general, en una función lineal  $y = f(x)$ , la razón de cambio de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente  $x$  se calcula mediante la expresión:

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son dos pares de valores de la función.

En la Tabla 2, se muestra que la tasa de cambio de los datos sobre los latidos del corazón es constante. Es decir, su pendiente es  $-0,5$ .

Solo las funciones lineales o afines tienen una tasa de cambio promedio constante.

Edad en años $x$	Número máximo de latidos $y$
20	100
30	95
40	90

Tabla 2

$$\frac{95 - 100}{30 - 20} = -0,5$$

$$\frac{90 - 95}{40 - 30} = -0,5$$

En una función lineal  $y = mx$  o en una función afín  $y = mx + b$ , la **constante de proporcionalidad**  $m$  corresponde a la **pendiente** de la recta mediante la cual se representa la función.

De acuerdo con lo anterior, tanto las funciones lineales como las funciones afines son **crecientes** en su dominio, si su pendiente es positiva y son **decrecientes** en su dominio, si su pendiente es negativa. Además, una función afín es **constante** si su pendiente es cero y corresponde a una recta paralela al eje  $X$ .

### Ejemplo 1

Para hallar la pendiente de la recta de la Figura 1, se consideran dos puntos que pertenezcan a ella, por ejemplo,  $(x_1, y_1) = (1, -4)$  y  $(x_2, y_2) = (2, 1)$ . Luego, se reemplazan los valores correspondientes en la expresión general de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-4)}{2 - 1} = 5.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta dada es 5.

### Actividad resuelta

Razonamiento

- 1 Estudia la función  $f(x) = 3x - 5$  a partir del análisis de su pendiente.

#### Solución:

La función afín  $f(x) = 3x - 5$  es creciente en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , porque la pendiente es positiva ( $3 > 0$ ). Su representación en el plano cartesiano es una recta que corta el eje  $Y$  en  $-5$ .

## Ampliación conceptual

### Función lineal.

En el caso de la función lineal  $f(x)=mx$ , se sabe que su gráfica pasa por el origen del plano cartesiano. Con esta información más la información proporcionada por la pendiente, se puede hacer un bosquejo muy aceptable de este tipo de función. Por ejemplo  $f(x)= 3x$ , para graficar esta función, se expresa el valor de la pendiente como un número racional, así  $3=3/1$ . Partiendo del origen (A) desplazamos en el eje horizontal las unidades indicadas por el denominador, en este caso 1 unidad (B) y luego se desplaza en el eje vertical las unidades indicadas por el numerador, 3 unidades (C). Por último, trazamos una recta que pase por A y C.

### Función afín.

Para graficar la función lineal  $f(x)=mx+b$ , se procede de manera similar al de la función lineal, con la diferencia que en lugar de partir del origen, se parte del corte con el eje  $y$ , como sabemos, este valor está dado por  $b$ . Por ejemplo, para graficar  $f(x)= 3x+2$ , graficamos el punto  $(0,b)$ , es decir  $(0,2)$  punto A; luego nos desplazamos 1 unidad en  $x$  (punto B) y 3 en  $y$  ( $m=3=3/1$ ) (punto C). Unimos C con A.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- a. Refuerce lo explicado con otros ejercicios, por ejemplo  $f(x) = 3/5 x - 2$
- b. Cuando la pendiente es negativa, se parte del corte con el eje vertical y se desplaza a la izquierda en lugar de a la derecha.

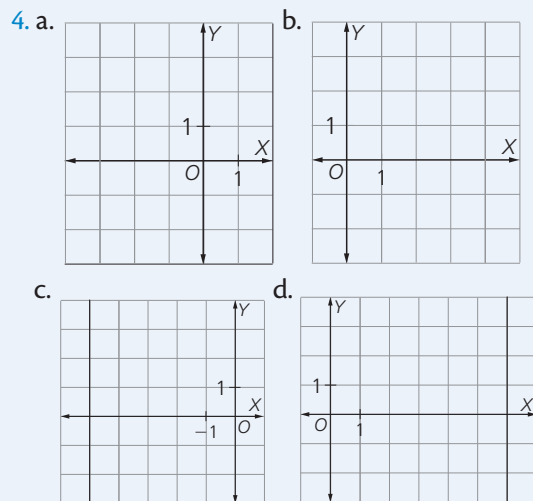
## Ejercitación

2. a.  $m = 1$     b.  $m = -1$     c.  $m = 0$   
 d.  $m = -\frac{6}{11}$ ; e.  $m = \frac{3}{2}$     f. *mes indeterminada.*

## Razonamiento

3.  
 a. Creciente. b. Decreciente. c. Constante.  
 d. Decreciente. e. Creciente.

## Comunicación



5. a.  $m = -2$     b.  $m = \frac{3}{2}$     c.  $m = -3$     d.  $m = 2$

## Razonamiento

6.  
 a. Constante. b. Decreciente. c. Creciente.  
 d. Creciente. e. Creciente. f. Decreciente.

## Resolución de problemas

7. a.  $y = \frac{5}{2}x + 50$

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología) e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente.

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

- 2 Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los  
 • puntos dados.  
 a.  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$     b.  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$   
 c.  $(-1, 4)$  y  $(2, 4)$     d.  $(-6, 4)$  y  $(5, -2)$   
 e.  $(-1, 4)$  y  $(-5, -2)$     f.  $(3, 4)$  y  $(3, -2)$

#### Razonamiento

- 3 Clasifica cada recta obtenida en la actividad 2 según  
 • sea creciente, decreciente o constante.

#### Comunicación

- 4 Lee y resuelve.  
 • Cuando la pendiente de una recta es indeterminada, dicha recta es vertical (paralela al eje Y). Por ejemplo,  $x = 3$  es la ecuación de una recta cuya pendiente no puede determinarse. Su gráfica se muestra en la Figura 2.

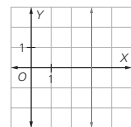


Figura 2

Traza la gráfica de las siguientes rectas.

- a.  $x = -3$     b.  $x = 4$   
 c.  $x = -5$     d.  $x = 6$

- 5 Calcula la pendiente de las rectas que se muestran en las figuras 3. a 6.

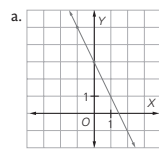


Figura 3

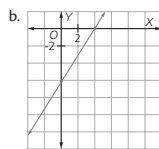


Figura 4

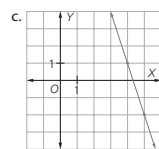


Figura 5

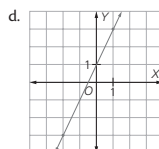


Figura 6

#### Razonamiento

- 6 Estudia las tablas de valores. Luego, clasifícalas,  
 • según corresponda, en funciones crecientes, decrecientes o constantes.

a.

x	y = f(x)
-2	7
-1	7
0	7
1	7
2	7

Tabla 3

b.

x	y = f(x)
-2	5,5
-1	5,25
0	5
1	4,75
2	4,5

Tabla 4

c.

x	y = f(x)
-2	9
-1	11
0	13
1	15
2	17

Tabla 5

d.

x	y = f(x)
-2	-12
-1	-10
0	-8
1	-6
2	-4

Tabla 6

e.

x	y = f(x)
-2	4
-1	6
0	8
1	10
2	12

Tabla 7

f.

x	y = f(x)
-2	120
-1	100
0	80
1	60
2	40

Tabla 8

#### Resolución de problemas

- 7 El encargado de pruebas de velocidad de una empresa aeronáutica desea conocer la velocidad de un avión en cierto intervalo de tiempo. Al realizar una medición del tiempo en minutos junto con la distancia recorrida en kilómetros obtuvo los datos de la Tabla 9.

Tiempo (m)	Distancia recorrida (km)
x	y
20	100
30	125
40	150

Tabla 9

- a. Halla una función afín lineal que modele la situación.

## 2

## Evaluación formativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

- A. Toda relación es un función
- B. Toda función es una relación
- C. Toda relación es reflexiva
- D. Toda función es transitiva

2. El recorrido de una función está dado por:

- A. Todos los números reales
- B. Todos los valores que la función toma en el eje x
- C. Todos los valores que la función toma en el eje y
- D. Todos los elementos del conjunto de llegada

3. Gráficamente una función es cuando al trazar:

- A. Paralelas al eje x interseca en un solo punto a la curva de la función
- B. Paralelas al eje y interseca en más de un punto a la curva de la función
- C. Paralelas al eje y interseca en un solo punto a la curva de la función
- D. Paralelas al eje x interseca en más de un punto a la curva de la función

4. Cuál de las siguientes relaciones es función:

- A.  $\{(2, 3); (-2, 4); (3, -5); (2, 2)\}$
- B.  $\{(1, 3); (-2, 4); (3, -5); (1, 2)\}$
- C.  $\{(2, 3); (-2, 3); (3, 3); (1, 3)\}$
- D.  $\{(0, 3); (-2, 4); (3, -5); (0, 2)\}$

5. La función  $f(x) = 2x^3 - 1$  es:

- A. par
- B. impar
- C. ninguna
- D. exponencial

6. La monotonía determina si la función es:

- A. par e impar
- B. sobreyectiva
- C. biyectiva
- D. creciente o decreciente

1. Cuál de los siguientes enunciados es verdadero:
  - A. Toda relación es un función
  - B. Toda función es una relación
  - C. Toda relación es reflexiva
  - D. Toda función es transitiva
2. El recorrido de una función está dado por:
  - A. Todos los números reales
  - B. Todos los valores que la función toma en el eje x
  - C. Todos los valores que la función toma en el eje y
  - D. Todos los elementos del conjunto de llegada
3. Gráficamente una función es cuando al trazar:
  - A. Paralelas al eje x interseca en un solo punto a la curva de la función
  - B. Paralelas al eje y interseca en más de un punto a la curva de la función
  - C. Paralelas al eje y interseca en un solo punto a la curva de la función
  - D. Paralelas al eje x interseca en más de un punto a la curva de la función
4. Cuál de las siguientes relaciones es función:
  - A.  $\{(2, 3); (-2, 4); (3, -5); (2, 2)\}$
  - B.  $\{(1, 3); (-2, 4); (3, -5); (1, 2)\}$
  - C.  $\{(2, 3); (-2, 3); (3, 3); (1, 3)\}$
  - D.  $\{(0, 3); (-2, 4); (3, -5); (0, 2)\}$
5. La función  $f(x) = 2x^3 - 1$  es:
  - A. par
  - B. impar
  - C. Ninguna (la función no cumple con ninguna condición de paridad)
  - D. exponencial
6. La monotonía determina si la función es:
  - A. par e impar
  - B. sobreyectiva
  - C. biyectiva
  - D. creciente o decreciente

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un conjunto del producto cartesiano.	1			
Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica con diagramas de Venn determinando su dominio y recorrido en $Z$	3, 4			
Definir y reconocer una función real identificando sus características dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes	2, 5, 6			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

6

Ecuación de la recta

Explora

La recta de la Figura 1 pasa por el punto (1, 3) y tiene como pendiente el valor  $-\frac{1}{4}$ .

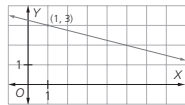


Figura 1

• ¿Cuál es la ecuación de la recta?

Ten en cuenta

La pendiente de una recta es la inclinación que tiene con respecto al eje positivo de las x. La pendiente  $-\frac{1}{4}$  indica que esta disminuye una unidad y por cada cuatro unidades en x.



CULTURA del Buen Vivir

La fortaleza

El valor de la fortaleza permite afrontar la realidad de las cosas con madurez y equilibrio emocional.

- Cuando tu mejor amigo pasa por momentos difíciles, ¿cómo puedes inspirar en él el valor de la fortaleza?

6.1 Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto

Cuando se conocen la pendiente ( $m$ ) y un punto  $(x_1, y_1)$ , puede utilizarse la expresión algebraica de la pendiente para determinar la ecuación de una recta.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow (x - x_1)m = (y - y_1) \Rightarrow (y - y_1) = m(x - x_1)$$

A la expresión  $(y - y_1) = m(x - x_1)$  se le conoce como **ecuación punto-pendiente**.

Para el caso de la recta que pasa por el punto (1,3) y tiene pendiente  $-\frac{1}{4}$ , se reemplazan estos valores en la expresión general de ecuación punto-pendiente y se obtiene:

$$\begin{aligned} (y - y_1) &= m(x - x_1) \Rightarrow (y - 3) = -\frac{1}{4}(x - 1) \\ y - 3 &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \\ y &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + 3 \\ y &= -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{aligned}$$

← Ecuación de la recta

La ecuación de una recta dados la pendiente  $m$  y un punto  $(x_1, y_1)$  es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

A esta ecuación se le denomina **ecuación punto-pendiente**.

Ejemplo 1

La ecuación de la recta que pasa por el punto  $(-3, 5)$  y tiene pendiente 2 se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (y - 5) &= 2[x - (-3)] \quad \text{Se reemplaza en la ecuación punto-pendiente.} \\ y - 5 &= 2x + 6 \quad \text{Se aplica la propiedad distributiva.} \\ y &= 2x + 6 + 5 \quad \text{Se despeja la variable y.} \\ y &= 2x + 11 \quad \text{Se obtiene la ecuación de la recta.} \end{aligned}$$

Para elaborar la gráfica, basta con considerar que la recta pasa por los puntos  $(-3, 5)$  y  $(-5, 1)$ . Observa la Figura 2.

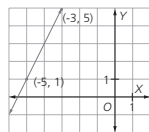


Figura 2

Ejemplo 2

La ecuación de la recta que pasa por el punto  $(-2, -1)$  y cuya pendiente es  $-1$  es:

$$\begin{aligned} [y - (-1)] &= -1[x - (-2)] \\ y + 1 &= -x - 2 \\ y &= -x - 2 - 1 \\ y &= -x - 3 \end{aligned}$$

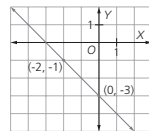


Figura 3

Ampliación conceptual

Es muy común que para el estudio de la ecuación de la recta se divida en varios casos, pero esto no contribuye a desarrollar el espíritu matemático. La idea básica de la matemática es que un modelo sirve para varias situaciones. Partiendo de este principio, podemos tomar el modelo definido anteriormente, esto es  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

Para el caso punto pendiente,  $m = 2$  y  $P(3, 5)$ ; sustituimos en el modelo los datos, para ello, fijamos las variables  $y_2, x_2$  por  $y, x$  y obtenemos:

$$2 = \frac{y - 5}{x - 3}$$

$$2(x - 3) = y - 5,$$

$$2(x - 3) + 5 = y,$$

$$2x - 1 = y$$

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Recuerde a sus estudiantes que por dos puntos únicamente pasa una recta, es por eso que cuando se estudia la ecuación de la recta es suficiente conocer dos puntos que pertenezcan a la recta para poder calcular su ecuación.
- Permita que puedan utilizar distintos métodos, el expuesto en este apartado y el expuesto en el libro del estudiante.
- Genere un espacio de discusión para obtener ventajas y desventajas en cada uno de los métodos.

## Ampliación conceptual

Al estudiar las pendientes de dos rectas, nos encontramos que estas o bien son paralelas o bien se cortan en un punto. Si son paralelas, o bien no tienen ningún punto en común o bien tienen infinitos puntos en común. Si se cortan en un solo punto, o bien son paralelas o no son paralelas.

En el caso de que las rectas sean paralelas, bastará comprobar por simple inspección de que sus pendientes son iguales; pero si queremos saber si tienen o no puntos en común, debemos comparar los valores del corte con el eje  $y$  (en la expresión  $y = mx + b$ , el valor de  $b$ ). Si los valores de  $b$  son los mismos, las rectas tienen infinitos puntos en común, es decir se sobrepone la una sobre la otra. Si los valores son distintos, no hay puntos en común.

Para el caso en que las rectas se cortan en un solo punto, es necesario identificar si el producto de las pendientes es  $-1$  o no. Si el producto de las pendientes es  $-1$ , las rectas son perpendiculares y si en lugar de esto, el producto de las pendientes es distinto de  $-1$ , las rectas se cortan en un solo punto pero no son perpendiculares.

## ■ Actividades colaborativas

1. Identifique grupos de trabajo.
2. Seleccione un responsable del grupo.
3. Facilite al grupo una batería de ejercicios en los cuales puedan discutir las posiciones relativas de las rectas en función del análisis de sus pendientes

- Destrezas con criterios de desempeño:**
- Determinar la ecuación de la recta, conocidos algunos de sus elementos.
  - Reconocer a la recta como la solución gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas en  $\mathbb{R}$ .

### 6.2 Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Para determinar la ecuación de la recta dados dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , se debe:

1. Calcular la pendiente por medio de la expresión  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .
2. Usar la pendiente  $m$  calculada y uno de los puntos  $(x_p, y_p)$  o  $(x_1, y_1)$  para reemplazar en la ecuación punto-pendiente  $(y - y_1) = m(x - x_1)$ .

#### Ejemplo 3

En la Figura 4, se observa la recta que pasa por los puntos  $(-4, 5)$  y  $(2, 1)$ .

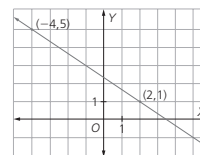


Figura 4

Para encontrar la ecuación de la recta conociendo dos puntos de la misma, se emplea la expresión algebraica de la pendiente, así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{2 - (-4)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

Luego, con  $m = -\frac{2}{3}$  y uno de los puntos, en este caso  $(2, 1)$ , se obtiene la ecuación de la recta en la forma **punto-pendiente**.

$$\begin{aligned} (y - y_1) &= m(x - x_1) \Rightarrow (y - 1) = -\frac{2}{3}(x - 2) \\ \Rightarrow y - 1 &= -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 1 \\ \Rightarrow y &= -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \quad \text{Ecuación de la recta} \end{aligned}$$

#### Actividad resuelta

Ejercitación

- 1 Determina la ecuación de la recta correspondiente a los valores asociados a cierta función afín que se registran en la Tabla 1.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2
$y$	-14	-11	-8	-5	-2	1

Tabla 1

**Solución:**

Sean  $(x_1, y_1) = (-1, -8)$  y  $(x_2, y_2) = (2, 1)$ , primero se calcula la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-8)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$$

Luego, se reemplaza en la **ecuación punto-pendiente**:

$$\begin{aligned} (y - y_2) &= m(x - x_2) \Rightarrow (y - 1) = 3(x - 2) \\ \Rightarrow y - 1 &= 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 6 + 1 \\ \Rightarrow y &= 3x - 5 \end{aligned}$$

#### Razonamiento matemático

##### Ecuación de la recta

Los vértices de un triángulo son los puntos  $M(-1, -3)$ ,  $G(2, 5)$  y  $B(3, -4)$ .

- Halla la ecuación de la recta que contiene a cada uno de los lados del triángulo  $MGB$ .
- Elabora la gráfica de la situación planteada en un plano cartesiano.

#### Ten en cuenta

- La ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto  $(x_p, y_p)$  es  $y = y_p$ , y su pendiente es cero.
- La ecuación de la recta vertical que pasa por el punto  $(x_p, y_p)$  es  $x = x_p$ , y tiene pendiente indefinida.

## 6 Ecuación de la recta

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

- 2 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P$  y tiene pendiente  $m$  en cada caso.
- a.  $P(-7, 4)$  y  $m = 5$
  - b.  $P(-1, 7)$  y  $m = -2$
  - c.  $P(5, 6)$  y  $m = 3$
  - d.  $P(2, 1)$  y  $m = -\frac{1}{2}$
  - e.  $P(0, 1)$  y  $m = -\frac{3}{2}$

- 3 Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos.

- a.  $(1, -5)$  y  $(-2, 1)$
- b.  $(2, 14)$  y  $(-1, -7)$
- c.  $(-2, -2)$  y  $(0, 10)$
- d.  $(-3, 5)$  y  $(-4, -1)$
- e.  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$
- f.  $(-5, 3)$  y  $(4, 1)$
- g.  $(1, \frac{13}{2})$  y  $(6, -4)$
- h.  $(3, \frac{29}{2})$  y  $(1, \frac{13}{2})$
- i.  $(3, \frac{23}{5})$  y  $(-1, -\frac{1}{5})$
- j.  $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$  y  $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$

#### Razonamiento

- 4 Selecciona, en cada caso, a cuál ecuación de la recta corresponde la ecuación punto-pendiente dada.

- a.  $(y + 2) = 4(x - 2)$ 
  - $y = 4x - 10$
  - $y = 4x$
  - $y = 4x$
  - $y = 4x + 10$
- b.  $(y - 3) = 2(x + 1)$ 
  - $y = 2x - 5$
  - $y = 2x$
  - $y = 5x$
  - $y = 2x + 5$
- c.  $(y + 4) = -3(x - 3)$ 
  - $y = 3x - 5$
  - $y = -3x$
  - $y = 3x$
  - $y = -3x + 5$
- d.  $(y - 8) = -5(x + 1)$ 
  - $y = -5x + 3$
  - $y = -5x$
  - $y = 5x$
  - $y = 5x - 3$

#### Razonamiento

- 5 Determina si es verdadera o falsa cada afirmación.
- a. La recta que pasa por los puntos  $(3, -2)$  y  $(4, 0)$  tiene por ecuación  $y = -2x + 8$ .
  - b. La ecuación de la recta que pasa por  $(-5, 1)$  y  $(-6, 3)$  es  $y = 2x + 9$ .
  - c. La recta cuya ecuación es  $y = -6$  pasa por los puntos  $(-1, 6)$  y  $(-2, 6)$ .
  - d. La ecuación de la recta que pasa por  $(-7, 8)$  y por  $(-6, 11)$  es  $y = 3x + 29$ .
  - e. La ecuación de la recta que pasa por  $(0, -3)$  y  $(4, -1)$  es  $y = \frac{1}{2}x - 3$ .
  - f. La recta que pasa por los puntos  $(2, -6)$  y  $(-3, 14)$  tiene por ecuación  $y = -4x + 2$ .
  - g. La recta que pasa por los puntos  $(-2, 4)$  y  $(4, 7)$  tiene por ecuación  $y = \frac{1}{2}x + 5$ .
  - h. La recta que pasa por los puntos  $(-1, -\frac{13}{2})$  y  $(0, -\frac{5}{2})$  tiene por ecuación  $y = 5x + \frac{3}{2}$ .
  - i. La recta que pasa por los puntos  $(-5, 2)$  y  $(-9, -6)$  tiene por ecuación  $y = 3x - 3$ .

#### Comunicación

- 6 Calcula la pendiente de cada recta. Luego, encuentra su ecuación considerando los puntos que pertenecen a ella.

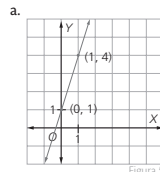


Figura 5

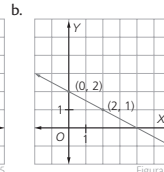


Figura 6

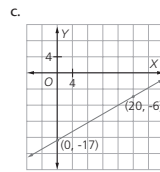


Figura 7

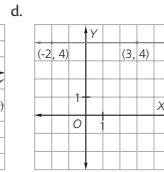


Figura 8

APLICA © EDICIONES SM

### Ejercitación

- 2.
- a.  $y = 5x + 39$
  - b.  $y = -2x + 5$
  - c.  $y = 3x - 9$
  - d.  $y = -\frac{1}{2}x + 2$
  - e.  $y = -\frac{3}{2}x + 1$
- 3.
- a.  $y = -2x - 3$
  - b.  $y = 7x$
  - c.  $y = 6x + 10$
  - d.  $y = 6x + 23$
  - e.  $y = -x - 1$
  - f.  $y = -\frac{2}{9}x + \frac{17}{9}$
  - g.  $y = -\frac{21}{10}x + \frac{43}{5}$
  - h.  $y = 4x + \frac{5}{2}$
  - i.  $y = \frac{6}{5}x + 1$
  - j.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{8}$

### Razonamiento

- 4.
- a.  $y = 4x - 10$
  - b.  $y = 2x + 5$
  - c.  $y = -3x + 5$
  - d.  $y = -5x + 3$
- 5.
- a. F; b. F; c. F; d. V; e. V; f. V; g. V; h. F; i. F

### Comunicación

- 6.
- a.  $y = 3x + 1$
  - b.  $y = -\frac{1}{2}x + 2$
  - c.  $y = \frac{11}{20}x - 17$
  - d.  $m = 0, y = 4$

Destreza con criterios de desempeño: Determinar la ecuación de la recta, conocidos algunos de sus elementos y resolver problemas de aplicación.

## Comunicación

7.

- a.  $y = -x + 5$       b.  $y = -2$   
 c.  $y = -\frac{3}{2}x + 1$       d.  $y = \frac{1}{2}x - 3$   
 e.  $x = -4$       f.  $y = -3x + 6$

## Resolución de problemas

8.

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$$

$$y = -6x - 16$$

$$y = -2x + 7$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

9. Isósceles y rectángulo.

10.

- a.  $y = 20x + 50$       b. 12 meses.

11.

- a.  $y = -\frac{x}{3} + 90$       b. \$ 102

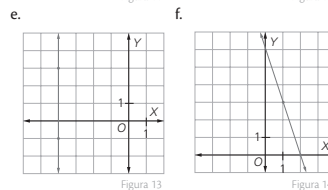
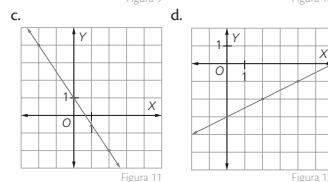
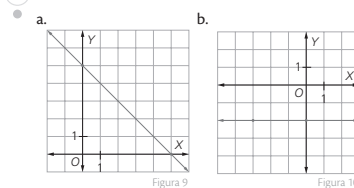
## Actividades TIC

Con la ayuda de un un graficador, solicite que verifiquen si las ecuaciones encontradas en el ejercicio 8, determinan la figura 15.

Del mismo ejercicio 8, una vez verificado con el graficador, pregunte a sus estudiantes sobre el dominio y recorrido de cada una de las ecuaciones, de tal manera que se determinen los lados de la figura 15.

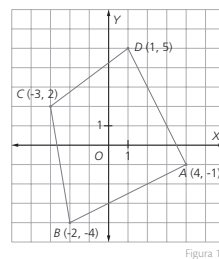
## Comunicación

7) Determina la ecuación de cada recta.



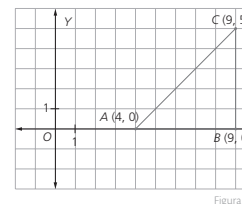
## Resolución de problemas

8) Ten en cuenta la información de la Figura 15. Luego, responde la pregunta.



¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del cuadrilátero ABCD?

9) Observa el triángulo de la Figura 16.



¿Qué clase de triángulo es ABC? Justifica tu respuesta.

10) Felipe quiere comprar un videojuego. Tiene \$ 50 de su cumpleaños, pero el videojuego original que quiere cuesta \$ 290, así que tendrá que ahorrar para juntar el resto. Su plan es ahorrar \$ 20 al mes hasta que consiga la cantidad que necesita.

- a. Escribe una ecuación que le ayude a saber cuándo tendrá suficiente dinero para comprar el videojuego. Ten en cuenta que  $x$  será el tiempo en meses y  $y$  será la cantidad de dinero ahorrado. Pasado el primer mes Felipe tiene \$ 70, lo que significa que cuando  $x = 1$ ,  $y = 70$ , es decir, la recta pasa por el punto  $(1, 70)$ . También sabemos que Felipe espera ahorrar \$ 20 al mes. Esto equivale a la tasa de cambio o pendiente.  
 b. ¿Cuántos meses deben pasar para que Felipe pueda comprar el videojuego?

11) Una empresa de turismo ha observado que cuando el precio de un viaje es de \$ 150 se venden 40 asientos, pero si el precio sube a \$ 180, las ventas bajan a 30 asientos.



- a. Encuentra la ecuación de la recta que representa la situación y dibuja su gráfica.  
 b. Determina el precio del pasaje si la venta sube a 56 asientos.

## 7 Relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares

### Explora

Un técnico A de reparaciones de electrodomésticos cobra \$ 15 por la visita más \$ 5 por cada hora de trabajo. Otro técnico B cobra \$ 10 por la visita más \$ 5 por cada hora de trabajo.

- En algún momento, ¿los técnicos podrían ganar la misma cantidad de dinero por igual cantidad de horas trabajadas?

Una manera de resolver la situación consiste en analizar el comportamiento del dinero ganado por cada técnico. Para ello, se plantean las siguientes expresiones en función de las horas de trabajo ( $x$ ).

Técnico A:  $y = 5x + 15$   
Técnico B:  $y = 5x + 10$

Estas ecuaciones expresan funciones afines. Al representarlas en el mismo plano se observa que las rectas correspondientes no tienen puntos en común, es decir, son **rectas paralelas** (Figura 1).

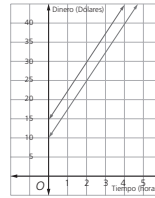


Figura 1

En el contexto planteado, esto significa que, en ningún momento, los técnicos ganan la misma cantidad de dinero por igual cantidad de horas trabajadas.

Por otra parte, con el análisis conjunto de las ecuaciones y de las gráficas, se concluye que estas rectas tienen la misma pendiente.

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente.

### Ejemplo 1

Para determinar si las rectas  $y = 4x + 1$  y  $y = 4x - 7$  son paralelas, basta con analizar sus pendientes.

$$\text{Recta 1: } y = 4x + 1 \Rightarrow m_1 = 4$$

$$\text{Recta 2: } y = 4x - 7 \Rightarrow m_2 = 4$$

Lo anterior permite concluir que las rectas dadas son paralelas, pues tienen la misma pendiente. Sus gráficas se muestran en la Figura 2.

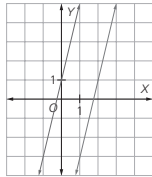


Figura 2

Dos rectas son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es igual a  $-1$ .

### Ejemplo 2

Dadas las rectas  $y = 2x + 1$  y  $y = -0,5x - 7$ , se observa que:

$$\text{Recta 1: } y = 2x + 1 \Rightarrow m_1 = 2$$

$$\text{Recta 2: } y = -0,5x - 7 \Rightarrow m_2 = -0,5.$$

Además:

$$m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot (-0,5) = -1,$$

por lo tanto, las rectas dadas son perpendiculares (Figura 3).

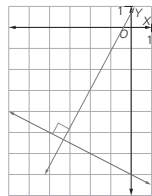


Figura 3

### Actividad resuelta

Razonamiento

- Encuentra una recta que sea perpendicular a la recta  $y = 5x + 3$ , que pase por el punto  $(3, 0)$ .

**Solución:**

Sea  $m_1 = 5$  la pendiente de la recta dada, es necesario encontrar el valor de  $m_2$  tal que  $m_1 \cdot m_2 = -1$ . Como el valor que satisface la igualdad es  $-\frac{1}{5}$  entonces se asume que  $m_2 = -\frac{1}{5}$ . Usando una ecuación punto-pendiente, se encuentra que la ecuación buscada es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 0) = -\frac{1}{5}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

APLICA © EDICIONES SM

## Ampliación conceptual

Al estudiar las pendientes de dos rectas, nos encontramos que estas o bien son paralelas o bien se cortan en un punto. Si son paralelas, o bien no tienen ningún punto en común o bien tienen infinitos puntos en común. Si se cortan en un solo punto, o bien son paralelas o no son paralelas.

En el caso de que las rectas sean paralelas, bastará comprobar por simple inspección de que sus pendientes son iguales; pero si queremos saber si tienen o no puntos en común, debemos comparar los valores del corte con el eje  $y$  (en la expresión  $y = mx + b$ , el valor de  $b$ ). Si los valores de  $b$  son los mismos, las rectas tienen infinitos puntos en común, es decir se sobrepone la una sobre la otra. Si los valores son distintos, no hay puntos en común.

Para el caso en que las rectas se cortan en un solo punto, es necesario identificar si el producto de las pendientes es  $-1$  o no. Si el producto de las pendientes es  $-1$ , las rectas son perpendiculares y si en lugar de esto, el producto de las pendientes es distinto de  $-1$ , las rectas se cortan en un solo punto pero no son perpendiculares.

## ■ Actividades colaborativas

- Identifique grupos de trabajo.
- Seleccione un responsable del grupo.
- Facilite al grupo una batería de ejercicios en los cuales puedan discutir las posiciones relativas de las rectas en función del análisis de sus pendientes

## Ejercitación

2. a. Paralelas  $m = 4$       b. No son paralelas.  
 c. Paralelas  $m = -6$       d. Paralelas  $m = 2$   
 e. No son paralelas.      f. No son paralelas.  
 g. No son paralelas.
3. a. No son perpendiculares.  
 b. No son perpendiculares.  
 c. Perpendiculares  
 d. Perpendiculares  
 e. No son perpendiculares

## Razonamiento

4. Son perpendiculares
5. a. Paralelas  
 b. Perpendiculares  
 c. Ni paralelas ni perpendiculares.  
 d. Ni paralelas ni perpendiculares.

## Comunicación

6. a.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$       b.  $y = \frac{1}{5}x + \frac{27}{5}$   
 c.  $y = -\frac{x}{5} - \frac{6}{5}$       d.  $y = 6x + 10$   
 e.  $y = \frac{5}{3}x - 13$
7. a.  $y = \frac{4}{7}x - \frac{1}{7}$       b.  $y = -\frac{7}{4}x - \frac{5}{2}$

## Resolución de problemas

- 8.
- a. Para AB:  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$  Para BC:  $y = -3x + 30$   
 b. Sí

## Desarrolla tus destrezas

### Ejercitación

2. Indica, en cada caso, si las rectas dadas son paralelas o no. Justifica tus respuestas.
- a.  $y = 4x - 2$  y  $y = 4x + 3$   
 b.  $y = -\frac{2}{3}x + 6$  y  $y = -\frac{3}{2}x + 1$   
 c.  $y = -6x - 2$  y  $y = -6x - \frac{1}{4}$   
 d.  $y = 2x + \frac{7}{3}$  y  $y = 2x - 7$   
 e.  $y = -\frac{1}{4}x + 11$  y  $y = -4x + 11$   
 f.  $y = 14 - 7x$  y  $y = 7 - 14x$   
 g.  $y = 2x - 1$  y  $y = 1 - 2x$
3. Estudia la pendiente de cada recta. Luego, indica si las rectas de cada par son perpendiculares o no.
- a.  $y = -\frac{3}{4}x + 7$  y  $y = -\frac{4}{3}x - 1$   
 b.  $y = 9 - 4x$  y  $y = -\frac{1}{4}x + 3$   
 c.  $y = 3x - 1$  y  $y = 1 - \frac{1}{3}x$   
 d.  $y = -x - \frac{1}{5}$  y  $y = x + 5$   
 e.  $y = 7x + \frac{1}{4}$  y  $y = 7x - \frac{1}{7}$

### Razonamiento

4. Determina si las rectas cuyos valores se registraron en las Tablas 1 y 2 son paralelas o perpendiculares.

x	y = f(x)
-2	6
-1	5,5
0	5
1	4,5
2	4

Tabla 1

x	y = f(x)
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Tabla 2

5. Deducir si, en cada caso, las rectas son paralelas o perpendiculares.
- a. Una recta que pasa por los puntos (2, 11) y (-1, 2) y otra recta que pasa por (0, -4) y (-2, -10).  
 b. Una recta que pasa por los puntos (-2, -7) y (1, 5) y otra recta que pasa por (4, 1) y (-8, 4).  
 c. Una recta que pasa por los puntos (3, 1) y (-2, -2) y otra recta que pasa por (5, 5) y (4, -6).  
 d. Una recta que pasa por los puntos (0, 1) y (-2, 1) y otra recta que pasa por los puntos (0, 0) y (-4, 2).

### Comunicación

6. Encuentra las rectas perpendicular o paralela a la recta dada, según se indique.
- a. La ecuación de la recta perpendicular a  $y = -3x + 5$  que pasa por el punto (2, 6).  
 b. La ecuación de la recta paralela a la recta  $x - 5y = 15$  que pasa por el punto (-2, 5).  
 c. La ecuación de la recta perpendicular a  $y = -3 + 5x$  que pasa por el punto (4, -2).  
 d. La ecuación de la recta paralela a la recta  $y = 6x - 9$  que pasa por el punto (-1, 4).  
 e. La ecuación de la recta paralela a  $0 = 7 - 3y + 5x$  que pasa por el punto (9, 2).
7. Observa la gráfica de la Figura 4. Luego, realiza lo que se indica a continuación.

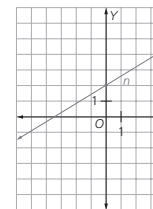


Figura 4

- a. Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta  $n$ , que pasa por el punto (2, 1).  
 b. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta  $n$ , que pasa por el punto (-2, 1).

### Resolución de problemas

8. En la Figura 5, se observa un triángulo ABC.

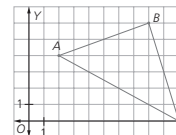


Figura 5

- a. Encuentra la ecuación de las rectas que contienen los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ .  
 b. ¿Puede afirmarse que el triángulo es rectángulo? Explica tu respuesta.

## Caso Similar al ejercicio 5 de la Pág. 67

1. Deduce si la recta que pasa por los puntos (2, 11) y (21, 2) y otra recta que pasa por (0, 24) y (22, 210) son paralelas o perpendiculares.

Una recta es muy importante que comunique a sus estudiantes que graficar las dos rectas únicamente es un recurso para orientar nuestro accionar. La manera correcta y precisa es encontrar las pendientes y compararlas.

En este sentido, identificamos con nombres a cada punto, así:

A(2, 11) y B(21, 2); C(0, 24) y D(22, 210).

Calculamos la pendiente de la recta que pasa A y B

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 11}{21 - 2} = \frac{-9}{19}$$

del mismo modo calculamos la pendiente de la recta que pasa por C y D

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{210 - 24}{22 - 0} = \frac{186}{22} = \frac{93}{11};$$

Claramente podemos ver que las rectas no son paralelas en virtud de que sus pendientes no son iguales. Tampoco son perpendiculares porque el producto de sus pendientes es distinto de  $-1$ .

## Ejercicios del libro Pág. 67 ejercicio 8

2. Para resolver el literal a. se hace necesario fijar los puntos que se encuentran en el gráfico A (2,4); B (8,6) y C (10,0). Ahora procedemos a calcular la pendiente de la recta que pasa por AB.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 4}{8 - 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \text{ fijamos un punto en la fórmula de la pendiente}$$

y reemplazamos el valor calculado, así determinamos la ecuación de la recta AB:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{y - 4}{x - 2} \\ 1(x - 2) &= 3(y - 4), \\ x - 2 &= 3y - 12 \\ x - 2 + 12 &= 3y, \\ (x + 10)/3 &= y \end{aligned}$$

Del mismo modo calculamos la ecuación de la recta que pasa por BC

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{10 - 8} = \frac{-6}{2} = -3; \text{ fijamos un punto en la fórmula de la pendiente y}$$

reemplazamos el valor calculado, así obtenemos la ecuación de la recta BC:

$$\begin{aligned} -3 &= \frac{y - 6}{x - 8} \\ -3(x - 8) &= y - 6, \\ -3x - 24 &= y - 6, \\ -3x - 24 + 6 &= y, \\ -3x - 18 &= y. \end{aligned}$$

Para afirmar o negar que el triángulo es o no rectángulo, comparamos los valores de las pendientes obtenidas. En este sentido, se puede afirmar que el triángulo es rectángulo, porque el producto de sus pendientes es  $-1$  ( $(1/3) * (-3) = -1$ )

UNIDAD  
**2**

## Evaluación sumativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Se tiene dos grupos de estudiantes. El primer grupo corresponde a José, Mario y Luis; el segundo grupo está conformado por Yanira, Sofía, Luzmila y Rosa. Con el fin de realizar una presentación por fin de año, se relacionan los dos grupos y se forman parejas de baile. Grafica la situación, de tal modo que la relación sea una función.

2. Completa la siguiente tabla, grafica en el plano cartesiano y determina la monotonía para  $x > 2$  y para  $x < 2$ .

X	-1	0	1	2	3	4	5
y	-9	-10		-6	-1		15

3. De las siguientes funciones escoge una función par y una impar y graficalas en el plano cartesiano.  $y = -3x$ ;  $y = -3x + 2$ ;  $y = x^2 + 1$ ;  $y = (x + 1)^2$

4. Escribe dos semejanzas y dos diferencias entre la función lineal y la función afín.

5. Escribe la ecuación de la recta lineal que pasa por el punto (3, 2).

6. Escribe una ecuación de la recta lineal afín que pase por  $(3, 2)$ .

7. Dibuja en el plano cartesiano los puntos  $A(0, 2)$ ;  $B(1, 3)$ ;  $C(3, 1)$ ;  $D(2, 0)$ . Únelos y determina si se trata de un rectángulo, justifica tu respuesta.

8. Encuentra las ecuaciones de las rectas de dos lados opuestos de la figura del problema anterior y determina si son paralelas, justifica tu respuesta.

9. Determina si la recta  $y = 3x + 5$  se corta o no con la recta  $6y = -3x + 6$ , justifica tu respuesta.

UNIDAD

3

Evaluación diagnóstica

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Calcule la ecuación de la recta que tiene pendiente  $-3$  y corta el eje  $y$  en el punto  $(0, 4)$ , para que seleccione la respuesta.

A.  $y = 3x + 4$       B.  $y - 3x = 4$

C.  $y = -3x + 4$       D.  $3x - y = -4$

2. Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(-2, 1)$  y  $(-3, 4)$ , para que seleccione la respuesta.

A.  $y = 3x + 3$       B.  $y - 3x = 4$

C.  $y = -3x + 5$       D.  $3x + y = -5$

3. El dominio de la función lineal es el conjunto de los números:

A. naturales      B. enteros

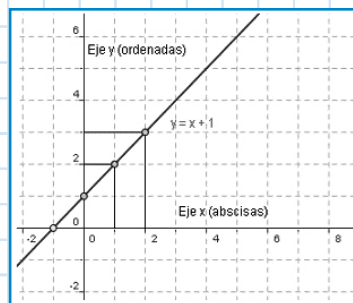
C. racionales      D. reales

4. Dada la función  $f(x + 1) = 2x - 1$  calcule  $f(-1)$

A. 0      B.  $-3$

C.  $-5$       D. 1

5. Según el gráfico de la función.



Determine el intervalo donde la imagen de al función es negativa.

A.  $f(x) < 0$  cuando  $x < 1$

B.  $f(x) < 0$  cuando  $x < -1$

C.  $f(x) > 0$  cuando  $x > 1$

D.  $f(x) > 0$  cuando  $x > -1$

6. Empareje las funciones con sus definiciones.

	Función
A	Lineal
B	Afin
C	Par
D	Impar

	Definición
1	$f(x) = f(-x)$
2	$f(-x) = -f(x)$
3	$f(x) = mx$
4	$f(x) = mx + b$

A. A1, B2, C3, D4

B. A3, B4, C1, D2

C. A4, B1, C2, D3

D. A2, B4, C1, D3

7. Empareje las ecuaciones de las rectas de tal forma que sean paralelas.

	Ecuación 1
A	$2x - y = 1$
B	$5x + y = 2$

	Ecuación 2
1	$x + 2y = 3$
2	$4x - 2y = 4$
3	$x - 5y = -3$
4	$-25x - 5y = 10$

A. A1, B2    B. A2, B3    C. A3, B4    D. A2, B4

8. En una cartuchera hay 2 esferográficos de color azul, 3 de color verde y 2 de color rojo. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un esferográfico de color verde?

A.  $\frac{3}{5}$     B.  $\frac{3}{7}$     C.  $\frac{4}{5}$     D.  $\frac{1}{3}$

9. A una fiesta asistieron 60 personas distribuidas según sus edades que se presentan en la siguiente tabla:

Edad	Persona asistentes
7	30
10	20
31	10

La edad promedio en años de las personas que asistieron a la fiesta es:

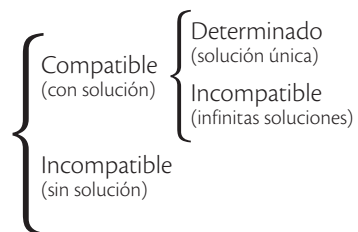
A. 18    B. 15    C. 12    D. 10

# Propósito de la unidad

## Bloque de álgebra y funciones:

La finalidad de esta unidad es, que el estudiante reconozca el dominio y rango de la función lineal y pueda trazar sin ningún inconveniente rectas paralelas, perpendiculares u oblicuas que es el punto de partida para hablar de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y de las soluciones de un S.E.L., cuyas soluciones pueden ser única solución, infinitas soluciones y no tiene solución.

Los sistemas lineales pueden ser



Para determinar la solución de un sistema compatible o incompatible se puede aplicar el método gráfico o métodos analíticos como el método de sustitución, reducción, igualación, Regla de Cramer o Método de Gauss con este conocimiento el estudiante podrá modelizar un sistema dado una situación problemática y obtener su solución.

Por otro lado, el estudiante podrá solucionar sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas graficando e identificando la región factible que es justamente donde el sistema de inecuaciones existe.

## Bloque de geometría y medida:

Se hace necesario para el trazo de rectas sean estas paralelas, perpendiculares u oblicuas por lo que el

estudiante debe utilizar correctamente las escuadras para aplicar el método gráfico, el mismo debe ser lo más exacto posible así como también cuando se determina la región factible.

## Evaluaciones

### Diagnóstica

Esta evaluación busca demostrar si los estudiantes están en condiciones de comenzar a estudiar un determinado tema o unidad, la situación personal del estudiante en una determinada etapa del curso, ya sea familiar, física o incluso emocional. Y lo más importante, muestra en qué nivel los estudiantes lograron los objetivos y logros propuestos. La evaluación diagnóstica es una evaluación de carácter formativo.

### Formativa

Esta evaluación tiene como objetivo mostrar al docente y al estudiante qué progresos tuvo este último. También, señalar qué fracasos hubo durante los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje y, por último, analizar las conductas del alumno a lo largo del proceso de aprendizaje además ver hasta qué punto fueron alcanzados los objetivos y logros, esta se presenta a la mitad de la unidad.

### Sumativa

En esta evaluación se valoran los comportamientos finales de los estudiantes apuntando el final de un determinado proceso, permiten verificar si se han alcanzado o no las metas propuestas y hacer

una reseña de los contenidos tratados a lo largo de un curso o unidad. Finalmente, sirven para integrar en un juicio de valor todo aquello que se ha dicho sobre un estudiante a lo largo del curso o unidad, es el resultado de todos los datos disponibles, ya sean pruebas, lecciones, tareas, observaciones, etc. Como conclusión es importante anotar que la única diferencia entre una evaluación de carácter formativo y una evaluación de carácter sumativo es el propósito. En este sentido, la evaluación sumativa siempre será cuantitativa; mientras que la formativa, puede ser cuantitativa o cualitativa.

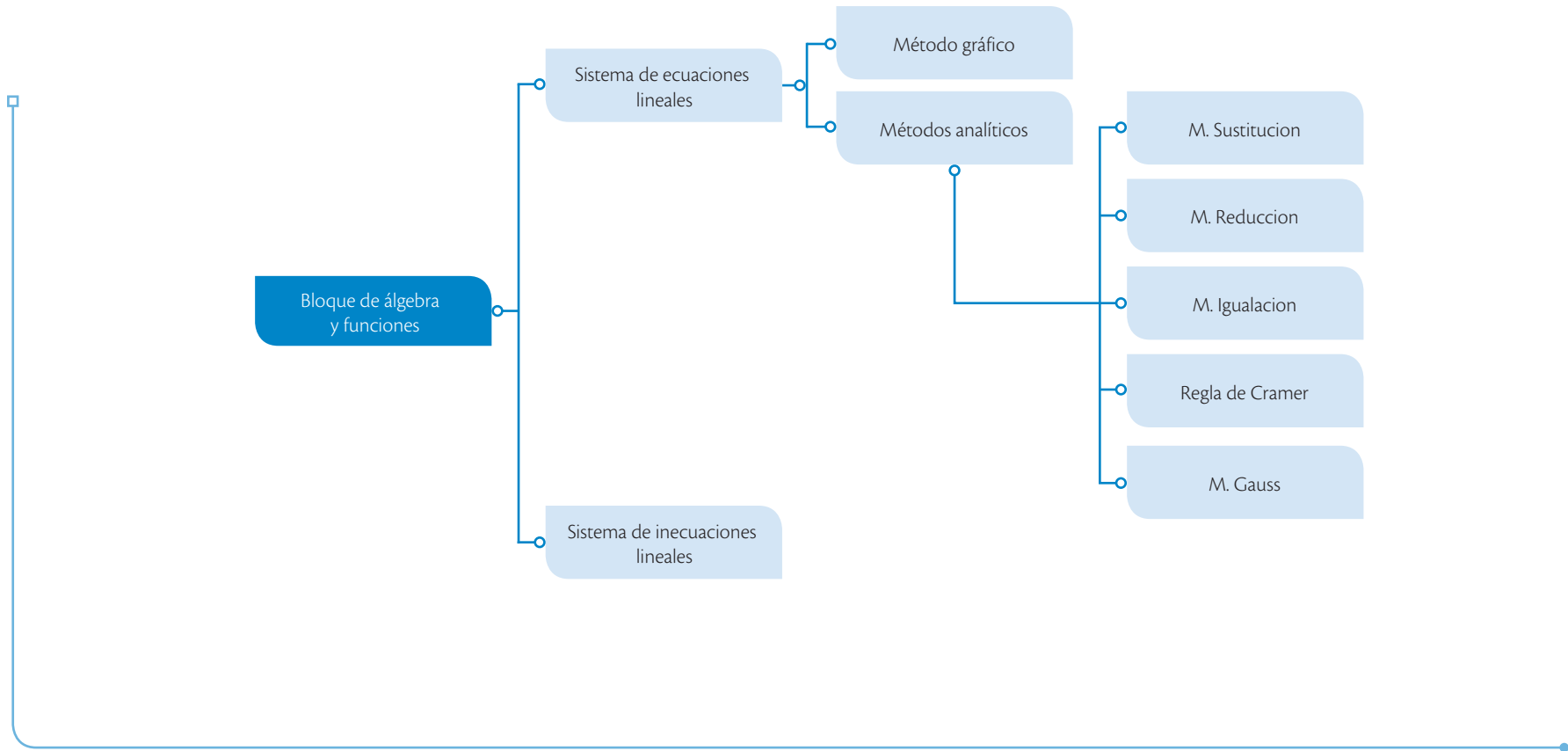
## Respuestas

### Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
6	7	8	9	
A	A	A	A	
B	B	B	B	
C	C	C	C	
D	D	D	D	

# Esquema conceptual

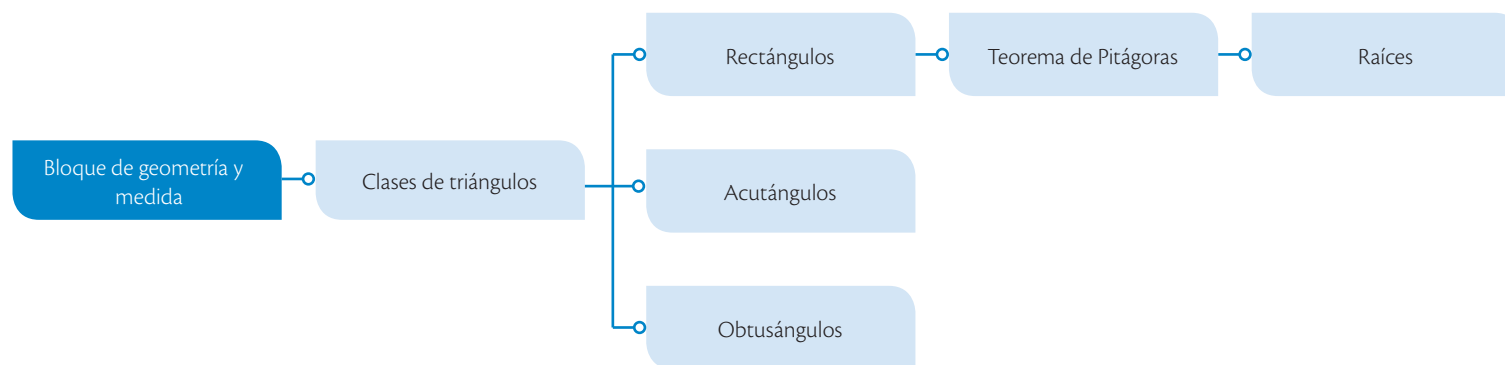
## Conocimientos de la unidad



## Cultura del Buen Vivir

### ■ Valor: La solidaridad

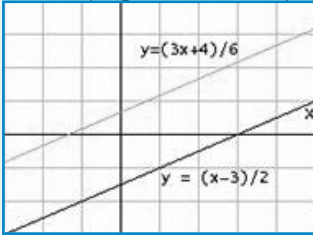
Es un valor basado en metas o intereses comunes, es decir no solo debemos pensar en uno mismo sino en todos lo que nos rodean.

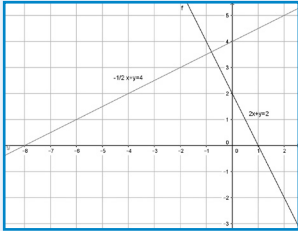


## ■ Compromiso a lograr

La educación integral con la que estamos comprometidos todos los docentes busca crear espacios de reflexión, así como de análisis y síntesis ya sea de manera individual o grupal con la finalidad de emitir un juicio de valor razonado. Para esto es de suma importancia que primero reconozcamos nuestras limitaciones, luego nuestros errores o equívocos para poder enmendarlos inmediatamente, además debemos ser agradecidos con todo lo que tenemos en nuestro entorno. Es por eso que por más sacrificio que te haya costado tener lo que tienes, no es razón suficiente para alardear de tus logros más importantes, es compartir tus experiencias que pueden ser útiles a otros como tú.

# Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 3: sistemas de ecuaciones lineales				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.2 – OG.M.3. – OG.M.4. – OG.M.5		O.M.4.1. – O.M.4.3. –O.M.4.4. – O.M.4.5.		
Objetivos de subnivel		Valores		
M.4.1.39 – M.4.1.40 – M.4.1.41 – M.4.1.54. – M.4.1.55 – M.4.1.56		La solidaridad		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.2 – CE.M.4.3		I.M.4.2.4 – I.M.4.3.4 – I.M.4.3.5		
Objetivos de la unidad				
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Emplear el método gráfico para obtener la solución del S.E.L. con dos incógnitas.</li> <li>• Aplicar métodos algebraicos para obtener la solución del S.E.L. con dos incógnitas.</li> <li>• Modelizar S.E.L. con dos incógnitas.</li> <li>• Resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas para obtener la región factible</li> </ul>				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
Álgebra y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar un intervalo en R de manera algebraica y gráfica, y reconocer el intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en R.</li> <li>• Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreando la solución.</li> <li>• Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica y reconocer la zona común sombreada como solución del sistema.</li> <li>• Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Haga notar que la ecuación de una recta puede escribirse de forma implícita o explícita, como por ejemplo:  <math>2x + y = 4</math> esta de forma implícita.  <math>y = -2x + 4</math> esta de forma explícita.</li> <li>• Recuerde que dos rectas son paralelas si tiene la misma pendiente , lo que gráficamente se expresa así:</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resuelve problemas que requieran ecuaciones de primer grado con una incógnita en R; utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica en la solución de inecuaciones de primer grado y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica en R. (L1. I4.)</li> </ul>	

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:																										
Álgebra y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de determinantes, de igualación, y de eliminación gaussiana.</li> <li>Resolver y plantear problemas de textos con enunciado que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>También note que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es menos uno, lo que gráficamente se expresa así:</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema. (I.4, J.2)</li> </ul>																											
Geometría y medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.</li> <li>Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</li> <li>Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>En el partido de básquet de ayer, Carlos anotó 17 puntos con una combinación de canastas de 2 y de 3 puntos. El número de tiros de 2 puntos que él anotó es mayor que el número de tiros de 3 puntos. ¿Cuántas canastas de cada tipo anotó Carlos?</li> <li>Tenemos dos relaciones, la primera es: que el número de puntos anotados por Carlos es igual al número de tiros de dos puntos más el número de tiros de tres puntos es:</li> </ul> <table border="1" data-bbox="757 843 1293 980"> <thead> <tr> <th>N. total de puntos</th> <th>N. de tiros de 2 pts.</th> <th>N. de tiros de 3 pts.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>17</td> <td>7 (14 pts.)</td> <td>1 (3 pts.)</td> </tr> <tr> <td>17</td> <td>4 (8 pts.)</td> <td>3 (9 pts.)</td> </tr> <tr> <td>17</td> <td>1 (2 pts.)</td> <td>5 (15 pts.)</td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>La segunda relación es: que el número de tiros de dos puntos menos uno es igual al número de tiros de tres puntos.</li> </ul> <table border="1" data-bbox="889 1047 1166 1282"> <thead> <tr> <th>N. de tiros de 2 pts.</th> <th>N. de tiros de 3 pts.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td>...</td> </tr> </tbody> </table>	N. total de puntos	N. de tiros de 2 pts.	N. de tiros de 3 pts.	17	7 (14 pts.)	1 (3 pts.)	17	4 (8 pts.)	3 (9 pts.)	17	1 (2 pts.)	5 (15 pts.)	N. de tiros de 2 pts.	N. de tiros de 3 pts.	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	...	...	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas, y potencia para analizar las características geométricas de la función lineal, potencia y cuadrática, reconoce cuando un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares. (J.1, I.4)</li> </ul>	<p><b>Tarea grupal</b></p> <p>En grupos de 3 personas deben proponer solución al problema planteado.</p> <p><b>Actividades</b></p> <p>colaborativas y talleres propuestos en el libro de trabajo. / Tabla de cotejo.</p> <p><b>Prueba de bloque</b></p> <p>Prueba objetiva./ Rúbrica de evaluación</p>
N. total de puntos	N. de tiros de 2 pts.	N. de tiros de 3 pts.																												
17	7 (14 pts.)	1 (3 pts.)																												
17	4 (8 pts.)	3 (9 pts.)																												
17	1 (2 pts.)	5 (15 pts.)																												
N. de tiros de 2 pts.	N. de tiros de 3 pts.																													
1	0																													
2	1																													
3	2																													
4	3																													
5	4																													
...	...																													

Recursos: texto guía, cuaderno de trabajo, materiales elaborados por el docente, medios visuales y material concreto.

Bibliografía: SWOKOWSKI – COLE, Algebra, editorial THOMSSON LEARNING, México D.F. 2011 – LEHMAN, Algebra, LIMUSA editores, México D.F. 2011 – GALINDO Edwin, Matemáticas Superiores, Prociencia Editores, Ecuador 2010

## Ampliación conceptual

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se expresa así:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde  $x$  y  $y$  son las incógnitas o variables y  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  son números reales.

Dicho sistema puede ser Consistente donde las ecuaciones son Independientes, es decir, tienen exactamente una solución.

También el sistema puede ser Consistente donde las ecuaciones son Dependientes, es decir, tienen infinitas soluciones.

Por último el sistema puede ser Inconsistente, es decir, no hay solución.

En general un sistema de ecuaciones puede tener soluciones llamándose Compatible, o no tener solución llamándose Incompatible. Los sistemas compatibles pueden tener una solución denominándose determinados, o infinitas soluciones denominándose indeterminados.

Sistemas equivalentes.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 5x + 3y = 9 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Tienen como solución  $x=3; y=-2$  que es el C.S. =  $\{(3, -2)\}$ .

## 1

### Sistemas de ecuaciones lineales

#### Explora

Para ingresar a una universidad se aplica una prueba de razonamiento que consta de 30 preguntas. Por cada respuesta correcta se asignan cinco puntos, pero por cada respuesta incorrecta (o que no se responda) se restan dos puntos.



• Si un aspirante obtuvo 94 puntos, ¿cuántas preguntas respondió bien?

La situación planteada en el Explora resulta interesante, pues es posible pensar en un método de tanteo para solucionarla. Si el aspirante respondió quince preguntas bien y quince mal, el siguiente sería el esquema para el razonamiento:

$$15 \text{ preguntas} \cdot 5 \text{ puntos} - 15 \text{ preguntas} \cdot 2 \text{ puntos} = 45 \text{ puntos}$$

Preguntas correctas
Preguntas incorrectas

De esta manera puede razonarse hasta encontrar una solución. Sin embargo, si se analiza el problema desde el punto de vista del álgebra, puede plantearse la "m" como la cantidad de las preguntas respondidas correctamente y "r" la de las preguntas respondidas de forma incorrecta. Así, el problema puede expresarse como sigue:

$$5m - 2r = 94 \quad \text{y} \quad m + r = 30$$

Si se analizan simultáneamente las expresiones anteriores, teniendo en cuenta que son las condiciones del problema, se concluye que el aspirante respondió bien 22 preguntas.

Las expresiones  $5m - 2r = 94$  y  $m + r = 30$  conforman un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución es:  $m = 22$  y  $r = 8$

Plantear y resolver un sistema de ecuaciones permite resolver situaciones en las cuales se involucran varias incógnitas que están relacionadas por condiciones específicas.

#### 1.1 Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales

Antes de explicar cómo resolver los sistemas de ecuaciones, vale la pena aclarar ciertos términos propios de la terminología del álgebra.

Para indicar un sistema de ecuaciones se utiliza el signo  $\{$  y se escriben las ecuaciones una debajo de la otra, como se indica a continuación (Figura 1).

$$\begin{cases} 5m - 2r = 94 \\ m + r = 30 \end{cases} \quad \text{Figura 1}$$

Un sistema de ecuaciones puede ser  $2 \times 2$  si involucra dos ecuaciones y dos incógnitas. Así mismo puede ser  $3 \times 3$  si involucra tres ecuaciones y tres incógnitas o  $n \times n$  si involucra  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales hace referencia a encontrar los valores de las incógnitas que verifican, simultáneamente, las ecuaciones. Teniendo en cuenta esto, los sistemas pueden clasificarse así:

- **Compatibles.** Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:
  - Compatibles determinados.** Aquellos para los cuales hay una única solución.
  - Compatibles indeterminados.** Aquellos que tienen infinitas soluciones.
- **Incompatibles.** Aquellos que carecen de solución.

#### Ejemplo 1

El sistema planteado para modelar la situación inicial es compatible determinado, pues para resolverlo, solo se determina que:  $m = 22$  y  $r = 8$

De la misma forma, y sin saber ningún método de solución, puede determinarse que el sistema conformado por las ecuaciones  $m + n = 3$  y  $2m + 2n = 3$  es incompatible, pues no hay valores que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones.

Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica.

### 1.2 Resolución de un sistema de ecuaciones

En este subtema se trabajarán los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones  $2 \times 2$ , pero cabe anotar que varios de estos sirven además para solucionar los sistemas  $3 \times 3$  y, con algunas variaciones, también para solucionar sistemas  $n \times n$ .

Antes de hablar acerca de cómo solucionar un sistema de ecuaciones, es importante aclarar que solo puede determinarse que la solución de dicho sistema es correcta al evaluar las dos ecuaciones con los valores determinados para las incógnitas. Si las ecuaciones se verifican, la solución es correcta; de lo contrario, la solución es incorrecta.

Para el problema planteado se encontró que  $m = 22$  y  $r = 8$ . Al verificar los valores del sistema propuesto se tiene que:

$$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 22 - 2 \cdot 8 = 94$$

$$m + r = 30 \Rightarrow 22 + 8 = 30$$

Puede determinarse que  $m = 15$  y  $r = 15$  (como se planteó al inicio de la unidad) no es una solución para el sistema, pues para la primera ecuación, se tiene que:

$$m + r = 30 \Rightarrow 15 + 15 = 30$$

Mientras que para la segunda ecuación, se tiene que:

$$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 15 - 2 \cdot 15 = 45$$

Aunque se verifica la ecuación  $m + r = 30$ , puede observarse que para la ecuación  $5m - 2r = 94$ , los valores no proporcionan una igualdad; por esta razón no son una solución del sistema planteado.

Existen varios métodos para solucionar un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$  y el uso de cada uno de ellos depende de las condiciones del sistema y de la habilidad propia de cada uno para utilizarlo. Los métodos son:

Gráficas de las ecuaciones lineales



A continuación se presentan algunas particularidades de cada método.

- **Sustitución, reducción e igualación.** Estos métodos tienen un componente algebraico importante; para usarlos, se interpreta cada expresión de forma similar a una ecuación, por tal razón se usa la propiedad uniforme de la igualdad y se respeta el orden en el que se despeja una incógnita en la ecuación.
- **Regla de Cramer.** Con este método se solucionan sistemas de ecuaciones partiendo del uso de los coeficientes numéricos de cada incógnita. De esta manera, se "obvia" el proceso algebraico para usar un algoritmo aritmético en la solución.
- **Método de Gauss.** Es una generalización del método de reducción.

Cada uno de los métodos se explicará con mayor detalle en los siguientes temas de la unidad.

#### CULTURA del Buen Vivir

##### El optimismo

Cuando una persona analiza desde una perspectiva optimista las diversas situaciones que enfrenta en la vida, encuentra más rápidamente las soluciones a los problemas que se le presenten.

- Piensa en qué le aconsejarías a tu mejor amigo cuando tiene serias dificultades para entender los temas de matemáticas.

##### Ten en cuenta

Según la propiedad uniforme de la igualdad, pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse en ambos miembros de una igualdad por un mismo número y la igualdad se conserva.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique en forma general un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Pida a sus estudiantes que reconozcan las incógnitas o variables y los coeficientes numéricos en ejemplos que usted plantee.
- Aclare que resolver un sistema de ecuaciones consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables que satisfacen todas las ecuaciones.
- Recalque que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede ser Consistente o inconsistente.
- Haga hincapié en que el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede representarse en forma general por dos rectas, elabore dichos gráficos con lo aclarará las soluciones de los sistemas

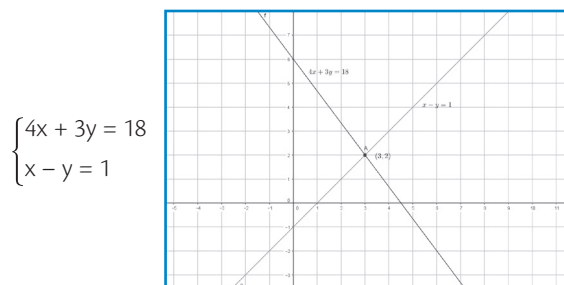
## ■ Actividades colaborativas

- Pida a uno de sus estudiantes que traiga un balón de básquet para que pueda hacer real la situación planteada en el bloque de Geometría y medida.
- Forme grupos de trabajo para que reproduzca el hecho de que "En el partido de basquetbol de ayer, Carlos anotó 17 puntos con una combinación de canastas de 2 y de 3 puntos. El número de tiros de 2 puntos que él anotó es mayor que el número de tiros de 3 puntos. ¿Cuántas canastas de cada tipo anotó Carlos?" en este caso Carlos puede ser el estudiante que ha elegido.
- Explique que el punto ortográfico separa una ecuación de otra.
- Forme las tablas que corresponden a cada relación e indique que está utilizando datos discretos.
- Trace un plano cartesiano y ubique los pares ordenados.

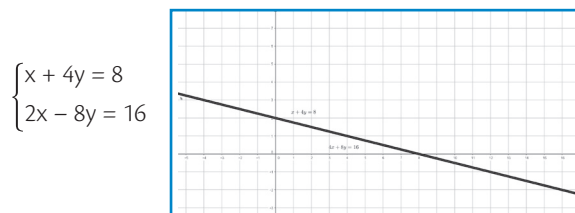
## Ampliación conceptual

El método gráfico muestra fácilmente cuando un sistema es consistente o inconsistente, lo que puede observar en los siguientes ejemplos:

### Sistemas Consistentes

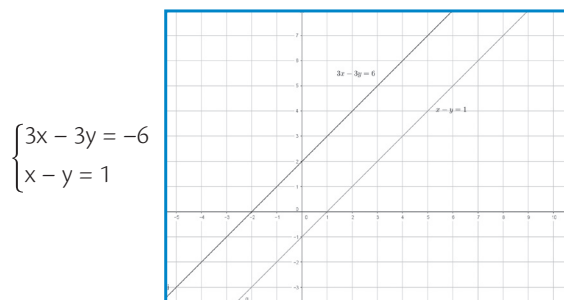


Este sistema tiene una solución.



Este sistema tiene infinitas soluciones.

### Sistema Inconsistente



Este sistema no tiene solución.

## 2

## Resolución de sistemas por el método gráfico

### Explora

Para llenar un tanque de  $31 \text{ m}^3$  se abren dos llaves, simultáneamente. Una de ellas se cierra siete minutos después de abrirla y la otra, dos minutos después. Luego, se llena un tanque de  $27 \text{ m}^3$  con las mismas llaves, pero ahora la primera se cierra a los cuatro minutos de abrirla y la segunda, a los tres minutos.



• ¿Cuántos litros salen de cada llave en un minuto?

En la situación presentada en el Explora puede observarse que los litros que salen de las dos llaves pueden representarse por dos incógnitas, por ejemplo,  $x$  y  $y$ . Según las condiciones del problema, la relación entre  $x$  y  $y$  puede expresarse así:

$$\text{Para el tanque de } 31 \text{ m}^3: 7x + 2y = 31$$

$$\text{Para el tanque de } 27 \text{ m}^3: 4x + 3y = 27$$

Así, para responder la situación debe solucionarse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

Es posible hallar la **solución del sistema** analizando cada ecuación como una recta y, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersectan en un solo punto.

Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

### Ejemplo 1

Para solucionar el anterior sistema de ecuaciones, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones de la forma  $y = mx + b$  punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \quad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

$$\text{Para la primera ecuación se tiene que: } m = -\frac{7}{2} \text{ y } b = \frac{31}{2}$$

$$\text{Para la segunda ecuación se tiene que: } m = -\frac{4}{3} \text{ y } b = 9$$

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

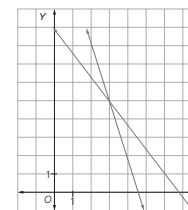


Figura 1

En la Figura 1, se observa que el punto en el cual se intersectan las dos rectas es  $(3, 5)$ ; es decir la solución del sistema es  $x = 3$ ;  $y = 5$ .

Por lo tanto, de la primera llave salen 3 litros de agua en un minuto y de la segunda salen 5 litros de agua en un minuto.

### Ten en cuenta

Es posible hacer las gráficas de las rectas usando dos puntos; en la situación de la sección Explora, se usa la aplicación de la ecuación punto-pendiente.

Bloque de Álgebra y funciones

**Destreza con criterios de desempeño:** Reconocer a la intersección de dos rectas cómo la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con el uso de la tecnología.

**2.1 Análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones**

Gráficamente es posible identificar sistemas de ecuaciones compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles.

**Ejemplo 2**

A continuación se muestran gráficas de los diferentes tipos de sistemas:

**Compatible determinado:**  
Cuando las rectas se cortan en un punto.

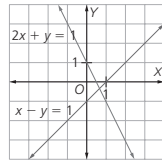


Figura 2

**Compatible indeterminado:**  
Cuando las rectas se cortan en infinitos puntos (misma recta).

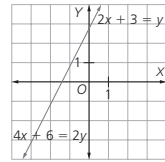


Figura 3

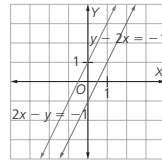


Figura 4

**Incompatible:**  
Cuando las rectas son paralelas.

**TECNOLOGÍAS**  
de la información y la comunicación

[www.e-sm.net/9smt05](http://www.e-sm.net/9smt05)

Observa este video para repasar el método gráfico de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

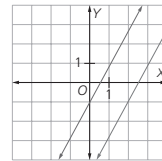


Figura 5

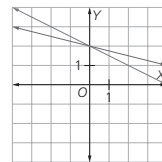


Figura 6

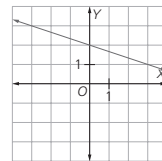


Figura 7

**Actividad resuelta**

Razonamiento

1 Determina, gráficamente, el tipo de solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - 5 = y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 15y = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ 5x + 15y = 30 \end{cases}$$

**Solución:**

Cada una de las ecuaciones de los tres sistemas se escribe de la forma  $y = mx + b$ . Luego, se procede a graficar y se obtienen las Figuras 5 a 7 que se corresponden con los sistemas:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - 5 = y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 15y = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ 5x + 15y = 30 \end{cases}$$

Incompatible

Compatible determinado

Compatible indeterminado

El 1º sistema, debido a que las ecuaciones tienen la misma pendiente y no pasan por un mismo punto, es incompatible.

El 3º sistema, por ser una ecuación equivalente a la otra es compatible indeterminado.

APLICA © EDICIONES SM

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Numere cada una de las ecuaciones del sistema con 1 y 2.
- Recalcar que cada ecuación del sistema representa una recta en el plano cartesiano.
- Explicar que para trazar una recta se necesitan de dos puntos, por lo que se recomienda trabajar con puntos de corte en los ejes.
- Elaborar tablas de valores para la ecuación 1 y 2, a continuación se debe hacer que  $x = 0$  para obtener  $y$ , luego hacer que  $y = 0$  para obtener  $x$ , escribirlos en la tabla.
- Trazar un plano cartesiano y ubicar los puntos calculados para finalmente trazar las rectas.
- En este momento puede decir si el sistema es Consistente o Inconsistente, si es consistente debe aclarar que puede tener una solución o infinitas soluciones, pero si es inconsistente debe decir que no hay solución.

**Actividades colaborativas**

- Forme equipos de trabajo de 4 o 5 estudiantes.
- Plantee la siguiente situación problemática "En una farmacia, en un día se han vendido dos tipos de anticonceptivos. La suma de los artículos de los dos tipos es 120; los del primer tipo tienen un precio de 2 dólares y los del segundo tipo cuestan 15 dólares. El ingreso total por la venta de estos artículos fue 59 dólares. ¿Cuántos anticonceptivos de cada clase se vendieron?"
- Pida que formen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y apliquen el método gráfico para obtener la solución.
- Socialicen la solución calculada.

## Ejercitación

2.

a.  $x = 1,75; y = 1,25$     b.  $x = 1,57; y = -0,43$

c.  $x = 0; y = 1$     d.  $x = 1,14; y = -1,57$

## Razonamiento

3. a.  $x = 0,5; y = 0,5$     b.  $x = 2; y = 0$

4. Respuesta abierta

## Comunicación

5. a.  $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$  solución  $x = -\frac{3}{5}; y = \frac{1}{5}$

b.  $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$  solución  $x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5}$

## Resolución de problemas

6. Respuesta abierta

Destreza con criterios de desempeño:

Reconocer a la intersección de dos rectas cómo la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

2. Grafica en el plano cartesiano las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0,2x + 0,5y = 0,1 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$

d.  $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

4. Propón una ecuación que forme un sistema de ecuaciones con  $6x - 2y = -3$  de tal forma que sea:

- Determinado
- Indeterminado
- Incompatible

Luego, representa la solución gráfica de cada uno de los sistemas que planteaste.

Finalmente, explica las diferencias, tanto en las gráficas como en las ecuaciones, de los tres sistemas.

#### Comunicación

5. Determina la ecuación de las rectas del sistema dado.
- Luego, los valores aproximados para su solución.

a.

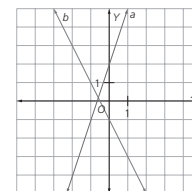


Figura 10

b.

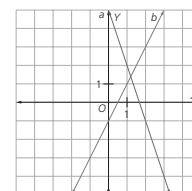


Figura 11

#### Razonamiento

3. Determina la solución del sistema de ecuaciones en cada caso. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.

a.

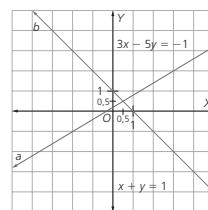


Figura 8

b.

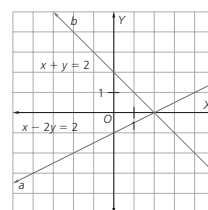


Figura 9

#### Resolución de problemas

6. Plantea un sistema de ecuaciones que tenga la solución dada. Ubica dicho punto en el plano y grafica las rectas que forman el sistema que propusiste.

- $x = 2$      $y = 21$
- $x = 4,5$      $y = 2$
- $x = -2$      $y = -0,5$

### 3 Resolución de sistemas por el método de sustitución

#### Explora

En una granja hay patos y cerdos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134.



• ¿Cuántos animales hay de cada especie?

El sistema de ecuaciones que representa la situación del Explora puede resolverse con el método de sustitución. Si se tiene en cuenta que los cerdos tienen cuatro patas y los patos, dos, las condiciones pueden representarse así:

$m$ : cantidad de patos       $n$ : cantidad de cerdos  
Total de cabezas entre todos los animales:  $m + n = 50$   
Total de patas entre todos los animales:  $2m + 4n = 134$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ 2m + 4n = 134 \end{cases}$$

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Para esta situación, el principio de sustitución se aplica como sigue:

$m = 50 - n$  ← Se despeja  $m$  en la primera ecuación del sistema.  
 $2(50 - n) + 4n = 134$  ← Se sustituye  $m = 50 - n$  en la segunda ecuación.  
 $100 - 2n + 4n = 134$  ← Se aplica la propiedad distributiva del producto.  
 $100 + 2n = 134$  ← Se despeja  $n$ .

$$2n = 134 - 100 \Rightarrow n = \frac{34}{2} \Rightarrow n = 17$$

Por tanto, la cantidad de cerdos es 17. Ahora, para averiguar la cantidad de patos, se reemplaza este valor en la expresión  $m = 50 - n$ , así:  $m = 50 - 17 = 33$ . De esta manera en la granja hay 17 cerdos y 33 patos.

#### Ejemplo 1

Observa cómo se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

Se elige la primera ecuación y se despeja  $x$ . Luego se realiza el proceso de sustitución como en la situación inicial:  $x = -3 - 2y$ .

Después, este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$

Como esta igualdad siempre es cierta, se deduce que el sistema tiene infinitas soluciones; así que es compatible indeterminado. Gráficamente se interpreta que las dos ecuaciones generan la misma recta, como se observa en la Figura 1.

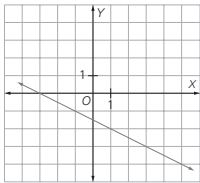


Figura 1

#### Actividad resuelta

Razonamiento

1 Resuelve este sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

#### Solución:

Se despeja  $y$  en la primera ecuación  $y = 1 - 2x$ . Luego, se sustituye en la segunda:  $3x + 2(1 - 2x) = 4 \Rightarrow 3x + 2 - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 - 2$

$$-x = 2$$

De donde se deduce que  $x = -2$  y al reemplazar  $x$  en la primera ecuación, se obtiene el valor de  $y = 5$ .

APLICA © EDICIONES SM

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Revisar el principio de sustitución para resolver ecuaciones con una y dos variables.
- Recordar que este método consiste en despejar una incógnita de cualquiera de las ecuaciones utilizando las propiedades de las igualdades, para ser sustituida en la ecuación que no se despejó.
- Se recomienda escoger la ecuación donde sea más fácil el despeje de una de las incógnitas.
- Si al sustituir una ecuación en otra obtenemos  $0 = 0$ , se dice que el sistema tiene infinitas soluciones. Pero si obtenemos  $0 = k$ , se dice que el sistema no tiene solución.

## ■ Actividades colaborativas

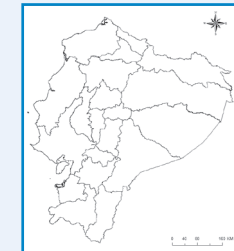
- Formar grupos de 5 estudiantes para que resuelvan los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y = -6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 3y = -12 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 14 \\ 3x - y = -14 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$

Cada sistema está relacionado con la solución que tiene una provincia de la costa ecuatoriana. Indique que tienen 15 minutos para determinar la solución del sistema, el grupo que tenga la mayoría de soluciones tiene derecho a pintar el mapa del Ecuador.

Esmeraldas: (3, -2), Manabí: (-4, 2), Guayas: (0, 3), Los ríos: (0, -3), Santa Elena: (2, 2)



## Ejercitación

2. a.  $x = -7; y = -3$     b.  $m = 3; n = 1$

c.  $z = -5; w = \frac{1}{2}$     d.  $a = \frac{94}{53}; b = \frac{26}{53}$

3. a.  $y = 3$     b.  $y = -8$     c.  $y = 12$

d.  $y = -4$     e.  $y = 6$ , La palabra es ANÁLISIS

## Razonamiento

4. a.  $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$  solución  $x = -\frac{2}{3}; y = -\frac{1}{3}$

b.  $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$  solución  $x = -\frac{7}{3}; y = \frac{5}{3}$

c.  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -4,5x + y = 0,5 \end{cases}$  solución es  $x = \frac{1}{5}; y = \frac{7}{5}$

## Resolución de problemas

5. a. Es compatible determinado para infinitos valores de  $a$ , por ejemplo para 1. Es incompatible  $a = -3$

b. Es compatible determinado para infinitos valores de  $a$ , por ejemplo para 1. El sistema nunca puede ser compatible indeterminado.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica utilizando los métodos de determinante (Cramer), método de igualación y método de eliminación gaussiana.

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a.  $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$

d.  $\begin{cases} 7a - 9b = 8 \\ 15a + 11b = 32 \end{cases}$

3. Con el método de sustitución, resuelve cada sistema.

• Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase.

Completa esta frase solo con el valor de la solución en la incógnita  $y$ .

a.  $\begin{cases} \frac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 - \frac{1+x}{2} = y - 1 \end{cases}$  Letra N

b.  $\begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{3y}{4} = 7 \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{8} = 0 \end{cases}$  Letra I

c.  $\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \\ \frac{x}{3} - 1 = \frac{y}{3} \end{cases}$  Letra L

d.  $\begin{cases} \frac{y}{8} - \frac{5x}{6} = 2 \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$  Letra A

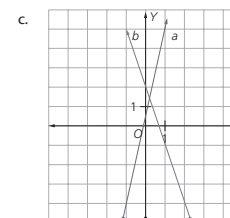
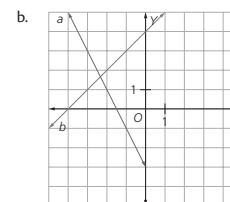
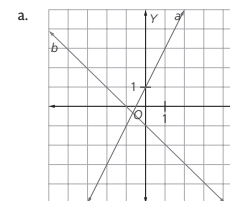
e.  $\begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = -12 \end{cases}$  Letra S

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

— 4 — 3 — 4 — 12 — 8 — 6 — 8 — 6 —

#### Razonamiento

4. Identifica las ecuaciones de las rectas para cada sistema y determina, con el método de sustitución, los valores exactos de la solución.



#### Resolución de problemas

5. Analiza los siguientes sistemas y determina el valor que debe tomar  $a$  o  $b$  para que el sistema cumpla la condición dada.

a.  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - ay = 4 \end{cases}$  Compatible determinado  
Incompatible

b.  $\begin{cases} 4x + by = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$  Compatible determinado  
Compatible indeterminado

## 3

## Evaluación formativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Dado el sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ , averigua cuál de los siguientes pares ordenados es solución del sistema, para que subraye la solución.

A.  $x = 1, y = 2$

B.  $x = 3, y = 2$

C.  $x = 5, y = 1$

D.  $x = 3, y = 4$

2. Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución sea  $x = 2, y = 3$

3. Elabora una tabla de valores para cada ecuación del sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$  y sin resolver obtén su solución, se recomienda que tome a  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

4. Dada la ecuación  $x + y = 1$ , escribe otra ecuación que forme sistemas que sean:

A. compatible determinado, elabore su gráfico.

B. compatible indeterminado, elabore su gráfico.

C. incompatible, elabore su gráfico.

5. Una parcela rectangular tiene un perímetro de 240 m, si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las ecuaciones de la situación planteada si  $x$  representa el ancho de parcela,  $y$  representa el largo de la parcela?

6. En un curso hay 70 alumnos matriculados. En el último examen de Matemáticas han aprobado 39 alumnos, el 70% de las chicas y el 50% de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso? Resuelve por el método gráfico.

1. Dado el sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ , averigua cuál de los siguientes pares ordenados es solución del sistema, para que subraye la solución.

D.  $x = 3, y = 4$

2. Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución sea  $x = 2, y = 3$

En este caso puede haber muchos sistemas como por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$$

3. Elabora una tabla de valores para cada ecuación del sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$  y sin resolver obtén su solución, se recomienda que tome a  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

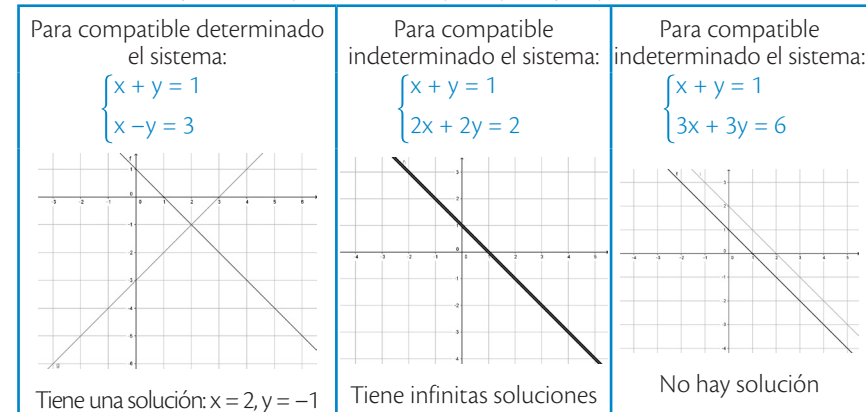
$$3x + 2y = 8$$

x	-2	-1	0	1	2
y	7	11/2	4	5/2	1

$$5x - y = 9$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-19	-14	-9	-4	1

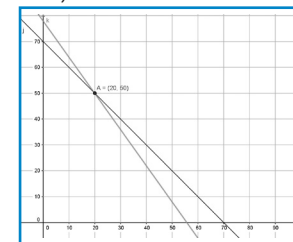
4. Dada la ecuación  $x + y = 1$ , escribe otra ecuación que forme sistemas. En este caso hay muchas posibilidades, pero por ejemplo tenemos:



5. Una parcela rectangular tiene un perímetro de 240 m, si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las ecuaciones de la situación planteada si  $x$  representa el ancho de parcela, y representa el largo de la parcela?

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ y = 3x \end{cases}$$

6. En un curso hay 70 alumnos matriculados. En el último examen de Matemáticas han aprobado 39 alumnos, el 70% de las chicas y el 50% de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso? Resuelve por el método gráfico.



Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica	1, 2 y 3			
Reconocer a la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	4			
Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica utilizando los métodos gráfico o analíticos como determinante (Cramer), método de igualación y método de eliminación gaussiana.	5 y 6			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

## 4 Resolución de sistemas por el método de reducción

### Explora

Martha va al supermercado y compra 4 kg de café y 2 kg de azúcar por \$10. Días después, nota que no fue suficiente, así que vuelve al supermercado a comprar 1 kg de café y 2 kg de azúcar por \$4.



• ¿Cuánto cuesta 1 kg de cada producto?

### Ten en cuenta

El método de reducción sirve cuando se determina que no es sencillo despejar una de las dos incógnitas del sistema de ecuaciones.



### CULTURA del Buen Vivir

#### El optimismo

Cuando se es optimista se toman buenas decisiones, porque es posible tener la mente clara para vislumbrar los mejores caminos.

• ¿Por qué crees que es importante tener una actitud optimista frente a la vida? Explica.

Como se ha estudiado en temas anteriores, algunas situaciones en las que se observa una relación entre dos datos pueden resolverse al plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

En este caso, las iniciales de cada producto serán las incógnitas al momento de plantear el sistema correspondiente a la situación del Explora.

Sea C: el precio de un kilogramo de café y A: el precio de un kilogramo de azúcar.

Según los datos del problema, se tiene que:  $4C + 2A = 10$  y  $C + 2A = 4$ . Así puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4C + 2A = 10 \\ C + 2A = 4 \end{cases}$$

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el **método de reducción**, se intenta eliminar una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las dos ecuaciones.

#### Ejemplo 1

Para solucionar el sistema por el método de reducción pueden seguirse los pasos que se describen a continuación:

- 1.° Se determina la incógnita que va a eliminarse; en este caso será C.
- 2.° Se multiplica convenientemente, incluso por un número negativo, una o las dos ecuaciones para poder **reducirlas**. Para el caso, se multiplica la segunda ecuación por  $-4$ . Con lo cual el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 4C + 2A = 10 \\ -4C - 8A = -16 \end{cases}$$

- 3.° Se reducen las ecuaciones sumando entre sí los términos semejantes y los valores numéricos de esta manera:

$$\begin{array}{r} 4C + 2A = 10 \\ -4C - 8A = -16 \\ \hline -6A = -6 \end{array}$$

En este caso, la incógnita C se eliminó de la expresión y el resultado de la reducción es una ecuación con una sola incógnita que es A.

- 4.° Se soluciona la ecuación así:  $-6A = -6$ ; y se obtiene que  $A = 1$ .
- 5.° Se reemplaza el valor  $A = 1$  en una de las ecuaciones:

$$C + 2A = 4 \Rightarrow C = 4 - 2 \Rightarrow C = 2.$$

Así que un kilogramo de azúcar cuesta \$1 y un kilogramo de café cuesta \$2.

#### Actividad resuelta

Ejercitación

1 Observa la solución del sistema  $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$

#### Solución:

Para eliminar x se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por  $-3$  de esta manera:  $\begin{cases} 15x - 10y = -10 \\ -15x - 24y = 180 \end{cases}$ , y al reducir se tiene que:  $-34y = 170$ . Así,  $y = -5$  y al despejar una de las ecuaciones para x se tiene que  $x = -4$ .

APLICA © EDICIONES SM

## Ampliación conceptual

Las ecuaciones lineales cumplen ciertas propiedades como por ejemplo:

- Si a los dos miembros de la igualdad se les suma o resta un mismo número, la igualdad se mantiene.
- Si a los dos miembros de una igualdad se les multiplica o divide por un mismo número, la igualdad se mantiene.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

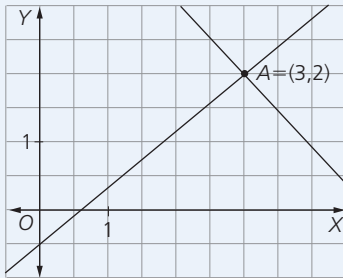
- a. Indicar que se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga para eliminar una variable.
- b. Ejecutar la resta para desaparecer una de las incógnitas.
- c. Aplicar el proceso de resolución de ecuación lineal con una variable.
- d. Repetir el mismo proceso para eliminar la otra variable.
- e. Si al reducir una variable obtenemos  $0 = 0$ , se dice que el sistema tiene infinitas soluciones. Pero si obtenemos  $0 = k$ , se dice que el sistema no tiene solución.

## Actividades colaborativas

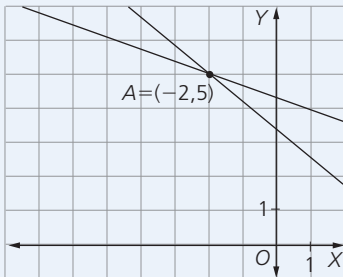
1. La estabilidad climática depende en gran parte de la presencia de bosques, selvas que mantengan los patrones de lluvia, regulen las temperaturas y mejoren la calidad de vida del ser humano. Por este motivo el ministerio de medio ambiente ha implementado "Una campaña de reforestación en varias instituciones educativas pero para el estudio se analiza el trabajo realizado por dos instituciones. En el primer período la institución A planta el duplo más el triple de lo que planta la institución B sumando en total 600 árboles. En el segundo período el cuádruplo de la primera menos el quíntuplo de la segunda institución que es equivalente a 100 árboles sembrados. ¿Cuántos árboles plantó cada institución?"

## Ejercitación

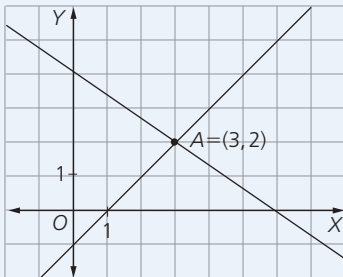
2. a.  $x = 3; y = 2$



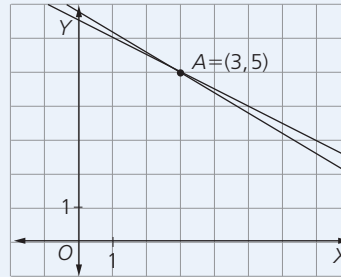
b.  $x = -2; y = 5$



c.  $x = 3; y = 2$



d.  $x = 3; y = 5$



## Razonamiento

- Figura 3
- Figura 2
- Figura 1
- sistema compatible indeterminado

## Modelación

4. Se admiten diversas respuestas, por ejemplo:

- $x - y = 2$
- $0x + 12y = 54$
- $\frac{3}{4}x - y = 1$
- $x - 3y = 20$
- $2x + 2y = 2$

## Resolución de problemas

- $a_2 = 0; y = 0$
- $a_2 = a_1; b_2 = b_1$

Bloque de Álgebra y funciones

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

2. Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución aplicando el método de reducción.

- $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ 9x + 14y = 97 \end{cases}$

**Razonamiento**

3. Relaciona cada sistema de ecuaciones con su correspondiente gráfica. Luego, resuélvelo aplicando el método de reducción.

- $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x + 3y = 10 \\ 3x - 7y = 20 \end{cases}$
- $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$

**Modelación**

4. Inventa para cada caso una nueva ecuación con la cual puedas formar un sistema de ecuaciones que cumpla las condiciones dadas:

- $\begin{cases} 7x - 3y = 27 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$  Compatible determinado
- $\begin{cases} 5x + 6y = 27 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$  Compatible indeterminado
- $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$  Incompatible

**Resolución de problemas**

5. Observa el siguiente sistema de ecuaciones y luego responde las preguntas.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

- ¿Cuál sería la solución de dicho sistema? Escríbela en términos de  $a_1, b_1, a_2, b_2$ .
- ¿Para qué valores de  $a_1, b_1$  tiene el sistema infinitas soluciones?

FIGURA 1, FIGURA 2, FIGURA 3, FIGURA 4, FIGURA 5

## 5 Resolución de sistemas por el método de igualación

### Explora

La suma de dos números es 51. Si se divide el primero entre tres y el segundo entre 6, la diferencia de estas fracciones es 1.



- ¿Qué par de números verifican estas condiciones?

### Ten en cuenta

Despejar la variable  $y$  en las ecuaciones de un sistema, permite que las ecuaciones queden presentadas como ecuaciones canónicas de las rectas.

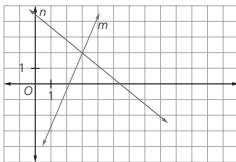


Figura 1

Para plantear el sistema de ecuaciones de la situación propuesta en el Explora se consideran las siguientes incógnitas:

$x$ : primer número

$y$ : segundo número

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases} \leftarrow \text{Sistema de ecuaciones que describe la situación}$$

El **método de igualación** para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicando la transitividad de las igualdades, se igualan y se despeja la otra incógnita.

### Ejemplo 1

El sistema presentado en la situación inicial se soluciona de la siguiente manera:

1.° Se despeja  $y$  en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = -x + 51 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

2.° Se igualan los valores de  $y$ .

$$-x + 51 = 2x - 6$$

3.° Se despeja  $x$ .

$$\begin{aligned} -x - 2x &= -6 - 51 \\ -3x &= -57 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

4.° Se calcula el valor de  $y$ .

$$y = -x + 51, \text{ de donde } y = 32$$

Así, los dos números que solucionan el reto son 19 y 32.

### Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve el sistema  $\begin{cases} 7m - 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$

#### Solución:

En este caso se elige  $m$  para despejar en las dos ecuaciones:

$$7m = 15 + 3n \Rightarrow m = \frac{15 + 3n}{7} \quad \text{y} \quad 5m = 27 - 6n, \text{ luego, } m = \frac{27 - 6n}{5}$$

Ahora se igualan las expresiones y se despeja  $n$ :  $\frac{15 + 3n}{7} = \frac{27 - 6n}{5}$

$$\begin{aligned} 5(15 + 3n) &= 7(27 - 6n) \\ 75 + 15n &= 189 - 42n \\ 15n + 42n &= 189 - 75 \\ 57n &= 114 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Se reemplaza el valor de  $n$  en una de las dos ecuaciones despejadas para así hallar el valor de  $m$ :  $m = \frac{15 + 3n}{7}$ , así para  $n = 2$  se tiene que  $m = \frac{15 + 3(2)}{7}$ ;  $m = 3$ .

La solución para el sistema será  $m = 3$  y  $n = 2$  (Figura 1).

## Ampliación conceptual

Comenzaremos hablando de igualdad e identidad en una ecuación.

Igualdad es una expresión matemática de dos miembros relacionados por el signo igual.

Identidad se presenta cuando las igualdades algebraicas son ciertas para cualquier valor de la variable (Se habla del mismo valor para  $x$ ). Ejemplo:  $2x + 3x = 5x$  o  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Indicar que se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones
- Explicar que se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.
- Calcula el valor de la otra incógnita sustituyendo la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas de primer paso.
- Realizar la diferenciación del proceso de sustitución con el de igualación.
- Si al igualar las variables obtenemos  $0 = 0$ , se dice que el sistema tiene infinitas soluciones. Pero si obtenemos  $0 = k$ , se dice que el sistema no tiene solución.

## ■ Actividades colaborativas

- En grupos elaborar una balanza con diferentes materiales, pueden ser de reciclaje, utilizar los materiales de su cartuchera para equilibrarla y formar sistemas de ecuaciones los cuales serán resueltos por cada grupo. Pida que planteen ecuaciones y luego sistema de ecuaciones.

## Ejercitación

2. a.  $x = 4; y = -3$       b.  $a = 5; b = -5$   
 c.  $w = 2; z = -4$       d.  $s = 1; t = 3$   
 e.  $x = 11; y = -17$       f.  $x = 12; y = 8$

## Razonamiento

3. a. El  $5m$  es negativo y el 2 del denominador también.  
 b. El  $2y$  debe ser  $4y$
4. Existen varias soluciones, por ejemplo

Sistemas incompatibles

$$\begin{cases} 2y - x = -3 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

Sistemas compatibles determinados

$$\begin{cases} 2y - x = -3 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 100 \\ -2y + 5x = 10 \end{cases}$$

Sistemas compatibles indeterminados

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} -2y + 5x = 10 \\ -8y + 20x = 40 \end{cases}$$

5. Trabajo en grupo. La solución es  $x = 18; y = 13$

## Resolución de problemas

6. Los números son 27 y 24
7. El número es 45
8. El número es 96

**Destreza con criterios de desempeño:** Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de igualación.

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

2. Resuelve los siguientes sistemas con el método de igualación.

a.  $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$       b.  $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$       d.  $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e.  $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -\frac{7}{12} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{6} \end{cases}$       f.  $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

#### Razonamiento

3. Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución del sistema planteado.

a.  $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$$4n = 13 - 7m \quad 5m - 2n = 19$$

$$n = \frac{13 - 7m}{4} \quad n = \frac{19 + 5m}{2}$$

$$\frac{13 - 7m}{4} = \frac{19 + 5m}{2}$$

$$26 - 14m = 76 + 20m$$

$$-14m - 20m = 76 - 26 \quad -34m = 50$$

$$m = -\frac{50}{34} = -\frac{25}{17}$$

Reemplazando para  $n$  se tiene que:

$$n = \frac{13 - 7\left(-\frac{25}{17}\right)}{4} = \frac{99}{17}$$

De este modo  $m = -\frac{25}{17}$  y  $n = \frac{99}{17}$ .

b.  $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$$x = 10 - 2y \quad x = \frac{5 - 4y}{2}$$

$$10 - 2y = \frac{5 - 4y}{2} \quad 20 - 2y = 5 - 4y$$

$$-2y + 4y = 5 - 20 \quad y = -\frac{15}{2}$$

Reemplazando para  $x$  se tiene que:

$$x = \frac{5 - 4\left(-\frac{15}{2}\right)}{2} = \frac{35}{2}$$

De este modo  $x = \frac{35}{2}$  y  $y = -\frac{15}{2}$ .

#### Razonamiento

4. Utiliza las siguientes ecuaciones para plantear dos sistemas de ecuaciones incompatibles, dos compatibles indeterminados y dos compatibles determinados.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 12 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y + 5x = 10 \\ 2y - x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x + 10y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 30y = 15 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} -8y + 20x = 40 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$$

5. Reúnete con cuatro compañeros más y solucionen el siguiente sistema de ecuaciones a partir de los cinco métodos trabajados en la unidad.

$$\begin{cases} 1,5x - 2y = 1 \\ 2,5x - 3y = 6 \end{cases}$$

Cada uno elegirá uno de los métodos. Al terminar, comparen sus soluciones y evalúen cuál es el método más efectivo para este sistema.

#### Resolución de problemas

6. Halla dos números tales que si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 4, la suma sea 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5, la suma sea 174.
7. Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.
8. Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si a la cuarta parte del número se le suma 45, el resultado es el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

## 6 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

### Explora

Hace 4 años la edad de Cristina era el doble de la de Juliana. Dentro de 8 años la edad de Juliana será  $\frac{5}{8}$  de la de Cristina.



• ¿Qué edad tienen actualmente Cristina y Juliana?

### Ten en cuenta

Puede elegirse cualquiera de los métodos de solución presentados en la unidad; la idea es usar aquel que pueda aplicarse con mayor facilidad.

La resolución de problemas es uno de los aspectos más importantes de las matemáticas y, en muchas situaciones, los problemas tienen solución desde el álgebra. Este es el caso de los problemas que relacionan edades; por ejemplo, para la situación planteada en el Explora, pueden definirse incógnitas y condiciones para estas según el contexto de la situación, así:

$$\begin{aligned} x &: \text{la edad actual de Cristina} \\ y &: \text{edad actual de Juliana} \end{aligned}$$

**Plantear y solucionar un problema** en el que se involucran sistemas de ecuaciones se basa en escribir en forma algebraica, con incógnitas, las diferentes condiciones del problema. Luego, el sistema generado se resuelve con alguno de los métodos estudiados anteriormente y se determina la respuesta al problema.

### Ejemplo 1

Según los datos del problema:

$$\begin{aligned} x - 4 &: \text{edad de Cristina hace 4 años} \\ y - 4 &: \text{edad de Juliana hace 4 años} \\ x - 4 &= 2(y - 4) \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} x + 8 &: \text{edad de Cristina dentro de 8 años} \\ y + 8 &: \text{edad de Juliana dentro de 8 años} \\ \frac{5}{8}(x + 8) &= (y + 8) \end{aligned}$$

Así las condiciones planteadas en el problema forman un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 4 = 2(y - 4) \\ \frac{5}{8}(x + 8) = (y + 8) \end{cases}$$

La solución de este sistema determinará las edades actuales de Cristina y de Juliana.

Por el método de sustitución se tiene que:

$$x = 2(y - 4) + 4 \quad x = 2y - 8 + 4 \quad x = 2y - 4$$

Ahora, se reemplaza  $x$  en la segunda ecuación y se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8}(2y - 4 + 8) &= y + 8 \\ 10y + 20 &= 8y + 64 \\ 10y - 8y &= 64 - 20 \Rightarrow 2y = 44 \end{aligned}$$

De esta manera,  $y = 22$  y  $x = 2y - 4$ . Por lo tanto,  $x = 40$ .

En conclusión, Cristina tiene 40 años y Juliana tiene 22.

Al finalizar la solución, es importante verificar que la respuesta hallada cumpla las condiciones y el contexto del problema. Para ello, se reemplazan los valores en el sistema de ecuaciones, así:

$$\begin{cases} 40 - 4 = 2(22 - 4) \\ \frac{5}{8}(40 + 8) = 22 + 8 \end{cases}$$

## Ampliación conceptual

Pasos para resolver problemas de sistemas de ecuaciones:

1. Comprender el problema.  
Leer el enunciado, identificar los datos y asignar las incógnitas.
2. Elaborar y llevar a cabo un plan de solución.  
Plantear las ecuaciones y Resolver las ecuaciones.
3. Comprobar y dar las respuestas.

Reemplazar en una ecuación original los valores hallados de las variables.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- a. Recordar a los estudiantes que para resolver problemas se debe tomar en cuenta los pasos establecidos
- b. Motivar a los estudiantes a que resuelvan correctamente problemas pues la mayoría están relacionados con nuestro medio.
- c. Incentivar a los estudiantes a que planteen otros problemas relacionados al tema.

## ■ Actividades colaborativas

1. Trabajar en grupos de cuatro estudiantes en el cual planteen dos sistemas de ecuaciones utilizando sus edades y las edades de sus padres, los cuales deben ser resueltos por ellos. Por ejemplo:

El doble de la edad de Juan más la de su hermano Pedro son 44 años. Y dentro de dos años la edad de Juan será el doble que la de Pedro ¿Cuántos años tienen cada uno?

Félix tiene 9 años más que su hermana y hace tres años sólo tenía el doble ¿Cuántos años tienen actualmente cada uno?

2. Puede pedir que recreen situaciones parecidas.

## Ampliación conceptual

Recordar seguir los pasos para resolver problemas con ecuaciones.

1. Comprender el problema
2. Elaborar y llevar a cabo un plan de solución
3. Comprobar y dar las respuestas

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- a. Motivar a los estudiantes a que resuelvan correctamente problemas, a justificar sus respuestas.
- b. Solicitar a los estudiantes que realicen gráficas que representen la situación planteada en los problemas.
- c. Recordar que deben comprobar la solución encontrada en el texto del problema para argumentar correctamente la respuesta de la situación planteada.

## Actividades colaborativas

1. Trabajar en grupos de tres estudiantes entregarles diferentes figuras geométricas (triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios) para que completen sistemas de ecuaciones y los resuelvan por el método que deseen. Por ejemplo:
  - La base de un rectángulo mide 10 metros más que su altura. Si el perímetro mide 100 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones? Y ¿Cuál es su área?
  - Calcule la medida del lado de un triángulo equilátero que tiene de área  $30 \text{ cm}^2$ .
  - Recordar a los estudiantes que para solucionar triángulos rectángulos necesita del Teorema Pitágoras.

**Destreza con criterios de desempeño:** Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

### Actividades resueltas

#### Resolución de problemas

- 1 En una gran rebaja Pablo pagó \$50 por 3 chompas de colores y 5 pantalones. Lucía compró 5 chompas y 7 pantalones por \$74. ¿Cuánto cuesta cada chompa? ¿Cuánto cuesta cada pantalón?  
En ocasiones resulta útil organizar las condiciones del problema en una tabla.

Información	Expresión algebraica
Precio de una chompa	$x$
Precio de 3 chompas	$3x$
Precio de 5 chompas	$5x$
Precio de un pantalón	$y$
Precio de 5 pantalones	$5y$
Precio de 7 pantalones	$7y$
Dinero que paga Pablo	$3x + 5y = 50$
Dinero que paga Lucía	$5x + 7y = 74$

Tabla 1

Para resolver el sistema con el método de reducción se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por  $-3$ :

$$\begin{array}{r} 15x + 25y = 250 \\ -15x - 21y = -222 \\ \hline 4y = 28 \\ y = 7 \end{array}$$

Ahora se despeja  $x$  en la primera ecuación:

$$\begin{array}{l} 3x = 50 - 5y \text{ y como } y = 7, \text{ se tiene que:} \\ 3x = 50 - 5(7) \quad 3x = 50 - 35 \\ x = 5 \end{array}$$

Una chompa cuesta \$5 y un pantalón cuesta \$7.

- 2 Dos números están en relación 3 a 4. Si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 9, la relación es 4 a 3. ¿Qué par de números verifican esta relación? Se determinan las incógnitas así:  $w$ : número mayor y  $z$ : número menor.

La expresión "están en relación 3 a 4" puede escribirse  $\frac{z}{w} = \frac{3}{4}$ .

Ahora, la expresión "si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 9, la relación es 4 a 3" puede escribirse así:  $\frac{z+2}{w-9} = \frac{4}{3}$ .

Por lo tanto, el sistema que describe el problema será:

$$\begin{cases} \frac{z}{w} = \frac{3}{4} \\ \frac{z+2}{w-9} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

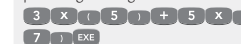
El sistema organizado convenientemente se transforma en:

$$\begin{cases} 4z - 3w = 0 \\ 3z - 4w = -42 \end{cases} \text{ para el cual } z = 18 \text{ y } w = 24.$$

Por lo tanto, el número menor es 18 y el número mayor es 24.

### En la calculadora

Para verificar si los valores encontrados al resolver un sistema de ecuaciones es correcto, se puede emplear la calculadora. Por ejemplo en la actividad 1, se puede digitar la siguiente secuencia.



Y se obtiene 50.

- Utiliza la calculadora para verificar la solución del problema resuelto en la actividad 2.

### Ten en cuenta

La expresión  $\frac{z+2}{w-9} = \frac{4}{3}$  es equivalente a la expresión  $3(z+2) = 4(w-9)$ .

## 6 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

### Desarrolla tus destrezas

#### Comunicación

- 3 Selecciona el sistema de ecuaciones que modela el problema y encuentra la respuesta a la pregunta. Hay más de un sistema correcto.

Alex y Felipe son carpinteros. La materia prima necesaria para hacer un mueble grande les cuesta \$500 y para un mueble pequeño \$300. Si tienen \$57 000 y quieren hacer 150 muebles, ¿cuántos muebles de cada tamaño podrán hacer?

- a.  $\begin{cases} 500x + y = 150 \\ x + 300y = 57\,000 \end{cases}$   
 b.  $\begin{cases} x + y = 150 \\ 5x + 3y = 570 \end{cases}$   
 c.  $\begin{cases} x + y = 150 \\ 500x + 300y = 57\,000 \end{cases}$   
 d.  $\begin{cases} x + y = 57\,000 \\ 500x + 300y = 150 \end{cases}$

#### Modelación

- 4 Plantea un problema cuya representación algebraica sea el sistema de ecuaciones dado.

- a.  $\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$       b.  $\begin{cases} 3x - 30y = 15 \\ 2x + 10y = 40 \end{cases}$   
 c.  $\begin{cases} 8x + 3y = 37 \\ 8x - 3y = 50 \end{cases}$       d.  $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x + 5y = 32 \end{cases}$   
 e.  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$       f.  $\begin{cases} 3x + y = 40 \\ 5x - 7y = -20 \end{cases}$

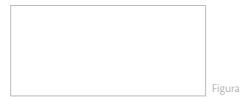
#### Razonamiento

- 5 Según cada situación, plantea el sistema de ecuaciones correspondiente y verifica la solución.

- a. Dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.  
 b. Dos números para los que su suma sea 12 y el doble del mayor más el menor sea 20.  
 c. Dos números que sumados den 10 y sumadas sus mitades den 4.  
 d. Dos números cuyo producto sea 56 y cuya diferencia sea 2.  
 e. Dos números primos que sumen 24 y para los cuales la suma de sus dobles sea 48.

- 6 Completa el dibujo que representa las condiciones planteadas para cada situación. Luego, escribe el sistema de ecuaciones correspondiente y solucionalo.

- a. El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro es de 76 metros. ¿Cuáles son las medidas originales del rectángulo? ¿Cuáles son las medidas del rectángulo agrandado?



- b. Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Si mide 52 metros más de largo que de ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?



- c. La altura de un trapecio isósceles es de 4 cm, la suma de las medidas de las bases es de 14 cm y los lados oblicuos miden 5 cm. Averigua las medidas de las bases del trapecio.



- d. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide  $18^\circ$  más que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?



#### Resolución de problemas

- 7 Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

### Comunicación

3. Los sistemas b y c. Pueden hacer 60 muebles grandes y 90 muebles chicas.

### Modelación

4. Respuesta abierta.

### Razonamiento

5. a. 40 y 14

- b. 12 y 20

- c. 10 y 4

- d.  $\sqrt{57} + 1$  y  $\sqrt{57} - 1$

- e. 24 y 48

6. a. Largo del original es 12 metros y ancho 8 metros.

Rectángulo agrandado, largo 24 metros y ancho 14 metros.

- b. 124 metros de largo y 72 metros de ancho.

- c. Las bases miden 10 cm y 4 cm.

- d. Los ángulos son  $54^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $90^\circ$ .

### Resolución de problemas

7. Carga de 3 toneladas; 12 viajes

Carga de 4 toneladas; 11 viajes.

# Libro del alumno

## Resolución de problemas

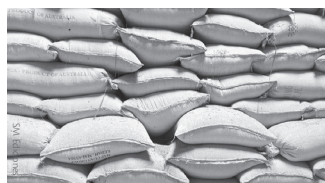
8. 97 adultos y 151 niños.
9. Libro \$ 12; cuaderno \$ 7.
10. Fréjol 80Kg; maíz 60Kg.
11. Tipo A \$ 345; tipo B \$ 420.
12. Chompa es \$ 50; zapatos \$ 76.
13. 30 automóviles, 25 motocicletas.
14. Patricia 20 años, su hermano 10.
15. 4 y 6.
16. Lo alcanza en 2 h y 15 min, recorriendo 247,5 Km.
17. 7 CD de música clásica y 13 de música pop.
18. 5 y 9.

- 8 El costo de las entradas a una función de títeres es de \$30 para los adultos y \$20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron \$5 930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a esa función?



- 9 Marta y sus amigos pagaron \$109 por 5 libros y 7 cuadernos. Si la semana anterior compraron 8 libros y 11 cuadernos y la cuenta fue de \$173, ¿cuánto cuesta cada libro cuánto cuesta cada cuaderno?

- 10 Don Pedro y don Pablo fueron a comprar semillas. Don Pedro compró 4 sacos de maíz y 3 sacos de fréjol y don Pablo, 3 sacos de maíz y 2 de fréjol. La carga de don Pedro fue de 480 kilogramos y la de don Pablo de 340. ¿Cuánto pesaban cada saco de maíz y cada saco de fréjol?



- 11 En una fábrica hay máquinas de tipo A y máquinas de tipo B. La semana pasada se hizo mantenimiento a 5 máquinas de tipo A y a 4 del tipo B por un costo de \$3 405. La semana anterior se pagaron \$3 135 por hacer mantenimiento a 3 máquinas de tipo A y a 5 de tipo B. ¿Cuál es el costo de mantenimiento de las máquinas de cada tipo?

- 12 Por una chompa y unos zapatos se pagaron \$126. Si el precio de la chompa aumentara en un 14%, entonces sería igual al 75% del precio de los zapatos. ¿Cuánto se pagó por cada artículo?

- 13 Si en un parqueadero hay 55 vehículos entre automóviles y motocicletas, y en total se cuentan 170 llantas, ¿cuántos automóviles y cuántas motocicletas hay estacionados en el parqueadero?

- 14 La edad de Patricia es el doble de la de su hermano Lucas. Hace 5 años, la suma de sus edades era igual a la edad actual de Patricia. ¿Cuál es la edad de cada uno?

- 15 Halla dos números tales que la suma de un cuarto del primero más un tercio del segundo sea igual a 3 y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtenga 62 como suma de los productos.

- 16 Un automóvil que avanza a 70 km/h lleva una ventaja de 90 km a otro que avanza por una vía paralela a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda el segundo automóvil en alcanzar al primero y la distancia recorrida para lograrlo.

- 17 En un estante hay 20 CD de música clásica y de música pop. De estos últimos hay seis discos más que de los de música clásica. ¿Cuántos discos de cada género musical hay en el estante?



- 18 La suma de 2 números es 14. Si se suma 1 al mayor, se obtiene el doble del menor. ¿Cuáles son los números?

## 7 Resolución de sistemas por la regla de Cramer

### Explora

En una finca se envasan 300 L de leche al día. Para ello, se usan botellas de 2 L y botellas de 5 L y en total se usan 120 botellas.



• ¿Cuántas botellas de cada capacidad se usan?

Como se ha venido mostrando en la unidad, problemas como el planteado en el Explora pueden solucionarse con un sistema de ecuaciones. Para este caso se tiene que:  
x: botellas de 2 L    y: botellas de 5 L

La información se representa así:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases}$$

El método para solucionar este sistema se basa en el concepto de matriz.

Una **matriz** es la disposición de números reales que se asocia con un sistema de ecuaciones. Los números de dicha matriz son los coeficientes numéricos de las incógnitas. Se llama **matriz ampliada** a la disposición que, además de incluir los coeficientes numéricos, incluye las constantes del sistema.

### 7.1 Resolución de sistemas 2 × 2 por la regla de Cramer

Es posible asignar a una matriz un número real llamado determinante de la matriz. Para un sistema de ecuaciones 2 × 2, en el cual los coeficientes son  $a_1$  y  $b_1$  en la primera ecuación,  $a_2$  y  $b_2$  en la segunda ecuación y los términos independientes son  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente, se tiene que:

Sistema	Matriz de coeficientes	Matriz de términos independientes
$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz es el número que resulta de  $a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1$ .

La **regla de Cramer** es una fórmula basada en los determinantes que pueden plantearse así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{d_1 b_2 - d_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

#### Ejemplo 1

En el ejemplo de la finca, la matriz de coeficiente es:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Cada fila de la matriz corresponde a los coeficientes numéricos de cada una de las ecuaciones; para este caso, en la primera ecuación son 1 y 1, y en la segunda ecuación son 2 y 5.

La matriz de términos independientes es:  $\begin{pmatrix} 120 \\ 300 \end{pmatrix}$   
La solución del sistema será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 1 \\ 300 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 300}{5 - 2} = 100 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 2 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{300 - 240}{5 - 2} = 20$$

Luego, se usan 100 botellas de 2 litros y 20 botellas de 5 litros.

## Ampliación conceptual

El sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Que en expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Donde  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  es la matriz del sistema y  $a_1, b_1, a_2, b_2$  son números reales. También tenemos a  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  que es el vector de las variables  $x$  e  $y$ , y finalmente esta  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  que es vector de término independientes.

Una **matriz** es un arreglo rectangular ordenado de filas y de columnas, en nuestro caso tenemos que la matriz del sistema tiene dos filas y dos columnas.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Indique que la matriz y el del sistema está dado por los coeficientes que acompañan a las variables.
- Aclare que para obtener el valor de la variable  $x$ , en el numerador el determinante debe estar formado por dos columnas, donde en la primera columna se escribe la columna de los términos independientes y en la segunda columna se escriben los coeficientes de la variable  $y$ .

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de trabajo para que formen el sistema de ecuaciones de la situación planteada "En un garaje hay 55 vehículos entre automóviles y motos. Si el total de ruedas es de 170. ¿Cuántos automóviles y cuántas motos hay?"
- Pida que expongan la situación planteada empleando la Regla de Cramer en papelotes. Puede variar los datos según los grupos.

## Ejercitación

- $x = 3; y = -2$
  - $x = 30; y = 20$
  - $x = 80; y = 10$
  - $x = 10; y = 8$
  - $x = 15; y = 5$
  - $x = 1; y = 1$

## Comunicación

- Respuesta abierta.

## Resolución de problemas

- Habían 1800 litros.
  - 18 vehículos y 13 motos
  - 69 y 21.
  - 24 y 22.
  - 12 objetos triangulares y 8 rectangulares.

**Destreza con criterios de desempeño:** Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de determinantes (Cramer).

### Ejemplo 2

El estacionamiento del colegio tiene una capacidad para 70 vehículos entre carros y bicicletas, si el total de ruedas es 200. ¿Cuántos carros y bicicletas existen si el parqueadero está lleno?

Sea  $x$ : el número de carros;  $y$ : el número de bicicletas.  
La información se representa así: 
$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 4x + 2y = 200 \end{cases}$$

Al aplicar la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70 & 1 \\ 200 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{140 - 200}{2 - 4} = \frac{-60}{-2} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 70 \\ 4 & 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{200 - 280}{2 - 4} = \frac{-80}{-2} = 40$$

De este modo se obtiene que existen 30 carros y 40 bicicletas.

### Ten en cuenta

La regla de Cramer requiere precisión al hacer los cálculos, pues fácilmente puede llegarse a valores que no corresponden a la solución del sistema a partir de errores con signos o en adiciones y sustracciones.

TECNOLOGÍAS  
de la información y la  
comunicación



[www.e-sm.net/9smt06](http://www.e-sm.net/9smt06)

Refuerza lo aprendido sobre la regla de Cramer.

## Desarrolla tus destrezas

### Ejercitación

- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de determinantes.

- $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 10 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y = 100 \\ x - 2y = 60 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x - y = 22 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

### Comunicación

- Inventa un sistema de ecuaciones cuyo determinante sea el dado y solución. Ten en cuenta que los valores para el término que no tiene incógnita no están dados y debes proponerlos.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

### Resolución de problemas



- Plantea y resuelve, con determinantes, cada problema.
  - Tres cuartas partes de un tanque de combustible líquido están llenas. En cinco semanas se gastan las cantidades indicadas en la Tabla 1.

Semana	Gasto en litros
1.ª	150 L
2.ª	La sexta parte de lo que había en el tanque al comenzar la semana.
3.ª	250 L
4.ª	Un tercio de lo que había en el tanque al comenzar la semana.
5.ª	300 L

Tabla 1

Después de la 5.ª semana en el tanque aún quedan 200 litros. Calcula cuántos litros había en el tanque antes de comenzar el periodo descrito.

- En un garaje hay 31 vehículos entre automóviles y motocicletas. Se cuentan 98 ruedas en total. ¿Cuántos automóviles y cuántas motocicletas hay?
- Dos números suman 90. Si se divide el mayor entre el menor, el residuo es 6 y el cociente es 3, ¿cuáles son los dos números?
- Dos números suman 46 y la diferencia de sus cuadrados es 92. ¿Cuáles son los dos números?
- Una caja de metal contiene objetos triangulares y rectangulares. En total hay 20 objetos y pueden contarse 68 vértices en total. ¿Cuántos objetos hay de cada clase?

## 8 Resolución de sistemas lineales por el método de Gauss

### Explora

¿Qué método se puede utilizar para resolver este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ 2z = -4 \end{cases}$$



### Ten en cuenta

Al resolver un sistema de ecuaciones, se obtienen los valores de las incógnitas y antes de escribir la respuesta o conjunto solución, es necesario hacer la comprobación, reemplazando estos valores en las ecuaciones originales.

### 8.1 Sistemas escalonados

Los sistemas lineales que tienen esta forma, reciben el nombre de sistemas escalonados y su resolución es muy sencilla, de manera que no es necesario utilizar los métodos conocidos.

Para resolver el sistema planteado se procede de la siguiente manera:

En la segunda ecuación:  $z = -\frac{4}{2} = -2$

En la primera ecuación:  $3y + 4 \cdot (-2) = 1 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = \frac{9}{3} = 3$

**Solución:**  $y = 3; z = -2$

Un sistema de ecuaciones es escalonado cuando en una de las ecuaciones solo existe una incógnita y en las otras ecuaciones, las otras incógnitas van apareciendo progresivamente.

### Ejemplo 1

Resuelve el sistema: 
$$\begin{cases} -28x = -84 \\ -4x - 8y = -4 \end{cases}$$

**Solución:**

Este sistema es escalonado.

En la primera ecuación:  $x = \frac{-84}{-28} = 3$

En la segunda ecuación:  $-8y - 4 \cdot (3) = -4 \rightarrow -8y = 8 \rightarrow y = -1$

De donde se obtiene que:  $x = 3; y = -1$ .

### 8.2 Método de Gauss

El método de reducción se puede generalizar con el método de Gauss, que consiste en transformar un sistema de ecuaciones en un sistema escalonado.

### Ejemplo 2

Resuelve el sistema: 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 & (1.^\circ \text{ ecuación}) \\ x - y = -6 & (2.^\circ \text{ ecuación}) \end{cases}$$

**Solución:**

Se mantiene la primera ecuación  $(1.^\circ) \rightarrow (1.^\circ)$   $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 5y = 20 \end{cases}$   
 Se elimina  $x$  de la segunda ecuación  $(1.^\circ) - 3 \cdot (2.^\circ) \rightarrow (2.^\circ)$

Como se ha obtenido un sistema escalonado, en la segunda ecuación se tiene que  $y = 4$ , y al reemplazar este valor en la primera ecuación, nos da como resultado  $x = -2$ .

Por lo tanto, el conjunto solución de este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es:  $x = -2; y = 4$ .

APLICA © EDICIONES SM

## Ampliación conceptual

El sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Que en expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

En forma general es:  $AX=B$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que cuando intercambia las filas de la matriz, esta es equivalente.
- Aclare que multiplica por el inverso multiplicativo a la primera fila para que el primer coeficiente del sistema sea 1.
- Indique que multiplica por el opuesto del primer coeficiente de la segunda fila a toda la primera fila y este resultado suma algebraicamente con la segunda fila, para que sea cero el primer coeficiente de la segunda fila.
- Escribir los resultados obtenidos en el literal c.
- Recalque que puede repetir el literal b en la segunda fila.
- Si en la última fila todas las entradas son cero, se dice que el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si en la última fila obtenemos que cero es igual a una constante  $k$ , se dice que el sistema no tiene solución.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de trabajo para que obtengan el sistema de ecuaciones de la situación planteada "El perímetro de un rectángulo es 64cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo."
- Pida que expongan la situación planteada empleando el Método de Gauss en papelotes. Puede variar los datos según los grupos.

## Ampliación conceptual

**Desigualdad.** Es la relación que establece que dos cantidades tienen diferente valor. Los signos que se utilizan son:  $>$  que se lee: "mayor que",  $<$  que se lee: "menor que",  $\geq$  que se lee: "mayor o igual que",  $\leq$  que se lee: "menor o igual que". Las desigualdades que no incluyen el signo igual se denominan **estrictas**, y las que lo incluyen se llaman **no estrictas**.

**Inecuaciones lineales con una incógnita.** Pueden ser de las siguientes formas:  $ax \pm b > 0$ ;  $ax \pm b \geq 0$ ;  $ax \pm b < 0$ ;  $ax \pm b \leq 0$  donde  $a$  y  $b$  son números reales con  $a \neq 0$ .

Como solución de las inecuaciones lineales con una incógnita se obtendrá un intervalo, donde los signos  $<$  o  $>$  indican intervalos abiertos y los signos  $\leq$  o  $\geq$  indican intervalos cerrados.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que para resolver una inecuación lineal de una variable debe aplicar los axiomas de orden.
- Muestre que la solución de una inecuación lineal de una variable es un intervalo.
- Aclare que la solución de un sistema de inecuaciones lineales con una variable se obtiene realizando la intersección de las soluciones de cada inecuación.

## ■ Actividades colaborativas

- Forme grupos de trabajo para que obtengan el sistema de inecuaciones de la situación planteada "Un profesor necesita saber el mayor número de alumnos que hay en la sala del 10° B, si al doble del número de éstos se disminuye en 7, el resultado es mayor que 29, y si al triple se disminuye en 5, el resultado es menor que el doble del número aumentado en 16."
- Pida que expongan la situación planteada empleando axiomas de orden en papelotes. Puede variar los datos según los grupos

## 9

### Sistemas de inecuaciones de primer grado

#### Explora

Si al doble de la edad de Camilo se le restan 17 años, resulta ser menos de 35; pero si a la mitad de la edad de Camilo se le suman 3 años, el resultado es mayor que 15.



• ¿Cuántos años tiene Camilo?

En algunas expresiones cotidianas es necesario conocer valores que no necesariamente son iguales a algo. Por ejemplo, cuando vas de compras y debes conseguir un pantalón que valga menos de \$40 o cuando se dice "el peso de un objeto está entre 105 y 107 libras", este estilo de expresiones pueden escribirse con inecuaciones.

Una **inecuación** es una expresión en la cual hay elementos desconocidos que están relacionados con los signos  $<$  o  $>$ ; los signos  $<$  o  $>$  pueden cambiar y ser  $\geq$  o  $\leq$ .

Para **resolver una inecuación** se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

• Si  $a < b$  y  $c$  es un número real, entonces,  $a \pm c < b \pm c$ .

• Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$  y  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

• Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$  y  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

De forma similar se verifican las propiedades cuando  $a > b$ .

• Si  $a > b$  y  $c$  es un número real, entonces,  $a \pm c > b \pm c$ .

• Si  $a > b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac > bc$  y  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

• Si  $a > b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac < bc$  y  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

#### Ejemplo 1

Para averiguar la edad de Camilo puede hacerse el siguiente razonamiento:

Sea  $x$  la edad de Camilo. Sea  $2x$  el doble de la edad de Camilo.

De esta manera, la expresión "al doble de la edad de Camilo se le restan 17 años, resulta ser menos de 35" puede representarse así:

$$2x - 17 < 35 \Rightarrow 2x < 35 + 17 \Rightarrow 2x < 52 \Rightarrow x < 26$$

Además, la expresión "si a la mitad de la edad de Camilo se le suman 3 años, el resultado es mayor que 15" puede representarse así:

$$\frac{x}{2} + 3 > 15 \Rightarrow \frac{x}{2} > 15 - 3 \Rightarrow \frac{x}{2} > 12 \Rightarrow x > 12 \times 2 \Rightarrow x > 24$$

Si la edad de Camilo es mayor que 24 y menor que 26, entonces puede deducirse que Camilo tiene 25 años.

#### 9.1 Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Expresiones como:

$$ax + b < c \quad ax + b > c \quad ax - b < c \quad ax - b > c$$

son **inecuaciones de primer grado con una incógnita** y para resolverlas se unen las propiedades mencionadas al inicio. El problema de determinar la edad de Camilo se solucionó a partir del planteamiento y la solución de dos inecuaciones de este estilo.

Es importante tener cuidado al aplicar las propiedades, sobre todo cuando se multiplica o se divide entre un número negativo.

#### Ejemplo 2

En la solución de la inecuación  $-4x - 12 > 8$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} -4x - 12 > 8 &\Rightarrow -4x > 8 + 12 \\ &\Rightarrow -4x > 20 \Rightarrow x < -5. \end{aligned}$$

El signo de la inecuación pasó de ser  $>$  a ser  $<$ , pues se dividió entre  $-4$ .

Bloque de Álgebra y funciones

- Destrezas con criterios de desempeño:**
- Representar un intervalo en  $\mathbb{R}$  de manera algebraica y gráfica y reconocer al intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en  $\mathbb{R}$ .
  - Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreado la solución.

Cabe anotar que la solución de una inecuación es un conjunto que puede representarse en una recta real. Dicho conjunto recibe el nombre de **intervalo**.

**Ejemplo 3**

La representación gráfica de la solución de la inecuación  $-4x - 5 > 15$ , en donde  $-4x > 20$ ; multiplicamos por  $-1$  a cada miembro de la inecuación, por lo que la desigualdad cambia de sentido, de donde se obtiene que  $x < -5$ , y se muestra en la Figura 1.

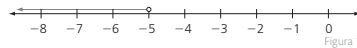


Figura 1

La semirecta de color rojo representa todos los números menores que  $-5$  y tiene una flecha que indica que son muchos más de los que pueden verse. De hecho, aquí se incluye el concepto de "infinito" que se aclarará en cursos superiores.

**9.2 Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas**

Una **inecuación de primer grado con dos incógnitas** es una expresión algebraica que puede expresarse de alguna de las siguientes formas:

$$ax + by < c \quad ax + by > c \quad ax + by \leq c \quad ax + by \geq c$$

Es importante tener en cuenta que estas expresiones son similares a las que se describen en una línea recta y que, de hecho, tienen una estrecha relación con ellas, la cual se explica a continuación.

En esta Unidad, se dedujo que  $y = mx + b$  describe una línea recta y en el método gráfico, se pudo observar que expresiones de la forma:

$$ax + by = c$$

pueden llevarse a la forma:

$$y = mx + b.$$

De manera similar, expresiones de la forma  $ax + by < c$  (o cualquiera de las planteadas como inecuación de primer grado con dos incógnitas) pueden llevarse a una forma en la cual la recta  $ax + by = c$  define dos semiplanos, uno que describe la región  $ax + by < c$  y otro que describe la región  $ax + by > c$ .

**Ejemplo 4**

Observa el proceso para representar gráficamente la inecuación  $-9x + 3y < -6$ .

1. Se escribe la inecuación de tal manera que la  $y$  quede despejada:

$$3y < 9x - 6 \text{ de donde } y < 3x - 2$$

2. Se grafica la recta  $y = 3x - 2$ .

3. Se determina, a partir de la recta, la región para la cual los valores de  $y$  son menores que los valores de  $3x - 2$ .

4. Se colorea dicha región. La gráfica muestra la solución de la inecuación  $y < 3x - 2$  y la recta de color azul es  $y = 3x - 2$ .

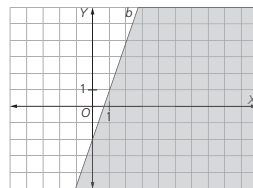


Figura 2

**Ten en cuenta**

El conjunto solución de una inecuación con dos incógnitas es un semiplano que se representa en un plano cartesiano.

**Ampliación conceptual**

**Inecuaciones lineales con dos incógnitas.**

Pueden ser de las siguientes formas:  $ax \pm by > c$ ;  $ax \pm by \geq c$ ;  $ax \pm by < c$ ;  $ax \pm by \leq c$  donde  $a$  y  $b$  son números reales con  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ .

Como solución de las inecuaciones lineales con dos incógnitas se obtendrá una región del plano  $xy$  que satisfaga a la inecuación delimitada por una recta.

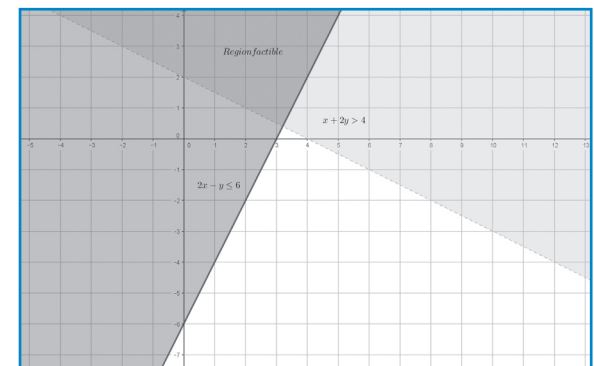
Si la inecuación de dos variables es de la forma:  $ax \pm by > c$  o  $ax \pm by < c$  la recta será discontinua, pero si es de la forma:  $ax \pm by \geq c$  o  $ax \pm by \leq c$  la recta es continua.

**Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.**

Se expresan así:  $\begin{cases} a_1x + b_1y > c_1 \rightarrow \text{Región 1} \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \rightarrow \text{Región 2} \end{cases}$

Donde la solución del sistema de inecuaciones está dada por: **Región factible** = región 1  $\cap$  región 2.

Por ejemplo tenemos que la intersección del sistema de inecuaciones  $\begin{cases} x + 2y > 4 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$  da Región factible, como se muestra a continuación.



## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que por facilidad la desigualdad la expresamos como igualdad.
- Manifiesta que como se trata de una recta puede aplicar puntos de corte.
- Indique que si la inecuación es mayor o menor la recta a trazar es discontinua, pero si la inecuación es mayor o igual, o menor o igual la recta a trazar es continua.
- Explique que para obtener la región donde cumple o satisface la inecuación de dos variables se puede tomar un par ordenado del plano  $xy$ , por ejemplo tomemos el punto  $(0, 0)$ , lo sustituimos en la inecuación. Si se cumple o satisface, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano.
- Recuerde que la región factible es la intersección de los dos semiplanos.

## ■ Actividades colaborativas

- Forme grupos de trabajo para que obtengan el sistema de inecuaciones de la situación planteada "Una compañía fabrica y vende modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y 30 minutos para el modelo B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo A y 10 minutos para el modelo B. se dispone para el trabajo manual de 6000 minutos al mes y para el de máquina de 4800 minutos al mes. Plantee las inecuaciones, determine la región factible, escriba los vértices de la región factible en el primer cuadrante y diga el número de lámparas que se pueden producir diariamente."
- Pida que expongan la situación planteada empleando desigualdades en papelotes. Puede variar los datos según los grupos.

9

## Sistemas de inecuaciones de primer grado

### 9.3 Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Este tipo de sistemas son de la forma 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y < c_1 \\ a_2x + b_2y < c_2 \end{cases}$$

El signo  $<$  puede cambiar y ser  $>$ ,  $\geq$  o  $\leq$ .

Si se tiene en cuenta lo aprendido en los temas 9.1 y 9.2, puede concluirse que la solución de un sistema de inecuaciones será una región del plano cartesiano en la cual se verifiquen, simultáneamente, cada una de las inecuaciones de dicho sistema.

#### Ten en cuenta

Al conjunto solución de un sistema de inecuaciones se le denomina "Región factible".

#### Actividad resuelta

Modelación

1 Resuelve el sistema 
$$\begin{cases} 2x + y > 4 \\ x - 2y < 8 \end{cases}$$

#### Solución:

Para la inecuación  $2x + y > 4$  se tiene que  $y > -2x + 4$ , así que se grafica la recta  $y = -2x + 4$  (color azul en la Figura 3).

Para la inecuación  $x - 2y < 8$  se tiene que  $y > \frac{x}{2} - 4$ , así que se grafica la recta  $y = \frac{x}{2} - 4$  (color rojo en la Figura 3).

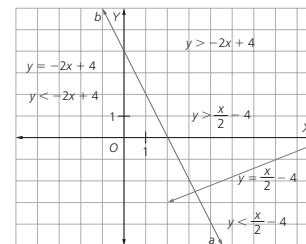


Figura 3

Como puede verse en el plano de la Figura 4, se generan cuatro regiones que están delimitadas, precisamente, por las rectas. Así, la solución del sistema será la región para la cual  $y > -2x + 4$  y  $y > \frac{x}{2} - 4$ , simultáneamente.

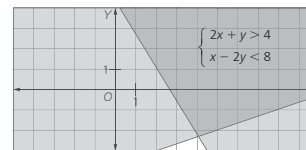


Figura 4

Bloque de Álgebra y funciones.

Desarrolla con criterio de desempeño: Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreado la solución. Resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica (en el plano) y reconocer la zona común sombreada como solución del sistema.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución gráficamente:
- $-2x - 3 > 5$
  - $-5x + 4 < 3$
  - $6x - (4 + 3x) < 2x + 4$
  - $\frac{-6x + 7}{-3} > \frac{8x - 4}{2}$
  - $2 - \left[ -2(x + 1) - \frac{x - 3}{2} \right] < \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3$

Razonamiento

3. Relaciona la inecuación con la gráfica correspondiente a su solución.
- |                   |                  |
|-------------------|------------------|
| a. $3x - 2y > 1$  | b. $-x + y < -4$ |
| c. $3x - 4y < -2$ | d. $x + 3y > 2$  |

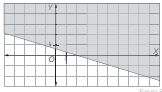


Figura 5

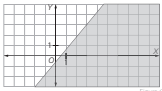


Figura 6

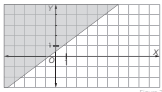


Figura 7

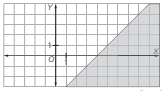


Figura 8

4. La solución de la siguiente inecuación es incorrecta. Explica por qué y escribe frente a cada paso del proceso lo que se hizo y cuál fue el error.

$$\frac{2}{x} < 2$$

$$3 < 2x$$

$$\frac{3}{x} < x$$

Ejercitación

5. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.
- |   |   |
|---|---|
| a. $\begin{cases} x - y < 2 \\ 2x > 6 \end{cases}$    | b. $\begin{cases} 2(x - 1) - y < 2 \\ y > 0 \end{cases}$  |
| c. $\begin{cases} x - y < 2 \\ x + y > 2 \end{cases}$ | d. $\begin{cases} 3x - 5y > 1 \\ 5x - 3y < 1 \end{cases}$ |

Modelación

6. Define un sistema de inecuaciones cuya solución, sea la región resaltada en la siguiente gráfica. Escribe los pasos que seguiste para determinar dicho sistema y explica si es el único que puede cumplir las condiciones pedidas.

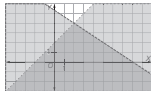


Figura 9

Resolución de problemas

7. Plantea para cada caso una inecuación con la que se describa la situación. Luego, resuélvela y verifica la respuesta.
- Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre su peso cuando está vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior a 415 kg. Si deben cargarse 4 cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder ser transportado en la furgoneta?
  - ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su duplo en más de 20?
  - Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7, ¿cuál es su perímetro?

Ejercitación

2. a.  $x < -4$     b.  $x > \frac{1}{5}$   
 c.  $x < 8$     d.  $x < \frac{-1}{6}$     e.  $x < \frac{1}{3}$

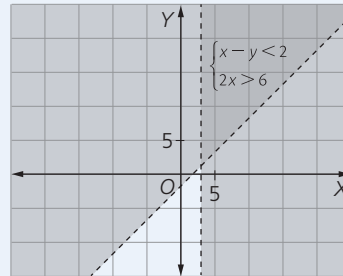
Razonamiento

3. a. Figura 6    b. Figura 8  
 c. Figura 7    d. Figura 5

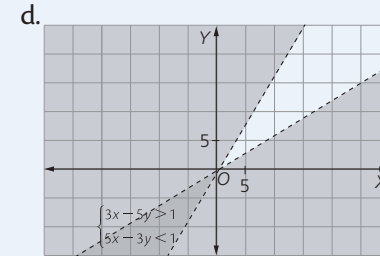
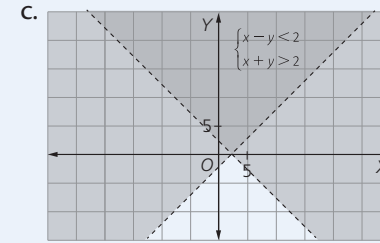
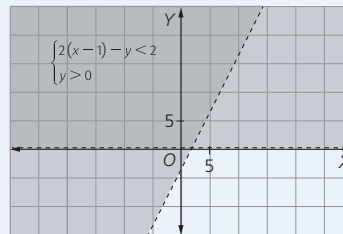
4. Multiplicó a ambos lados de la inecuación por  $x$ , lo cual no es posible porque  $x$  puede ser menor que cero.

Dividió a un lado de la inecuación por 2 y al otro por  $x$ , lo cual no es posible ya que  $x$  puede ser diferente de 2.

5. a.



b.



Modelación

6. Hay infinitas soluciones, por ejemplo

$$\begin{cases} y < -\frac{4}{6}x + \frac{16}{3} \\ y < x + 2 \end{cases}$$

Resolución de problemas

7. a. Cada cajón debe pesar como máximo 115 kg.  
 b. Son todos los números mayores que 20.  
 c. El perímetro es un número mayor o igual que 28.

UNIDAD  
**3**

## Evaluación sumativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Emplea el método gráfico para que determine la solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$$

2. Aplica el método de sustitución para que determine la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

3. Aplica el método de igualación para que determine la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$$

4. Aplica el método de reducción para que determine la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

5. Un fabricante de bombillas gana 0,3 dólares por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 0,4 dólares por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484,4 dólares. ¿Cuántas bombillas buenas y cuántas defectuosas fabricó ese día?

6. Aplica la regla de Cramer para que determine la solución del sistema:

$$\begin{cases} y - 13 = -3x \\ x = 19 - 4y \end{cases}$$

7. Aplica el método de Gauss para que determine la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x = 4 + y \end{cases}$$

8. Resuelve por el método que creas más adecuado el sistema:

$$\begin{cases} x - 2(x + y) = 3y - 2 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

9. Emplea axiomas de orden para obtener la solución de la inecuación lineal con una variable:  $x + 1 \geq \frac{x-2}{3}$

10. Emplea axiomas de orden para obtener la solución de sistema de inecuaciones de primer grado con una variable:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x - 5 \leq y \end{cases}$$

11. Un fabricante vende sillas y mesas. Para su fabricación, necesita 2 h y 5 h, respectivamente de trabajo manual y 1 h y 2 h para pintarlas. Si el fabricante no puede sobrepasar las 200 horas de trabajo manual y 90 horas de pintura. Plantee las inecuaciones, determine la región factible, escriba los vértices de la región factible en el primer cuadrante y diga el número de sillas y mesas que se pueden producir diariamente.

## UNIDAD

## 4

## Evaluación diagnóstica

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Al resolver el sistema  $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 9x + 12y = 27 \end{cases}$  se puede afirmar que:

- A. el sistema no tiene solución
- B. el sistema tiene solución única
- C. el sistema tiene infinitas soluciones
- D. el sistema es de cuatro variables

2. Al resolver el sistema  $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 9x + 12y = 27 \end{cases}$  por el método gráfico se puede afirmar que:

- A. las rectas tienen un solo punto en común
- B. las rectas no tienen un punto en común
- C. las rectas son perpendiculares
- D. las rectas tienen infinitos puntos en común

3. Al resolver el sistema  $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 9x + 12y = 27 \end{cases}$  por el método de Gauss se puede afirmar que:

- A. se produce una fila de ceros
- B. una columna de ceros
- C. una fila y una columna de ceros
- D. las dos filas se hacen cero

4. Al resolver el sistema  $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 9x + 12y = -27 \end{cases}$  por la regla de Cramer, se hace cero.

- A. el determinante de la matriz de términos independientes
- B. el determinante de la matriz de coeficientes
- C. el determinante de la matriz de coeficientes de x
- D. el determinante de la matriz de coeficientes de y

5. Al resolver el sistema  $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 9x + 12y = -27 \end{cases}$  por el método de reducción.

- A. se puede obtener el valor de las dos variables
- B. se produce la igualdad  $0 = 0$
- C. se produce la falsedad  $0 = -54$
- D. Se produce la verdad  $9 = 9$

6. Resuelve la inecuación  $3x + 4y > 9$  e indica el par ordenado que cumple con la desigualdad

- A. (0; 0)
- B. (3; 0)
- C. (0; 3)
- D. (0; 2)

7. El sistema de inecuaciones  $\begin{cases} 3x + 4y > 9 \\ 9x + 12y > -27 \end{cases}$  e indica el par ordenado que cumple con la desigualdad

- A. (0; 0)
- B. (3; 0)
- C. (-3; 0)
- D. (0; 3)

8. Resuelve el sistema de inecuaciones  $\begin{cases} 3x + 4y > 9 \\ 9x + 12y > -27 \end{cases}$  e indica el par ordenado que cumple con las desigualdades

- A. (-2; 4)
- B. (-2; 1)
- C. (-2; -1)
- D. (0; 0)

9. Al resolver el sistema de inecuaciones  $\begin{cases} 3x + 4y > 9 \\ 9x + 12y < -27 \end{cases}$  se puede afirmar que

- A. Hay infinitas soluciones
- B. No hay solución
- C. La solución está en el primer cuadrante
- D. La solución está en el segundo cuadrante

# Propósito de la unidad

## Álgebra y funciones

El propósito de esta unidad es, que el estudiante tenga una idea clara sobre la función cuadrática, esto es, dominio, recorrido, ceros de la función, etc. En este sentido, es importante que pueda realizar un bosquejo a partir de la ley de asignación, así como también interpretar una gráfica de una función de segundo grado e identificar los elementos básicos tales como: dominio, recorrido, vértice y ceros de la función con los ejes. En el momento que el estudiante elabora un bosquejo, obligatoriamente debe resolver una ecuación de segundo grado para encontrar las raíces o ceros de la función con el eje de las  $x$ . Es por eso que en esta unidad, se estudia de manera exhaustiva la ecuación de segundo grado, ya que existe un vínculo directo con la función cuadrática y sus elementos constitutivos.

Una vez que el estudiante pueda expresar y estudiar tanto la función cuadrática como la ecuación de segundo grado, estará en plena capacidad para resolver aplicaciones e interpretar sus resultados.

## Geometría y medida

Para tener una idea completa, es necesario hacer un estudio de la parábola desde el origen, esto es un pequeño estudio de la parábola como una cónica. Aquí se puede partir de la experiencia concreta, construyendo parábolas con origami o a través de trazos geométricos. Estas actividades refuerzan el estudio de la función cuadrática.

## Evaluaciones

La evaluación juega un papel muy importante en

todo proceso educativo, tanto para el estudiante como para el docente.

La evaluación le permite al estudiante verificar sus avances para tomar decisiones en el futuro. La evaluación también le permite al estudiante conocer sus estilos de aprendizaje para luego poder escoger la carrera o profesión que más se adecúe a sus intereses y capacidades.

Una evaluación bien estructurada le permite al docente evaluar su estilo de enseñanza y medir los logros y aprovechamiento de sus estudiantes. Según (Standaert, 2014) hay dos tipos de evaluación, una de carácter formativo y la otra sumativa.

### Diagnóstica

La evaluación diagnóstica se caracteriza por ser un tipo de evaluación que realiza por lo general al inicio de un año escolar, se la puede realizar también al momento de iniciar un bloque. Esta evaluación permite tener muy claro los conocimientos que se deben reforzar a través de distintas tareas antes del inicio de una nueva etapa. A la evaluación diagnóstica es una evaluación de carácter formativo.

### Formativa

Toda actividad que nos permita obtener información con la finalidad de encaminar, orientar y dirigir a los estudiantes, es una evaluación de carácter formativo. Con el propósito de que tenga una idea de cómo avanzan sus alumnos, puede aplicar una evaluación de este tipo, la misma que se presenta a la mitad de la unidad.

### Sumativa

Se dice que una evaluación es de carácter sumativo, cuando el propósito es la promoción de los estudiantes. Es decir, la evaluación pretende aportar una imagen final y general de cada uno de los estudiantes, es por eso que; es el resultado de todos los datos disponibles, ya sean pruebas, lecciones, tareas, observaciones, etc.

Como conclusión es importante anotar que la única diferencia entre una evaluación de carácter formativo y una evaluación de carácter sumativo es el propósito. En este sentido, la evaluación sumativa siempre será de carácter cuantitativo; mientras que la formativa, de carácter cuantitativo o cualitativo.

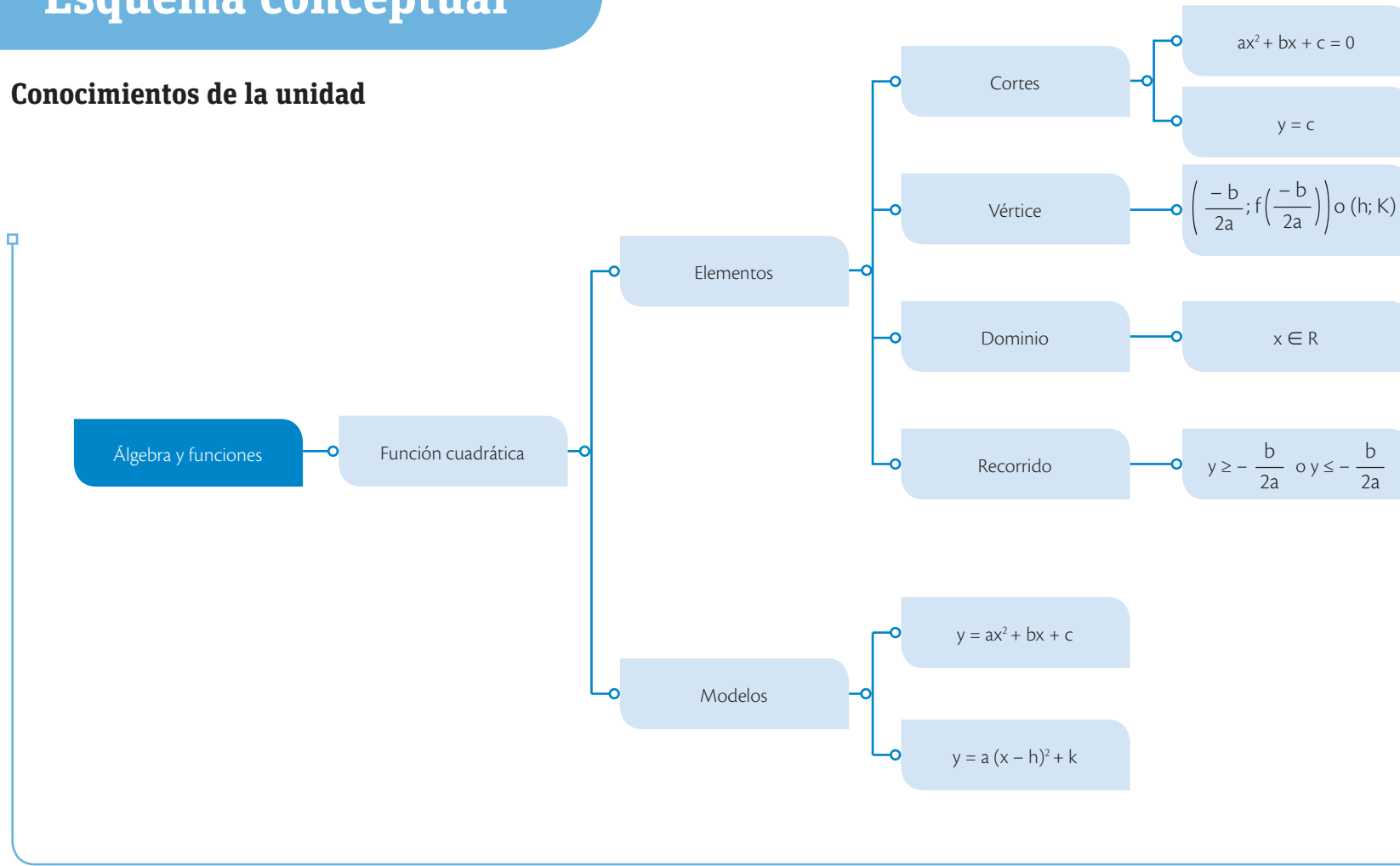
## Respuestas

### Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
6	7	8	9	
A	A	A	A	
B	B	B	B	
C	C	C	C	
D	D	D	D	

# Esquema conceptual

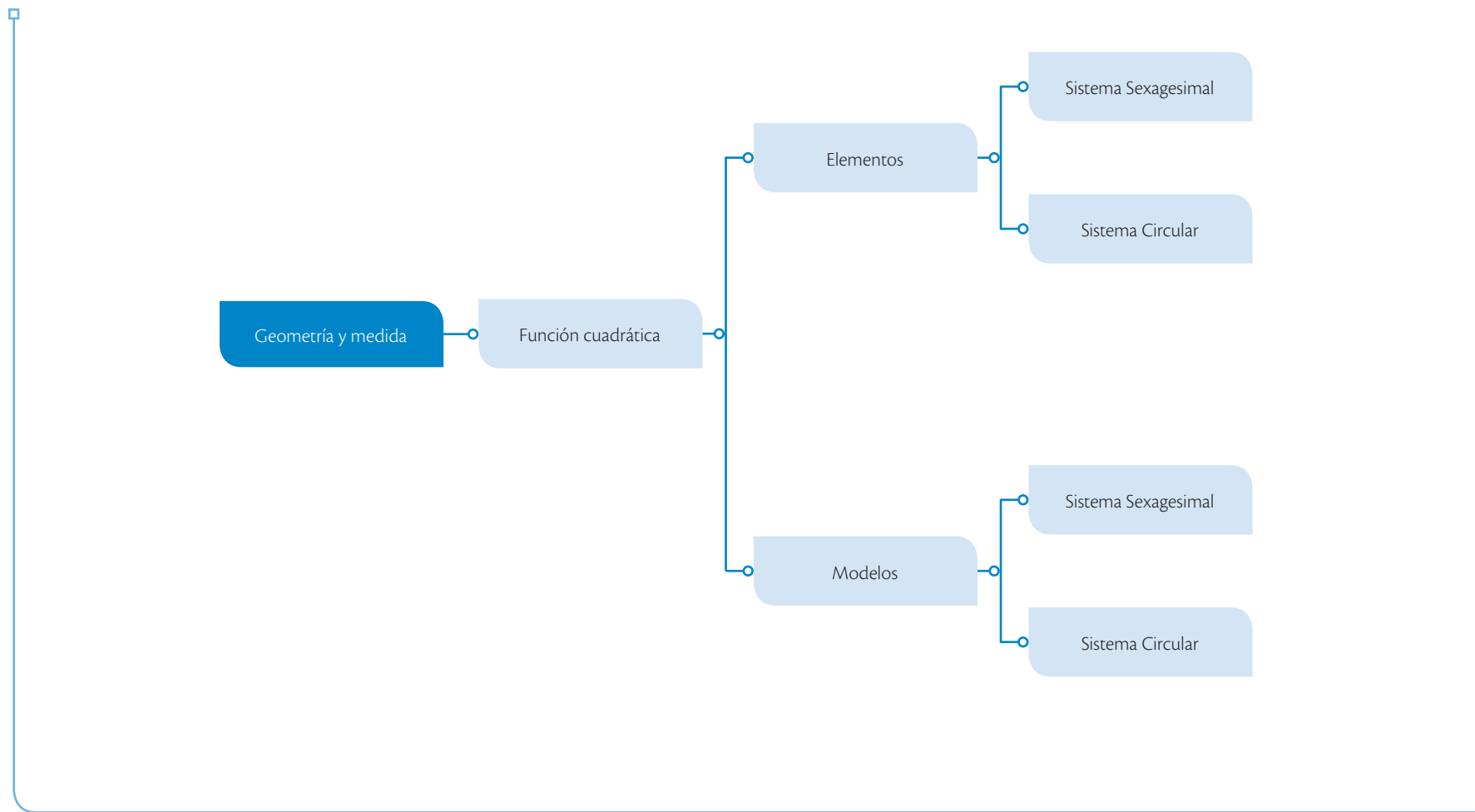
## Conocimientos de la unidad



## Cultura del Buen Vivir

### ■ Valor: La libertad

Podemos entender la libertad como la capacidad del ser humano de obrar según su propia voluntad, sin dejar de ser responsable de sus actos.



### ■ Compromiso a lograr

Usar la libertad, no solo para el beneficio propio, sino también para hacer el camino más fácil a los seres humanos que nos rodean. Cada vez que podemos ayudar a nuestros semejantes, estamos usando nuestra libertad en beneficio propio y de los demás.

# Planificación microcurricular

## Planificación de la unidad didáctica

### Unidad 4

Objetivos generales del área	Objetivos del área por subnivel
OG.M.2 – OG.M.5. – OG.M.6.	O.M.4.1 – O.M.4.2.
Objetivos de subnivel	Valores
M.4.1.24 – M.4.1.57 – M.4.1.58 – M.4.1.59 – M.4.1.60 – M.4.2.7	Libertad
Criterios de evaluación	Indicadores de evaluación
CE.M.4.2 – CE.M.4.3 – CE.M.4.5	I.M.4.2.1 – I.M.4.3.2 – I.M.4.5.1
Objetivos de la unidad	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar e interpretar funciones cuadráticas</li> <li>• Resolver ecuaciones de segundo grado</li> <li>• Resolver problemas de aplicación usando el modelo cuadrático</li> </ul>	

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
Álgebra y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Operar con polinomios de grado <math>\leq 2</math> (adición y producto por escalar) en ejercicios numéricos y algebraicos.</li> <li>• Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica, determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos y paridad.</li> <li>• Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proponga un problema para modelizar, utilizando los conocimientos de la función lineal y cuadrática, por ejemplo: Un diseñador cuenta con una pieza de material de publicidad en forma triangular. De esta necesita obtener un rectángulo con la mayor área posible. Al determinar las medidas de sus catetos, estos miden 40 y 60 centímetros, respectivamente. Calcula las medidas del rectángulo.</li> <li>• Represente la situación a través del siguiente gráfico 1, asocie un sistema de coordenadas, gráfico 2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Emplea las operaciones con polinomios de grado <math>\leq 2</math> en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos; expresa polinomios de grado 2 como la multiplicación de polinomios de grado 1. (I.4.)</li> </ul>	

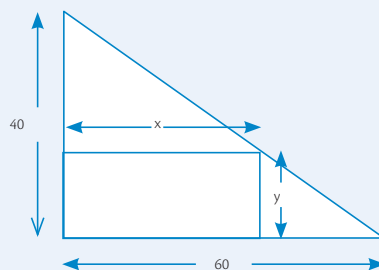
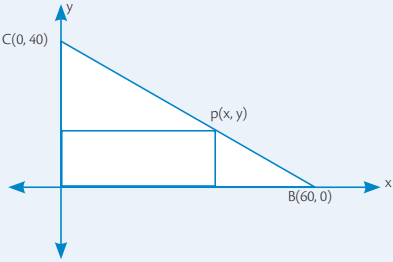


Gráfico 1

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
Álgebra y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoro, completación de cuadrados, fórmula binomial) en la solución de problemas.</li> <li>Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.</li> </ul>	 <p style="text-align: center;">Gráfico 2</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Explique que las dimensiones del rectángulo buscado, dependen directamente de los valores que tome x e y. Estos valores corresponden a los puntos del segmento CB.</li> <li>Pida a que calculen la ecuación de la recta que pasa por los puntos C y B <math>\frac{2x - 120}{-3} = y</math>. También puede solicitar el dominio y recorrido <math>x \in [0, 60]</math> e <math>y \in [0, 40]</math>.</li> <li>Explique que la altura (y) del rectángulo es la función encontrada, es decir que la altura depende de la base. Haga notar que si el ancho (x) del rectángulo aumenta, la altura (y) disminuye y viceversa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema. (I.2.)</li> </ul>	<p><b>Tarea grupal</b></p> <p>Resolver los ejercicios planteados en las actividades planteadas en desarrolla tus destrezas.</p> <p><b>Actividades individual</b></p> <p>Resuelve y formula problemas. / Ficha de observación y coevaluación</p> <p><b>Prueba de bloque</b></p> <p>Prueba objetiva./ Rúbrica de evaluación</p>
Geometría y medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocer y trazar líneas de simetría en figuras geométricas para completarlas o resolverlas.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>Construye figuras simétricas; resuelve problemas geométricos que impliquen el cálculo de longitudes con la aplicación de conceptos de semejanza y la aplicación del teorema de Tales; justifica procesos aplicando los conceptos de congruencia y semejanza. (I.1., I.4.)</li> </ul>	<p><b>Tarea grupal</b></p> <p>En grupos de 3 personas deben proponer solución al problema planteado.</p> <p><b>Actividades colaborativas y talleres</b></p> <p>propuestos en el libro de trabajo. / Tabla de cotejo</p> <p><b>Prueba de bloque</b></p> <p>Prueba objetiva./ Rúbrica de evaluación</p>

**Recursos:** Texto guía, cuaderno de trabajo, materiales elaborados por el docente, medios visuales y material concreto.

**Bibliografía:** Tan T. Soo, Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida 5a ed. 2012 – LEHMAN, Algebra, LIMUSA editores, México D.F. 2011 – GALINDO Edwin, Matemáticas Superiores, Prociencia Editores, Ecuador 2010

## Ampliación conceptual

Expresar el modelo como  $f(x) = y = ax^2 + bx + c$  como  $f(x) = y = a(x - h)^2 + c$ , en muchas ocasiones es de gran utilidad. En este modelo, el vértice estará dado por las coordenadas  $(h, C)$ :

$y = ax^2 + bx + c$	Extraemos factor común $a$ :
$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$	A la expresión le completamos el trinomio cuadrado perfecto:
$\left( x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$	Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto
$y = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$	Aplicamos la distributiva:
$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c$	$h = -\frac{b}{2a}$ ; $c = -\frac{b^2}{4a^2} + c$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Haga la deducción del modelo  $y = a(x - h)^2 + C$  a partir del modelo  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Evalúe los dos modelos para distintos valores y verifique que son equivalentes, con esto de libertad a los estudiantes para usar uno u otro modelo.
- De asistencia a cada uno de los grupos mientras intentan modelar la situación expuesta en la planificación.

## 1 Función cuadrática

### Explora

El salto de cierta rana se puede modelar mediante la función:

$$h(t) = 2t - t^2$$

Donde  $t$  es el tiempo medido en segundos y  $h$  la altura en metros.



- ¿Cuánto durará el salto de la rana?
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la rana en ese salto?

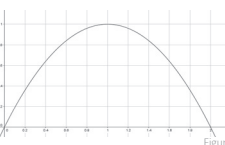


Figura 1

### Ten en cuenta

Toda parábola es simétrica, y sobre su eje de simetría se encuentra el vértice de la parábola que es el valor máximo o el valor mínimo que toma la función.

En la Tabla 1 se muestra la altura del salto de la rana en cinco momentos distintos.

$t$	0	0,5	1	1,5	2
$h(t)$	0	0,75	1	0,75	0

Tabla 1

Según los datos, la rana está en el piso cuando  $t = 0$  y  $t = 2$ , pues su altura es 0 en ambos instantes. Es decir,  $h(0) = 0$  y  $h(2) = 0$ .

El instante  $t = 0$  corresponde al momento de iniciar el salto, y el instante  $t = 2$  corresponderá al instante en que la rana vuelve al piso después de haber saltado. Esto significa que el salto tardó 2 segundos.

Por otra parte, la máxima altura que alcanza la rana corresponde al mayor valor de  $h(t)$  registrado en la tabla. Este es 1, por lo cual se deduce que la mayor altura que alcanza la rana en este salto es de 1 m (figura 1).

Muchas situaciones son modeladas mediante funciones que involucran el cuadrado de una variable. Este tipo de funciones se denominan **funciones cuadráticas**.

Una **función cuadrática** es de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a, b$  y  $c$  son números reales y  $a \neq 0$ .

### 1.1 Representación gráfica de una función cuadrática

La representación gráfica de la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  es una parábola que se caracteriza por tener los siguientes elementos.

- Vértice (V):** punto donde la parábola alcanza su punto máximo, si  $a < 0$ , o su punto mínimo, si  $a > 0$ .
- Cortes de la parábola con los ejes coordenados (ceros de la función):** puntos donde el valor de la función es 0. Las coordenadas de los puntos de corte con el eje  $X$  son de la forma  $(x, 0)$ . En estos casos, el valor de  $x$  se halla resolviendo la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- Eje de simetría:** recta paralela al eje  $Y$ , que pasa por la coordenada  $x$  del vértice.
- Concavidad:** una parábola es cóncava hacia arriba si  $a > 0$  o es cóncava hacia abajo si  $a < 0$ .

### Actividad resuelta

Comunicación

- Representa gráficamente la función  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$ .

#### Solución:

Para comenzar, se puede completar una tabla de valores como la Tabla 2, asignando valores arbitrarios a la variable  $x$ . Luego, se representan en el plano cartesiano.

Como la función está definida para cualquier valor real, al trazar la curva se obtiene la Figura 1.

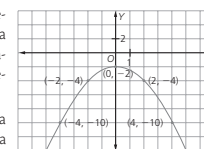


Figura 2

Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Identifica cuáles de las siguientes expresiones pueden representar una función cuadrática.
- a.  $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
  - b.  $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
  - c.  $f(n) = -0,25n^2 - 0,5n + 1$
  - d.  $f(x) = -6x + 1$
  - e.  $f(t) = -4t - 5 + 32t^2$

3. Escribe cada función en la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .
- Luego, identifica los valores correspondientes de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
  - a.  $f(x) = 4x + 10 - 16x^2$
  - b.  $f(x) = -6x + 5 + x^2$
  - c.  $f(x) = x^2 + 10 - 6x$
  - d.  $f(x) = -2 + x^2 - 4x$

Modelación

4. Escribe la ecuación del eje de simetría de cada parábola y las coordenadas del vértice.

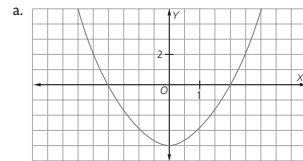


Figura 3

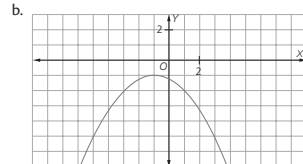


Figura 4

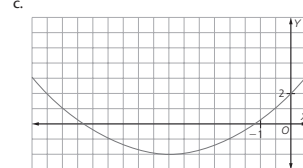


Figura 5

Razonamiento

5. Relaciona cada función cuadrática con la gráfica correspondiente.

a.  $f(x) = x^2 - 6x + 10$

x	1	2	3	4	5
y	5	2	1	2	5

Tabla 3

b.  $f(x) = -x^2 + 4$

x	-3	-2	0	2	3
y	-5	0	4	0	-5

Tabla 4

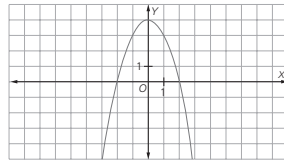


Figura 6

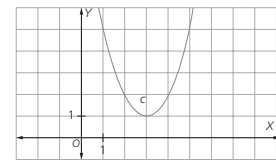


Figura 7

Resolución de problemas

6. El movimiento de cierta partícula está determinado por la función  $f(x) = x^2 - 4$ . Su trayectoria se muestra en la Figura 7.

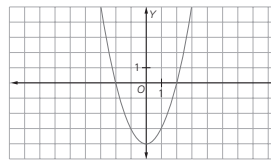


Figura 8

- a. ¿Qué coordenadas tiene el punto más bajo que alcanza la partícula?
- b. ¿En qué valores la trayectoria corta al eje vertical?
- c. ¿En qué valores corta al eje horizontal?

APLICA © EDICIONES SM

Ejercitación

- 2.
- a. Sí es función cuadrática.
  - b. No es función cuadrática.
  - c. Sí es función cuadrática.
  - d. No es función cuadrática.
  - e. Sí es función cuadrática.

3.

- a.  $f(x) = -16x^2 + 4x + 10$ ;  $a = -16$ ,  $b = 4$ ,  $c = 10$
- b.  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ;  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 5$
- c.  $f(x) = x^2 - 6x + 10$ ;  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 10$
- d.  $f(x) = x^2 - 4x - 2$ ;  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = -2$

Modelación

4.

- a.  $V(0, -4)$ ;  $x = 0$
- b.  $V(-1, -1)$ ;  $x = -1$
- c.  $V(-4, -2)$ ;  $x = -2$

Razonamiento

5. Tabla 3 → Figura 6 y Tabla 4 → Figura 7

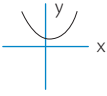
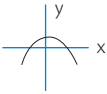
Resolución de problemas

6.

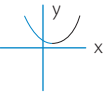
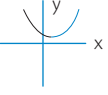
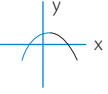
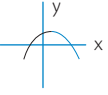
- a. El punto más bajo que alcanza la partícula tiene coordenadas  $(0, -4)$ .
- b. La trayectoria corta al eje vertical en el punto  $(0, -4)$ .
- c. La trayectoria corta al eje horizontal en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .

## Ampliación conceptual

La concavidad como uno de los elementos importantes de la función cuadrática, se resume en la siguiente tabla

Características			
Vértice	Simetría	Concavidad	Gráfico
$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$	$x = -\frac{b}{2a}$	$a > 0$ Positiva: Cónca	
		$a < 0$ Negativa: Convexa	

Otro de los elementos estudiados en todas las funciones es la monotonía, por ello, se resume en la tabla siguiente.

Intervalo	Monotonía		Gráficos
$\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$	Decreciente	Para todo $x_1, x_2$ elemento del intervalo, si $x_1 < x_2$ , $f(x_1) > f(x_2)$ .	
	Creciente	Para todo $x_1, x_2$ elemento del intervalo, si $x_1 < x_2$ , $f(x_1) < f(x_2)$ .	
$\left]-\frac{b}{2a}, \infty\right[$	Creciente	Para todo $x_1, x_2$ elemento del intervalo, si $x_1 < x_2$ , $f(x_1) < f(x_2)$ .	
	Decreciente	Para todo $x_1, x_2$ elemento del intervalo, si $x_1 < x_2$ , $f(x_1) > f(x_2)$ .	

## 2 Gráficas de funciones cuadráticas

### 2.1 Funciones de la forma $f(x) = ax^2$

Al calcular algunos de los valores de la función  $f(x)$ , se obtiene la Tabla 1:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	16	9	4	1	0	1	4	9

Tabla 1

Al calcular la razón de cambio entre los pares de puntos del primer cuadrante se encuentra que esta no es constante y que siempre es positiva, luego es una función cuya gráfica no es una línea recta y es creciente en el primer cuadrante.

La razón de cambio en el segundo cuadrante tampoco es constante y es negativa, luego la función no tiene por gráfica una recta y es decreciente en el segundo cuadrante.

Además se cumple que  $f(a) = f(-a)$  para todo número real  $a$ , así que  $f$  es simétrica con respecto al eje  $Y$ , es decir, es par. La gráfica con estas condiciones es una parábola, con vértice en  $(0, 0)$ , como se observa en la Figura 1.

#### Explora

Considera la función que le hace corresponder su cuadrado a cada número real, es decir:

$$f(x) = x^2$$

- Construye la tabla de valores y elabora su gráfica.

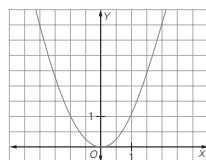


Figura 1

Una función definida por la expresión  $y = ax^2$ , con  $a \neq 0$ , se conoce como **función cuadrática con vértice en el origen**.

#### Ejemplo 1

Se puede determinar la variación de las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma  $f(x) = ax^2$ , analizando el resultado para los distintos valores de  $a$ .

- Si  $a > 1$ , la gráfica de la función es una contracción de la gráfica de la función  $f(x) = ax^2$ . Si  $0 < a < 1$ , la gráfica de la función es una dilatación de la gráfica de la función  $f(x) = ax^2$ .

En la Tabla 2, las parábolas representadas son  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2x^2$  y  $h(x) = ax^2$  para  $a > 1$ ; y  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 0,5x^2$  y  $h(x) = 0,33x^2$  para  $0 < a < 1$ .

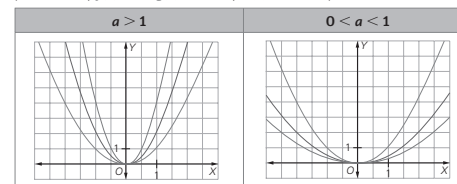


Tabla 2

- Cuando  $a < 0$ , las gráficas de las funciones se obtienen reflejando las gráficas de los casos anteriores con respecto al eje  $X$ , como se ve en la Tabla 3.

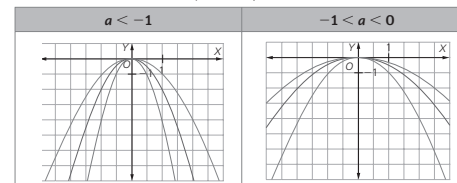


Tabla 3

Bloque de Álgebra y funciones

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad.

**2.2 Funciones de la forma  $f(x) = ax^2 + c$**

La parábola que describe la función  $f(x) = ax^2 + c$  es una traslación vertical de  $c$  unidades de la parábola  $f(x) = ax^2$ . Esta traslación es hacia arriba si  $c > 0$  y hacia abajo si  $c < 0$ .

El vértice de la parábola  $f(x) = ax^2 + c$  está ubicado en el punto  $(0, c)$  y el eje de simetría es el eje  $Y$ .

**Ejemplo 2**

En la Figura 4 se muestra la representación gráfica de las funciones  $g(x) = x^2 + 3$  y  $h(x) = x^2 - 4$ , a partir de la gráfica de  $f(x) = x^2$ .

La parábola correspondiente a  $g(x) = x^2 + 3$  tiene un desplazamiento de 3 unidades hacia arriba con respecto a  $f(x) = x^2$ , y la parábola que corresponde a  $h(x) = x^2 - 4$  tiene un desplazamiento de 4 unidades hacia abajo.

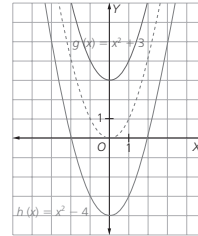


Figura 4

**2.3 Funciones de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$**

La función de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  es una función cuadrática en la cual  $a, b$  y  $c$  son todos diferentes de 0.

La función  $f(x) = ax^2 + bx + c$  puede llevarse a una de las formas:

$$f(x) = a(x - h)^2 \text{ o } f(x) = a(x - h)^2 + k$$

- Si la función es de la forma  $f(x) = a(x - h)^2$ , el vértice de la parábola es el punto  $(h, 0)$  y el eje de simetría es el eje  $Y$ .
- Si la función es de la forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ , el vértice de la parábola es el punto  $(h, k)$  y el eje de simetría es la recta  $x = h$ .

**Ejemplo 3**

- La función  $g(x) = x^2 - 6x + 9$  se puede expresar como  $g(x) = (x - 3)^2$ , con lo cual se identifica que el vértice es  $(3, 0)$ . Además, su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola  $f(x) = x^2$ , 3 unidades a la derecha.
- La función  $h(x) = x^2 + 4x + 4$  se puede expresar como  $g(x) = (x + 2)^2$ , por lo tanto, se concluye que su vértice es  $(-2, 0)$ . Su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola  $f(x) = x^2$ , 2 unidades a la izquierda (Figura 5).

**Razonamiento matemático**

**Funciones cuadráticas**

La parábola  $y = x^2 + 8x + k$  tiene su vértice en el eje de las abscisas.

- ¿Cuál es el valor de  $k$ ?

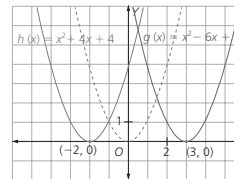


Figura 5

**Actividad resuelta**

**Modelación**

1. Elabora la gráfica de la parábola  $g(x) = -3x^2 + 12x - 11$ , teniendo en cuenta cómo varía con respecto a la parábola  $f(x) = -3x^2$ .

**Solución:**

La función  $g(x) = -3x^2 + 12x - 11$  se puede expresar como:

$$g(x) = -3(x - 2)^2 + 1$$

A partir de la ecuación anterior, se sabe que:

Vértice:  $(2, 1)$  Eje de simetría:  $x = 2$

Además, la gráfica se obtiene trasladando la parábola  $f(x) = -3x^2$ , 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba (Figura 6).

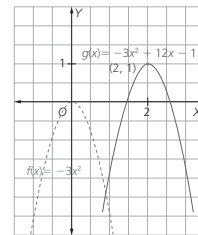


Figura 6

APLICA © EDICIONES SM

Nota: En todas las representaciones gráficas, el eje de simetría tiene por ecuación la expresión:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

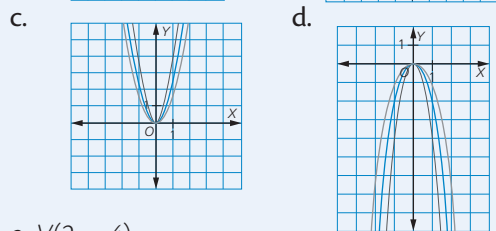
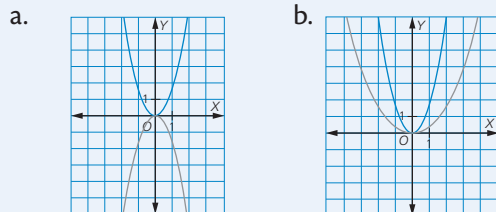
- Utilice un graficador, por ejemplo Geogebra, esto ayuda a dinamizar la comprensión de esta lección.
- De forma permanente pregunte por el dominio, recorrido, concavidad, etc.
- Completar el trinomio cuadrado perfecto facilita la obtención del modelo  $y = a(x - h)^2 + C$ , con lo cual, la determinación del vértice es muy fácil, a la vez que se refuerza la destreza algebraica.
- Ponga a un intervalo en el que la función crezca y decrezca.
- Utilice el eje de simetría para completar las gráficas.

**Actividades colaborativas**

- Pida a sus estudiantes que analicen si la función  $y = -(x - 2)^2$  es creciente o decreciente en el intervalo de 0 a 1.
- En grupos de dos o tres, invite a sus estudiantes para que determinen un método para asegurar en qué intervalo la función presentada es creciente y en qué intervalo es decreciente.
- Pida que determinen el vértice y que realicen un bosquejo.

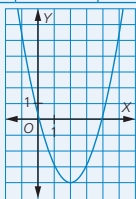
## Comunicación

2.



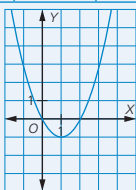
3. a.  $V(2, -4)$

<b>x</b>	0	1	2	3	4
<b>y</b>	0	-3	-4	-3	0



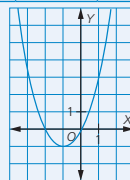
b.  $V(1, -1)$

<b>x</b>	-1	0	1	2	3
<b>y</b>	3	0	-1	0	3



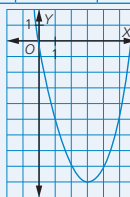
c.  $V(-1, -1)$

<b>x</b>	-3	-2	-1	0	1
<b>y</b>	3	0	-1	0	3



d.  $V(3, -9)$

<b>x</b>	0	1	2	3	4
<b>y</b>	0	-5	-8	-9	-8



4.

a.  $f(x) = x^2 - 3$    b.  $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$

5.

a.  $f(x) = (x + 1)^2 + 2, V(-1, 2)$   
 b.  $f(x) = (x - 1)^2 + 4, V(1, 4)$   
 c.  $f(x) = 3(x + 1)^2 + 1, V(-1, 1)$

## Razonamiento

6.

Las funciones que las describen son  $(x + 1)^2$  y  $(x + 1)^2 - 1$

**Bloque de Álgebra y funciones**

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica determinando sus características.

**Desarrolla tus destrezas**

**Comunicación**

2. Elabora las gráficas de las funciones cuadráticas de cada grupo en un mismo plano cartesiano. Explica sus diferencias y semejanzas.

a.  $f(x) = 2x^2$     $g(x) = -2x^2$   
 b.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$     $g(x) = 2x^2$   
 c.  $f(x) = 2x^2$     $g(x) = 3x^2$     $h(x) = 4x^2$   
 d.  $f(x) = -2x^2$     $g(x) = -3x^2$     $h(x) = -4x^2$

3. Halla el vértice de cada parábola. Luego, elabora una tabla de valores y la gráfica correspondiente.

a.  $f(x) = x^2 - 4x$    b.  $f(x) = x^2 - 2x$   
 c.  $f(x) = x^2 + 2x$    d.  $f(x) = x^2 - 6x$

4. Determina la ecuación de la función cuadrática que define cada tabla de valores.

a.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	1	-2	-3	-2	1

Tabla 4

b.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$

Tabla 5

5. Lleva cada función a la forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ . Luego, escribe las coordenadas del vértice de la parábola que la representa.

a.  $f(x) = x^2 + 2x + 3$   
 b.  $f(x) = x^2 - 2x + 5$   
 c.  $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

**Razonamiento**

6. Observa la Figura 7. Luego, explica qué tipo de transformación sufrió la parábola a para obtener la parábola b. Determina las funciones que las describen.

Figura 7

7. Determina la función que corresponde a cada parábola, e indica si es una función par o impar.

a.

Figura 8

b.

Figura 9

c.

Figura 10

**Resolución de problemas**

8. El movimiento de una pelota puede expresarse mediante la función  $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$ , donde  $x$  representa el tiempo en segundos y  $f(x)$  la altura en metros. ¿Qué altura alcanza la pelota al transcurrir 2 segundos desde el inicio del movimiento?

119

### 3 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

#### Explora

El perímetro del rectángulo de la Figura 1 es 24 cm y su área es 35 cm<sup>2</sup>.

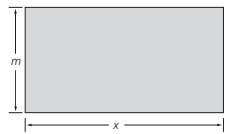


Figura 1

• ¿Cuáles son las dimensiones de dicho rectángulo?

En términos algebraicos, el perímetro y el área del rectángulo se pueden expresar así:

$$\text{Perímetro: } P = 2x + 2m$$

$$\text{Área: } A = x \cdot m$$

Teniendo en cuenta los datos, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$24 = 2x + 2m, \text{ de donde } 12 = x + m$$

$$35 = x \cdot m$$

Al despejar  $m$  en la expresión para el perímetro se tiene que  $m = 12 - x$ , y al reemplazar este valor en la expresión del área se tiene que:

$$35 = x \cdot (12 - x) \Rightarrow 35 = 12x - x^2 \\ \Rightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática, ya que la máxima potencia de la incógnita  $x$  es 2.

Al resolver esta ecuación se obtiene que las dimensiones del rectángulo son 7 cm y 5 cm, respectivamente.

Una **ecuación cuadrática o de segundo grado** es una expresión de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a, b$  y  $c$  son números reales y  $a \neq 0$ .

La ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  es:

- **Completa**, si  $b \neq 0$  y  $c \neq 0$ .
- **Incompleta**, si  $b = 0$  o  $c = 0$ . Es decir, presenta alguna de las formas  $ax^2 + c = 0$  o  $ax^2 + bx = 0$ .

#### 3.1 Resolución de la ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$

La **ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + c = 0$** , con  $a$  y  $c$  números reales, se resuelve despejando la incógnita  $x$ . Puede tener dos raíces o soluciones reales o no tener ninguna solución real.

##### Ejemplo 1

- Para resolver la ecuación  $5x^2 - 12 = 0$  se pueden aplicar las propiedades de las igualdades, como se muestra a continuación:

$$5x^2 - 12 = 0 \quad \text{Se parte de la ecuación dada.}$$

$$5x^2 - 12 + 12 = 0 + 12 \quad \text{Se suma 12 en ambos lados de la igualdad.}$$

$$5x^2 = 12 \quad \text{Se efectúan las operaciones.}$$

$$x^2 = \frac{12}{5} \quad \text{Se divide entre 5 en ambos lados de la igualdad.}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{12}{5}} = \pm \frac{2\sqrt{15}}{5} \quad \text{Se extrae la raíz cuadrada.}$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{15}}{5} \text{ o } x_2 = -\frac{2\sqrt{15}}{5} \quad \text{Se obtienen las soluciones.}$$

- Al aplicar las propiedades de las igualdades para resolver la ecuación  $3x^2 + 11 = 0$ , se obtiene que:

$$3x^2 + 11 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 11 - 11 = 0 - 11 \Rightarrow 3x^2 = -11$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{11}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{11}{3}} \quad \text{No corresponde a un número real.}$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación  $3x^2 + 11 = 0$  no tiene raíces reales.

#### App

##### Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Abre la aplicación *Ecuaciones de 2º Grado*, ingresa el valor de los coeficientes, resuelve el sistema y visualiza las soluciones gráficamente.



## Ampliación conceptual

### Deducción general

Es preciso notar que el modelo  $y = ax^2 + bx + c$ , al completar el trinomio cuadrado perfecto se puede expresar como  $y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ . Este modelo cuadrático puede o no cortar al eje de las  $x$ , para saber esto, damos el valor de cero a  $y$ , con lo cual el modelo queda reducido a  $0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ , con lo cual

$0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  despejando  $x$  obtenemos los cortes posibles sobre el eje de las abscisas.

$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ , resolviendo tenemos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , con lo cual queda demostrado que el método general para resolver una ecuación de segundo grado es la completación del trinomio cuadrado perfecto.

### Deducción para el caso $b = 0$

Reemplazamos  $b = 0$  en el modelo  $0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ , obteniéndose  $0 = a \left( x + \frac{0}{2a} \right)^2 - \frac{0^2}{4a} + c$ ; resolviendo

tenemos  $0 = a(x)^2 + c$ , despejando  $x$ , se obtiene  $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ ; en este caso, puede o no haber solución, esto depende del signo que se obtenga dentro de la raíz.

### Deducción para el caso $c = 0$

Reemplazamos  $c = 0$  en el modelo  $0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ , obteniéndose  $0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 0$ ; resolviendo

tenemos  $0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a}$ , despejando  $x$ , se obtiene

# Libro del alumno

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}}; x = -\frac{-b}{2a} \pm \frac{b}{2a}. \text{ En este caso, siempre}$$

habrá solución, pues no hay la posibilidad de que la raíz sea negativa.

## Ejemplo general

$$\text{Resolver la ecuación } 0 = x^2 + 5x + 6$$

Igual que en la deducción de la fórmula, completamos el trinomio cuadrado perfecto y lo podemos expresar como

$$0 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4a} + 6. \text{ Reducimos términos semejantes,}$$

$$0 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \text{ ahora despejamos } x \text{ para obtener:}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}, \text{ resolviendo nos queda:}$$

$$x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = -2 \text{ o } x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = -3. \text{ Esto}$$

significa que los cortes con el eje  $x$  son los puntos

$(-2; 0)$  y  $(-3; 0)$ .

## Ejemplo para el caso $b = 0$

$$\text{Resolver la ecuación } 0 = 3x^2 - 2$$

Reemplazamos,  $a = 3$ ,  $b = 0$  y  $c = -2$  en el modelo

$$0 = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \text{ obteniéndose } 0 = 3 \left(x + \frac{0}{2 \cdot 3}\right)^2 - \frac{0^2}{4 \cdot 3} - 2 \text{ resolviendo tenemos } 0 = 3(x)^2 - 2, \text{ despejando}$$

$$x, \text{ se obtiene } x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}. \text{ Esto significa que los cortes con}$$

$$\text{el eje } x \text{ son los puntos } \left(0; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \text{ y } \left(0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

## Ejemplo para el caso $c = 0$

$$\text{Resolver la ecuación } 0 = 3x^2 - 2x$$

Reemplazamos  $a = 3$ ,  $b = -2$  y  $c = 0$  en el modelo

### Bloque de Álgebra y funciones

- Destrezas con criterios de desempeño:**
- Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.
  - Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoreo) en la solución de problemas.

### 3.2 Resolución de la ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$

La ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx = 0$ , con  $a$  y  $b$  números reales, se puede resolver mediante la factorización.

El método para resolver una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx = 0$  se basa en usar el factor común en la expresión y analizar las condiciones de dichos factores.

#### Ejemplo 2

Observa cómo se resuelve la ecuación  $-2x^2 + 6x = 0$  mediante la factorización.

$$-2x^2 + 6x = 0$$

Se parte de la ecuación dada.

$$2x(-x + 3) = 0$$

Se extrae el factor común  $2x$ .

$$2x = 0 \text{ o } -x + 3 = 0$$

Si  $m \cdot n = 0$ , entonces  $m = 0$  o  $n = 0$ .

$$x = 0 \text{ o } x = 3$$

Se encuentran los valores de la incógnita  $x$ .

En general, la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx = 0$  tiene dos raíces o soluciones reales de la forma:

$$x = 0 \text{ o } x = -\frac{b}{a}$$

#### Ejemplo 3

La ecuación  $-2x^2 + 6x = 0$  es de la forma  $ax^2 + bx = 0$ , con  $a = -2$  y  $b = 6$ .

Por lo tanto, las soluciones se pueden hallar como sigue:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{-2} = 3$$

### 3.3 Resolución de la ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$

La ecuación cuadrática de la forma  $x^2 + bx + c = 0$ , con  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales, se puede resolver aplicando la factorización de trinomios.

#### Ejemplo 4

Para resolver la ecuación  $x^2 + 2x - 15 = 0$  se procede de la siguiente forma:

- Se factoriza la expresión algebraica.

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

- Se analiza cada uno de los factores, teniendo en cuenta que el producto es cero:

$$(x + 5) = 0 \text{ o } (x - 3) = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ o } x = 3$$

Así, las soluciones de la ecuación  $x^2 + 2x - 15 = 0$  son  $x = -5$  y  $x = 3$ .

#### Ejemplo 5

Para calcular las dimensiones de un mural cuyo ancho es 3 m menos que su largo y su área es de 18 m<sup>2</sup>, se plantea y resuelve la ecuación  $x(x - 3) = 18$ , con  $x$  la longitud del largo del mural. Esta ecuación es equivalente a  $x^2 - 3x - 18 = 0$ , y al aplicar la factorización se tiene:

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6) = 0 \text{ o } (x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 \text{ o } x_2 = -3$$

Por lo tanto, las dimensiones del mural son 6 m de largo y 3 m de ancho.

### CULTURA del Buen Vivir

#### La libertad

Para obrar con libertad (es decir, según nuestra propia voluntad) es necesario que confluyan dos condiciones, responsabilidad para actuar y normas y leyes claras.

- Escribe sobre tres situaciones de la vida cotidiana donde es importante saber ejercer la libertad.

#### Ten en cuenta

Las soluciones reales de la ecuación de segundo grado de la forma  $x^2 + bx + c = 0$  corresponden con los puntos de corte con el eje  $X$  de la gráfica de la función  $f(x) = x^2 + bx + c$ .

### 3 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

#### 3.4 Resolución de la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

La **ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$** , con  $a, b$  y  $c$  números reales, se resuelve mediante la factorización del trinomio  $ax^2 + bx + c$ , siempre y cuando este sea factorizable.

##### Ejemplo 6

Para resolver la ecuación  $10x^2 - 33x - 7 = 0$ , se puede proceder como sigue:

$10x^2 - 33x - 7 = 0$	Se parte de la ecuación dada.
$10(10x^2 - 33x - 7) = 0 \cdot 10$	Se multiplica en ambos lados de la ecuación por el coeficiente de $x$ .
$(10x)^2 - 33(10x) - 70 = 0$	Se efectúan las operaciones.
$(10x - 35)(10x + 2) = 0$	Se factoriza la expresión.
$(10x - 35) = 0$ o $(10x + 2) = 0$	Se iguala a 0 cada factor.
$x_1 = \frac{7}{2}$ o $x_2 = -\frac{1}{5}$	Se resuelven las ecuaciones resultantes.

Luego, la ecuación  $10x^2 - 33x - 7 = 0$  tiene dos raíces reales:

$$x_1 = \frac{7}{2} \text{ y } x_2 = -\frac{1}{5}$$

##### Actividades resueltas

Comunicación

1 Halla la solución de estas ecuaciones.

- a.  $5x^2 - 9x + 4 = 0$       b.  $3x^2 - 4x - 4 = 0$

**Solución:**

En los dos casos se aplica la factorización de trinomios.

$$\begin{aligned} \text{a. } 5x^2 - 9x + 4 = 0 &\Rightarrow 5(5x^2 - 9x + 4) = 0 \Rightarrow (5x^2) - 9(5x) + 20 = 0 \\ &\Rightarrow (5x - 5)(5x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ y } x_2 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 3x^2 - 4x - 4 = 0 &\Rightarrow 3(3x^2 - 4x - 4) = 0 \Rightarrow (3x^2) - 4(3x) - 12 = 0 \\ &\Rightarrow (3x - 6)(3x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Resolución de problemas

2 La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 313.

- ¿Cuáles son estos números?

**Solución:**

Si  $x$  representa el número menor, la situación se puede modelar mediante la ecuación  $x^2 + (x + 1)^2 = 313$ , la cual es equivalente a:

$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 312 = 0 &\Rightarrow 2(x^2 + x - 312) = 0 \Rightarrow (2x^2) + 2(2x) - 624 = 0 \\ &\Rightarrow (2x + 26)(2x - 24) = 0 \Rightarrow x_1 = -13 \text{ y } x_2 = 12 \end{aligned}$$

De acuerdo con el enunciado del problema, la solución  $x = -13$  no satisface las condiciones planteadas. De modo que la solución válida es  $x = 12$ , y el número siguiente será  $x + 1 = 13$ .

Al comprobar la solución se tiene que  $12^2 + 13^2 = 313$ .

##### Razonamiento matemático

##### Ecuaciones cuadráticas

El número  $-1$  es la solución de la ecuación  $3x^2 + bx + c = 0$ .

- Si los coeficientes  $b$  y  $c$  son números primos, ¿cuál es el valor de  $3c - b$ ?

$$0 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \text{ obteniéndose}$$

$$0 = 3 \left( x + \frac{-2}{2 \cdot 3} \right)^2 - \frac{(-2)^2}{4 \cdot 3} + 0; \text{ resolviendo tenemos}$$

$$3 \left( x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} \text{ despejando } x, \text{ se obtiene}$$

$$x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \quad x = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}. \text{ Esto significa que los}$$

cortes con el eje  $x$  son los puntos  $(0; 0)$  y  $\left(x + \frac{2}{3}\right)$ .

### Recomendaciones para desarrollar la lección

- Es importante que los estudiantes utilicen el método de la completación, más no la fórmula.
- Aplique el modelo en un caso particular el en que  $b=0$ , tanto para ecuaciones factorizables y no factorizables. Resuelva ejemplos para cada caso.
- Aplique el modelo en un caso particular en el que  $c=0$ . Este tipo de ecuaciones siempre son factorizables. Resuelva, usando la completación y factorizando.

### Actividades colaborativas

- Divida en dos grupos
- Proporcione una batería de ejercicios e indique para que unos grupos resuelvan usando la completación y otros factorizando.
- Pida a cada grupo que exponga un ejercicio.
- Discuta las ventajas y desventajas de cada método.

## Ejercitación

3.

$a. x^2 - 36$	$x_1 = 9$
	$x_2 = -9$
$b. x^2 - 24$	$x_1 = 2\sqrt{6}$
	$x_2 = -2\sqrt{6}$
$c. x^2 - 81$	$x_1 = -\sqrt{2}$
	$x_2 = \sqrt{2}$
$d. 2x^2 - 4$	$x_1 = 6$
	$x_2 = -6$
$e. 4x^2 - 4$	$x_1 = \sqrt{3}$
	$x_2 = -\sqrt{3}$

4. a.  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 6$      $x_2 = -1$     b.  $x_1 = 0$  y  $x_2 = -27$

c.  $x_1 = 0$  y  $x = -\frac{5}{3}$     d.  $x_1 = 0$  y  $x_2 = \frac{4}{3}$

e.  $x_1 = 0$  y  $x_2 = -\frac{1}{5}$     f.  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$      $x = -1$

## Razonamiento

5. a.  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 3$     b.  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 4$

La parábola muestra que los cortes con el eje X son las soluciones de las ecuación.

## Ejercitación

6. a.  $x = 1$  o  $x = \frac{4}{3}$     b.  $x = -\frac{3}{2}$  o  $x = \frac{1}{3}$

c.  $x = -\frac{5}{4}$  o  $x = 2$     d.  $x = \frac{1}{5}$  o  $x = \frac{3}{2}$

e.  $x = \frac{4}{7}$  o  $x = 1$

## Razonamiento

7. a. F    b. F    c. V    d. F    e. F

## Modelación

8.  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

## Resolución de problemas

9. El voltaje del circuito es alterno.

- Destrezas con criterios de desempeño:
- Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.
  - Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoreo) en la solución de problemas.

## Desarrolla tus destrezas

### Ejercitación

3. Une cada ecuación con su respectiva solución.

a.  $x^2 - 36 = 0$

$x_1 = 9$  y  $x_2 = -9$

b.  $x^2 - 24 = 0$

$x_1 = 2\sqrt{6}$  y  $x_2 = -2\sqrt{6}$

c.  $x^2 - 81 = 0$

$x_1 = -\sqrt{2}$  y  $x_2 = \sqrt{2}$

d.  $2x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 6$  y  $x_2 = -6$

e.  $4x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 1$  y  $x_2 = -1$

4. Resuelve cada ecuación. Luego, verifica que la solución sea correcta.

a.  $x^2 - 6x = 0$

b.  $x^2 + 27x = 0$

c.  $3x^2 + 5x = 0$

d.  $-3x^2 + 4x = 0$

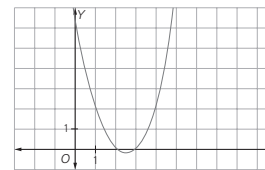
e.  $1,5x^2 - 0,5x = 0$

f.  $4x - 4x^2 = 0$

### Razonamiento

5. Resuelve la ecuación. Luego, explica en cada caso qué relación existe entre las soluciones y la parábola que representa la ecuación de segundo grado.

a.  $x^2 - 5x + 6 = 0$



b.  $-x^2 + 3x + 4 = 0$

Figura 2

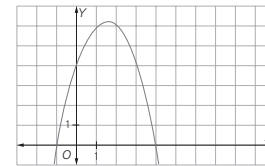


Figura 3

### Ejercitación

6. Resuelve las ecuaciones cuadráticas dadas. Luego, verifica que las respuestas sean correctas.

a.  $6x^2 - 14x + 8 = 0$

b.  $6x^2 + 7x - 3 = 0$

c.  $4x^2 - 3x - 10 = 0$

d.  $-10x^2 + 17x - 3 = 0$

e.  $-7x^2 + 11x - 4 = 0$

### Razonamiento

7. Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

- a. Todas las ecuaciones cuadráticas tienen exactamente dos soluciones.
- b. Las ecuaciones cuadráticas incompletas solo tienen dos términos.
- c. La factorización es una herramienta para resolver ecuaciones cuadráticas.
- d. La ecuación  $x^2 + 9 = 0$  tiene como soluciones a  $x = 3$  y  $x = -3$ .
- e. Las soluciones de la ecuación  $26x^2 + 11x + 10 = 0$  son dos números enteros positivos.

### Modelación

8. Escribe una ecuación cuadrática que se relacione con la gráfica de la Figura 4.

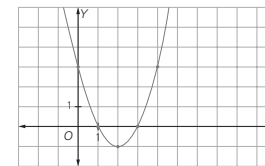


Figura 4

### Resolución de problemas

9. Se sabe que el voltaje de cierto circuito eléctrico puede representarse mediante la ecuación  $x^2 - 2x + 10 = 0$ . Si la ecuación tiene soluciones reales, el voltaje del circuito es directo, pero si las soluciones son números complejos, el voltaje del circuito es alterno. ¿Qué clase de voltaje tiene este circuito?

## 4 Resolución de ecuaciones de segundo grado completando un trinomio cuadrado perfecto

### Explora

La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58.

- ¿Qué números cumplen las condiciones anteriores?

### Ten en cuenta

Es posible que una ecuación de segundo grado no tenga soluciones en el conjunto de los números reales. En este caso, la parábola que describe dicha ecuación no tiene cortes con el eje X. Observa un ejemplo en la Figura 1.

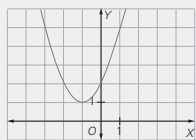


Figura 1

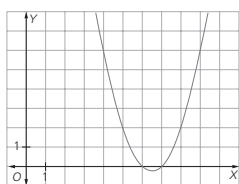


Figura 2

Si se designa a  $x$  como uno de los números, entonces  $10 - x$  representará al otro. De este modo, al establecer las relaciones dadas en el problema, se plantea la ecuación:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

Se observa que la ecuación  $x^2 + (10 - x)^2 = 58$  es equivalente a  $2x^2 - 20x + 42 = 0$ . Para resolver esta última, se puede **completar un trinomio cuadrado perfecto**, como se presenta a continuación.

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

Se dividen los dos lados de la ecuación por 2.

$$x^2 - 10x = -21$$

Se agrupan los términos con  $x$ .

$$x^2 - 10x + 25 = -21 + 25$$

Se busca el tercer término del trinomio cuadrado perfecto y se suma en los dos miembros de la ecuación.

$$(x - 5)^2 = 4$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.

$$\sqrt{(x - 5)^2} = \pm\sqrt{4}$$

Se extrae la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación.

$$x - 5 = 2 \text{ o } x - 5 = -2$$

Se resuelven las ecuaciones lineales obtenidas.

$$x_1 = 7 \text{ o } x_2 = 3$$

Se determinan las soluciones.

De acuerdo con lo anterior, los números cuya suma es 10 y la suma de sus cuadrados es 58 son 7 y 3.

Toda ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , con  $a, b$  y  $c$  números reales, se puede resolver **completando un trinomio cuadrado perfecto**. En general, para hallar el tercer término del trinomio cuadrado perfecto se utiliza la expresión  $\frac{b^2}{4a}$ .

### Actividad resuelta

#### Comunicación

- Resuelve la ecuación de segundo grado  $x^2 - 13x + 42 = 0$ , completando cuadrados. Luego, elabora la gráfica de la parábola que describe el trinomio. Por último, describe la relación entre la ecuación y la parábola que la representa.

#### Solución:

Al observar los coeficientes de la ecuación  $x^2 - 13x + 42 = 0$ , se deduce que  $a = 1$  y  $b = -13$ . Así, el término que completa el trinomio cuadrado perfecto estará dado por  $\frac{b^2}{4a} = \frac{169}{4}$ .

Por lo tanto:

$$x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow x^2 - 13x = -42 \Rightarrow x^2 - 13x + \frac{169}{4} = -42 + \frac{169}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{13}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} + \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 7 \text{ y } x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 6$$

Al graficar la parábola que representa la expresión  $x^2 - 13x + 42$ , se obtiene la curva de la Figura 2. En ella, se puede observar que los valores 7 y 6 son los puntos de corte de la parábola con el eje X.

APLICA © EDICIONES SM

## Ampliación conceptual

Función cuadrática y ecuación de segundo grado.

Para bosquejar cualquier función cuadrática, es necesario estar en capacidad para resolver cualquier ecuación de segundo grado. En este sentido, el completamiento cuadrático de trinomios cuadrados perfectos es una herramienta de gran utilidad, pues al completar el trinomio cuadrado perfecto, fácilmente se puede obtener: el vértice, los ceros con el eje  $x$ , si los tiene, con los ejes, el eje de simetría y el recorrido.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique la deducción completa expuesta en la lección anterior.
- Proponga ejercicios para aplicar el modelo estudiado, para cada uno de los casos,  $0 = ax^2 + bx + c$ ,  $0 = ax^2 + c$  y  $y = ax^2 + bx$ .
- Explique que el único método general para resolver las ecuaciones de segundo grado es la completación del trinomio cuadrado perfecto.
- Una vez completado el trinomio cuadrado perfecto, identifique el vértice de la función.
- Una vez resuelta la ecuación por el método de la completación del trinomio cuadrado perfecto, grafique las raíces y más el corte con el eje  $y$ , puede bosquejar la función.

## Actividades TIC

Con la ayuda de un graficador, por ejemplo, el Geogebra, verifica las raíces de los ejercicios 2 y 3 propuesto en la página 125 del texto del estudiante.

## Ejercitación

2. a.  $x = \frac{2}{3}$                       b.  $x = -1$   
 c.  $x = -\frac{1}{2}$                       d.  $x = \frac{3}{4}$   
 e.  $x = 3$                         f.  $x = \frac{3}{2}$

3.

a.  $x_1 = 3; x_2 = -5$   
 b.  $x_1 = 15; x_2 = -2$   
 c.  $x_1 = \frac{2}{3}$   
 d.  $x_1 = 1; x_2 = -4$   
 e.  $x_1 = -5 + 4\sqrt{2}; x_2 = -5 - 4\sqrt{2}$   
 f.  $x_1 = \frac{1}{9}; x_2 = -1$

## Comunicación

4.

a.  $f(x) = x^2 + 2x + 2; x = 2 + i$  o  $x = 2 - i$   
 b.  $f(x) = x^2 + 5x + 6; x = -3$  o  $x = -2$   
 c.  $f(x) = x^2 - x - 6; x = 3$  o  $x = -2$

## Resolución de problemas

5.

a.  $b = \frac{-3(1-\sqrt{17})}{2}$                        $h = \frac{3(1+\sqrt{17})}{2}$   
 b.  $b = 6$  y  $h = 3$                       c.  $b = 4$  y  $h = 5$

6. 12 dm, 15 dm y 2 dm

7.  $x^2 = 121, x = 11$  cm

Destrezas con criterios de desempeño:

- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por completación de cuadrados) en la solución de problemas.
- Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.

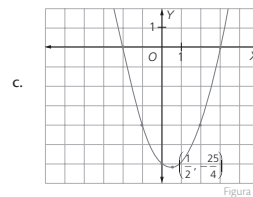
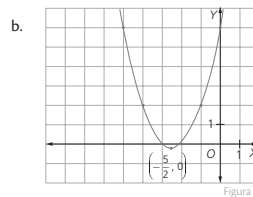
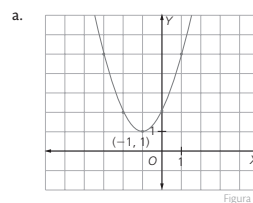
### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

2. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado. Ten en cuenta que todas las expresiones son un trinomio cuadrado perfecto.
- a.  $9x^2 - 12x + 4 = 0$       b.  $x^2 + 2x + 1 = 0$   
 c.  $4x^2 + 4x + 1 = 0$       d.  $16x^2 - 24x + 9 = 0$   
 e.  $x^2 - 6x + 9 = 0$         f.  $4x^2 - 12x + 9 = 0$
3. Resuelve cada ecuación completando un trinomio cuadrado perfecto.
- a.  $x^2 + 2x - 15 = 0$       b.  $x^2 - 13x - 30 = 0$   
 c.  $9x^2 - 12x + 4 = 0$       d.  $4x^2 + 12x - 16 = 0$   
 e.  $x^2 + 10x - 7 = 0$         f.  $9x^2 + 10x + 1 = 0$

#### Comunicación

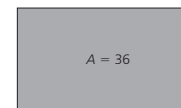
4. Plantea la ecuación cuadrática asociada con cada gráfica. Luego, resuelve dicha ecuación.



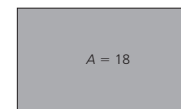
#### Resolución de problemas

5. A continuación se presentan varios rectángulos cuya área está dada. Determina la longitud de la base y la altura de cada uno, teniendo en cuenta las expresiones algebraicas correspondientes.

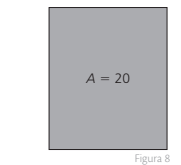
a.  $b = x + 1$   
 $h = x + 4$



b.  $b = x + 1$   
 $h = x - 2$



c.  $b = x + 3$   
 $h = x + 4$



6. Andrea debe elaborar una maceta de base rectangular para su invernadero, de modo que el largo de la base tenga 30 cm más que su ancho y su altura sea de 20 cm. Además, la maceta debe contener 360 dm<sup>3</sup> de tierra. ¿Cuáles deben ser las medidas de la maceta?
7. El marco de un cuadro es cuadrado y su área es de 121 cm<sup>2</sup>. ¿Cuál es la ecuación que debe plantearse para calcular la medida  $x$  del lado del cuadro? ¿Cuáles son las dimensiones del cuadro?

## 5 Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado

### Explora

Una compañía de alimentos diseña una caja sin tapa para empacar sus productos con un volumen igual a  $72 \text{ dm}^3$ . Sus dimensiones están representadas en la Figura 1.

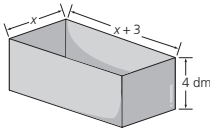


Figura 1

- Plantea una ecuación que te permita encontrar las dimensiones de la caja en decímetros.

Dadas las condiciones del problema, la ecuación que modela la situación es:

$$\begin{array}{c} \text{Expresión algebraica del volumen} \\ \downarrow \\ 4x(x+3) = 72 \end{array}$$

La ecuación anterior es equivalente a  $4x^2 + 12x - 72 = 0$  y se puede resolver aplicando la **fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado**, que se deduce del proceso para completar trinomios cuadrados perfectos, como se observa a continuación.

$$\begin{array}{ll} ax^2 + bx + c = 0 & \text{Se parte de la ecuación de segundo grado.} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 & \text{Se divide toda la expresión entre el coeficiente de } x^2. \\ x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} & \text{Se resta } \frac{c}{a} \text{ en ambos lados de la ecuación.} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} & \text{Se suma } \frac{b^2}{4a^2} \text{ para completar el trinomio cuadrado perfecto.} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} & \text{Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto y se opera.} \\ x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} & \text{Se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.} \\ x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{Se despeja la incógnita.} \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{Se obtiene la fórmula general.} \end{array}$$

Así, en la ecuación  $4x^2 + 12x - 72 = 0$ ,  $a = 4$ ,  $b = 12$  y  $c = -72$ , por lo tanto:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-72)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -6$$

Al considerar las condiciones del problema, se deduce que la respuesta válida es  $x = 3$ , de modo que las dimensiones de la caja son:

ancho: 3 dm      largo: 6 dm      alto: 4 dm

La **fórmula general para resolver ecuaciones de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$** , con  $a, b$  y  $c$  números reales, es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Ejemplo 1

Observa cómo se aplica la fórmula general en la ecuación  $x^2 - 2x - 960 = 0$ . Como  $a = 1$ ,  $b = -2$  y  $c = -960$ , entonces:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-960)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3840}}{2} = \frac{2 \pm 62}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{2 + 62}{2} = 32 \text{ y } x_2 = \frac{2 - 62}{2} = -30 \end{aligned}$$

APLICA © EDICIONES SM

## Recomendaciones para desarrollar la lección

Una vez que sus estudiantes dominen la completación del trinomio cuadrado perfecto, se puede presentarles la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. Advierta que el modelo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

, tiene inmersa mucha información sobre la función cuadrática, por ejemplo, la primera componente del vértice de la parábola  $\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{b^2}{4a^2} + c\right)$ . También puede proporcionar información sobre la existencia o no de los cortes sobre el eje de las  $x$ , llamados también raíces; así como la naturaleza de estas raíces a través del análisis del discriminante  $b^2 - 4ac$ . Si el discriminante es cero, tiene una sola raíz; si el discriminante es mayor que cero, tiene dos raíces reales y si el discriminante es menor que cero, no tiene raíces reales.

La fórmula proporciona dos posibles raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

. Estas dos raíces tienen las siguientes propiedades:

1. De la suma  $x_1 + x_2 =$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

2. Del producto  $x_1 \cdot x_2 =$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Con estas dos propiedades podemos restituir la ecuación cuadrática de la cual provienen sus raíces, ya que el modelo

$$0 = ax^2 + bx + c, \text{ se puede expresar como } 0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

al dividir para  $a$ . por ejemplo, si las raíces  $x_1$  y  $x_2$  son 3 y 2 respectivamente,  $x_1 + x_2 = 5 = \frac{-b}{a}$  y  $x_1 \cdot x_2 = 6 = \frac{c}{a}$ , con lo

cual la ecuación original será  $0 = x^2 - 5x + 6$ .

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Presente la deducción completa de la fórmula a través de la completación del trinomio cuadrado perfecto.
- Enuncie las propiedades expuestas, esto es, del discriminante, del eje de simetría o componente del vértice  $\frac{-b}{2a}$ , de la suma de las raíces y del producto de las raíces.
- Elabore ejemplos de restitución de la ecuación cuadrática conociendo sus raíces.
- Bosqueeje una función cuadrática, utilizando las propiedades conocidas.
- Aplique lo explicado con otros ejercicios, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{3}{5}x - 2$$

## ■ Actividades colaborativas

- Forme grupos de dos o tres estudiantes.
- De a cada grupo las raíces de una ecuación cuadrática.
- Pida que a través de las propiedades (simetría, discriminante, suma y producto de raíces) restituyan la ecuación cuadrática y que realicen un bosquejo de la función de segundo grado respectiva.
- Pueden exponer los trabajos realizados o entregar por escrito.
- También puede pedir a sus estudiantes que resuelvan los ejercicios de ejercitación de la página 129 del texto del alumno.

- Destrezas con criterios de desempeño:**
- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por fórmula) en la solución de problemas.
  - Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.

### 5.1 Discriminante de una ecuación de segundo grado

La expresión  $b^2 - 4ac$  recibe el nombre de **discriminante**. Es el valor que determina el tipo de raíces de la ecuación de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ , con  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales, se consideran los siguientes casos:

- Si  $b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación tiene una única solución real.
- Si  $b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si  $b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación tiene dos soluciones complejas.

#### Ejemplo 2

Observa cómo se determina el tipo de soluciones de las ecuaciones cuadráticas  $x^2 + 6x + 9 = 0$ ,  $3x^2 + 5x + 6 = 0$  y  $2x^2 + 5x - 3 = 0$ , analizando su discriminante.

- El discriminante de la ecuación  $x^2 + 6x + 9 = 0$  es:

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución real.

- El discriminante de la ecuación  $2x^2 + 5x - 3 = 0$  es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$$

De modo que la ecuación tiene dos soluciones reales.

- El discriminante de la ecuación  $3x^2 + 5x + 6 = 0$  es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47 < 0$$

Luego, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

### 5.2 Suma y producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado

Si  $x_1$  y  $x_2$  son soluciones de la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ , se cumplen las siguientes propiedades:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ y } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

#### Ten en cuenta

La ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

es equivalente a la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Esto permite relacionar las raíces de la ecuación de segundo grado con sus coeficientes.

#### Actividad resuelta

Razonamiento

- Determina una ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , tal que la suma de sus soluciones sea  $\frac{1}{6}$ , y el producto sea  $-\frac{1}{3}$ .

#### Solución:

Dividiendo los dos miembros de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  por  $a$ , se obtiene la ecuación equivalente  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ .

Además, se cumple que:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{6}, \text{ entonces } \frac{b}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}, \text{ entonces } -\frac{1}{3} = \frac{c}{a}$$

La ecuación es  $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$ , y se puede escribir como  $6x^2 - x - 2 = 0$ .

### 5 Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes ecuaciones usando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

- a.  $x^2 + 3x - 10 = 0$
- b.  $x^2 - 3x - 4 = 0$
- c.  $-x^2 - 4x - 2 = 0$
- d.  $-2x^2 - x = -6$
- e.  $(x + 2)^2 + 1 = 0$
- f.  $(x - 3)^2 - 4 = 0$
- g.  $-0,5x^2 + 2x + 1,5 = 0$
- h.  $1,5x^2 + 2x = 0$

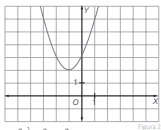
Razonamiento

3 Responde las preguntas a partir de la resolución de la ecuación  $x^2 + 2x + 4 = 0$ , mediante la fórmula general.

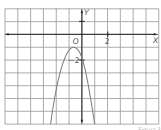
- a. ¿Se pueden determinar las soluciones de la ecuación?
- b. ¿Son las soluciones números reales?
- c. Si el signo del término independiente cambia, ¿son las soluciones números reales?
- d. ¿Cuál podría ser un criterio para cuando las soluciones pueden ser o no números reales?

4 Observa las siguientes parábolas y sus respectivas ecuaciones. Luego, utiliza la fórmula general para resolver cada ecuación. ¿De qué tipo son sus soluciones? ¿Qué tienen en común las parábolas que las representan?

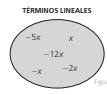
a.  $y = x^2 + 2x + 3$



b.  $y = -2x^2 - 3x - 2$



5 Forma ecuaciones cuadráticas con los siguientes términos. Luego, examina los discriminantes de dichas ecuaciones y escribe de qué tipo serían sus soluciones.



• Intercambia las ecuaciones que formaste con las de uno de tus compañeros; cada uno deberá resolver en el cuaderno las que intercambié utilizando la fórmula general.

6 Determina el tipo de raíces que tiene cada ecuación estudiando su discriminante. Luego, resuélvela aplicando la fórmula general.

- a.  $8x^2 - 5x + 1 = 0$
- b.  $6x^2 + x + 2 = 0$
- c.  $x(2x - 3) = 20$
- d.  $x - 2x^2 = 8$
- e.  $2x^2 + x - 2 = 0$
- f.  $-3x^2 - x + 1 = 0$
- g.  $x^2 - 3 - \frac{2}{3}x = 0$

### Ejercitación

2.

- a.  $x = -5$  o  $x = 2$
- b.  $x = -1$  o  $x = 4$
- c.  $x = -2 - \sqrt{6}$  o  $x = -2 + \sqrt{6}$
- d.  $x = -2$  o  $x = \frac{3}{2}$
- e.  $x = -2 - i$  o  $x = -2 + i$
- f.  $x = 1$  o  $x = 5$
- g.  $x = -0,64$  o  $x = 4,64$
- h.  $x = -\frac{4}{3}$  o  $x = 0$

### Razonamiento

3.

- a. Sí
- b. No
- c. Sí
- d. Respuesta abierta

4.

- a. Ecuación de la forma  $x^2 + bx + c$
- b. Ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c$

5.

Respuesta abierta. A continuación se da una posible solución.  
 $2x^2 - 5x + 1; b^2 - 4ac > 0$  luego tiene dos soluciones reales.

6.

a.  $x = \frac{5 - \sqrt{7}i}{16}$  o  $x = \frac{5 + \sqrt{7}i}{16}$ , soluciones complejas

b.  $x = \frac{-1 - \sqrt{47}i}{12}$  o  $x = \frac{-1 + \sqrt{47}i}{12}$ , soluciones complejas

c.  $x = -5$  o  $x = 8$ , soluciones reales

d.  $x = \frac{-1 - 3\sqrt{7}i}{4}$  o  $x = \frac{-1 + 3\sqrt{7}i}{4}$ , soluciones complejas

e.  $x = \frac{1 - \sqrt{17}}{9}$  o  $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ , soluciones reales

f.  $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$  o  $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$ , soluciones reales

g.  $x = \frac{1 - 2\sqrt{7}}{3}$  o  $x = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{3}$ , soluciones reales

### Ejercitación

7.

- a.  $x = -3$  o  $x = 7$
- b.  $x = -5$  o  $x = 0$
- c.  $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$  o  $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$

8.

- a.  $f(x) = x^2 + 6x - 8$
- b.  $f(x) = x^2 + 10x + 9$
- c.  $f(x) = x^2 + 5x$
- d.  $f(x) = x^2 - 8x + 20$
- e.  $f(x) = x^2 - 2x + 2$

### Modelación

9.

- a.  $x^2 - 1,2x - 0,27 = 0$
- b.  $x^2 - x - 2 = 0$

**Destrezas con criterios de desempeño:**

- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por fórmula) en la solución de problemas.
- Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.

10. a.

Soluciones	$x = -1$ o $x = 5$
Función cuadrática asociada a la ecuación	$f(x) = -x^2 + 4x + 5$
Vértice de la parábola que representa	$(-2, 9)$

b.

Soluciones	$x = -3$ o $x = 4$
Función cuadrática asociada a la ecuación	$f(x) = -3x^2 + 9x$
Vértice de la parábola que representa	$\left(-\frac{9}{2}, \frac{81}{4}\right)$

c.

Soluciones	$x = 3 - \sqrt{5}$ o $x = 3 + \sqrt{5}$
Función cuadrática asociada a la ecuación	$f(x) = 2x^2 - 12x + 8$
Vértice de la parábola que representa	$(3, 210)$

d.

Soluciones	$x = 2 - 3i$ o $x = 2 + 3i$
Función cuadrática asociada a la ecuación	$f(x) = x^2 + 4x + 13$
Vértice de la parábola que representa	$(2, 29)$

### Resolución de problemas

11.

- $f(x) = x^2 + 2x + 2$ , soluciones complejas
- $g(x) = x^2 - 2x$ , soluciones reales
- $h(x) = -x^2 - 2x - 2$ , soluciones complejas

### Ejercitación

- Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la ecuación cuadrática.
  - $(x + 1)(x - 5) = 16$
  - $(x + 1)(x + 4) = 4$
  - $(x - 2)(x - 3) = 4$
- Escribe la ecuación cuadrática para la cual las soluciones son las mostradas en cada literal.
  - $x_1 = 2$                        $x_2 = 4$
  - $x_1 = -1$                       $x_2 = -9$
  - $x_1 = 0$                          $x_2 = -5$
  - $x_1 = 4 + 2i$                   $x_2 = 4 - 2i$
  - $x_1 = 1 + i$                      $x_2 = 1 - i$

### Modelación

- Observa los cortes de cada parábola con el eje X. Luego, escribe la ecuación cuadrática que se relaciona con ella.

a.

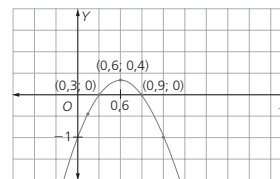


Figura 7

b.

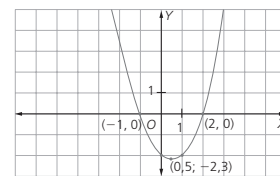


Figura 8

c.

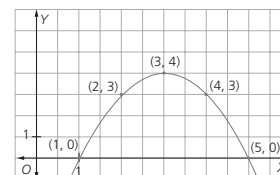


Figura 9

- Completa la tabla para cada ecuación.

- $-x^2 + 4x + 5 = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 1

- $-3x^2 + 9x = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 2

- $2x^2 - 12x + 8 = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 3

- $x^2 - 4x + 13 = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 4

### Resolución de problemas

- Examina la Figura 10 y determina las ecuaciones cuadráticas asociadas a cada parábola. ¿De qué tipo son las soluciones de cada ecuación?

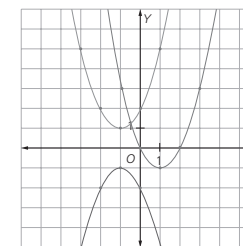


Figura 10

## 6 Aplicaciones de la ecuación de segundo grado

### Explora

El triángulo ABC de la Figura 1 tiene un ángulo recto en B.

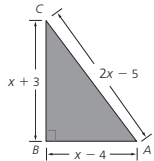


Figura 1

• ¿Cuál es su área? ¿Cuál su perímetro?

### Ten en cuenta

La ecuación de segundo grado tiene aplicaciones en estas áreas:

- Geometría, con la aplicación del concepto de área.
- Economía, con la modelación de situaciones de producción, ganancias y pérdidas, entre otras.
- Física, con la modelación de la caída libre o del movimiento parabólico de proyectiles.
- Aritmética, con la búsqueda de cantidades que verifican diferentes condiciones.

Para hallar el área y el perímetro del triángulo ABC se debe determinar el valor de  $x$ . En este caso, como el triángulo es rectángulo, se puede hacer uso del teorema de Pitágoras con el fin de establecer una relación entre sus lados, con lo cual se obtiene la siguiente ecuación.

$$\begin{array}{c} \text{Suma de los cuadrados de los catetos} \\ \downarrow \\ (x+3)^2 + (x-4)^2 = (2x-5)^2 \\ \uparrow \\ \text{Cuadrado de la hipotenusa} \end{array}$$

Al simplificar la ecuación anterior, se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver mediante alguno de los métodos estudiados anteriormente.

$$(x+3)^2 + (x-4)^2 = (2x-5)^2 \Rightarrow -2x^2 + 18x = 0 \\ \Rightarrow -2x(x-9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 9$$

De acuerdo con las condiciones del problema, se deduce que la respuesta válida es  $x = 9$ , por lo tanto, se obtiene que las medidas de los lados del triángulo son:

$$x+3 = 12 \quad x-4 = 5 \quad 2x-5 = 13$$

El área del triángulo es  $A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$  unidades cuadradas y el perímetro es  $12 + 5 + 13 = 30$  unidades.

Las ecuaciones de segundo grado permiten resolver de manera adecuada y precisa muchos problemas que se plantean en la vida real o que están relacionados con otras áreas del conocimiento.

### Actividad resuelta

#### Modelación

1 El área de la cancha de la Figura 2 es 195 m<sup>2</sup>.

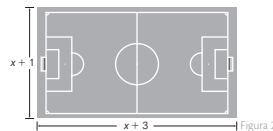


Figura 2

¿Cuáles son las dimensiones de la cancha?

#### Solución:

La expresión algebraica correspondiente del área de la cancha es:

$$(x+1)(x+3) = 195, \text{ que es equivalente a } x^2 + 4x - 192 = 0.$$

Si se quiere resolver la ecuación, se puede usar la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática. De este modo:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-192)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 28}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = 12 \text{ o } x_2 = -16$$

Se observa que solo  $x = 12$  satisface las condiciones del problema y con este valor se obtiene que las dimensiones de la cancha son 13 m y 15 m.

APLICA A EDUCACIONES SM

## Recomendaciones para desarrollar la lección

Solución del problema propuesto en la planificación.

Pida que calculen la ecuación de la recta que pasa por los puntos C y B  $\frac{2x-120}{-3}$ . Explique que la altura ( $y$ )

del rectángulo es la función encontrada, es decir que la altura depende de la base. Haga notar que si el ancho ( $x$ ) del rectángulo aumenta, la altura ( $y$ ) por qué disminuye y viceversa. Como lo que se desea es el rectángulo de área máxima, y se sabe que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura ( $A = xy$ ). Reemplazando la altura y obtenida en los puntos CB, en el área del rectángulo, así:

$$A = (x) \frac{2x-120}{-3} = 60 - \frac{2}{3}x^2.$$

Como se puede apreciar, se acaba de formar un modelo cuadrático. En virtud de ser un modelo cuadrático, en las coordenadas del vértice se encuentra la solución de problema, el valor determinado por  $x = -\frac{b}{2a}$  determina la base del rectángulo y la recta

$$\frac{2x-120}{-3} = y \text{ la altura. En razón de esto } x = 30 \text{ y } y = 20.$$

Para visualizar lo expuesto, pida que llenen la siguiente tabla.

x	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
y=f(x)	40	36	32								
Área=xy	0	216	384								

Una vez llena la tabla, pida que en un plano cartesiano, se representen los valores de  $x$  y del área. Es decir, estos:

x	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
A = f(x)	0	216	384	504	576	600	576	504	384	216	0

Puede explicar que el dominio de la base del rectángulo es de 0 a 60, dado por la función  $A = 60 - \frac{2}{3}x^2$ , mientras que el dominio de la altura es de 0 a 40 dado

$$\text{por } \frac{2x-120}{-3} = y.$$

**Destreza con criterios de desempeño:** Resolver y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

## Desarrolla tus destrezas

### Modelación

- 2 Plantea una ecuación cuadrática para cada situación y, luego, resuélvela.
- La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si uno de sus lados mide 2 cm menos que el otro.
  - Encuentra dos números positivos que se diferencien en 7 unidades y para los cuales el producto sea 44.
  - Encuentra dos números cuya suma sea 10 y su producto sea 24.
  - El largo de un campo de fútbol mide 30 m más que su ancho y su área es de 7 000 m<sup>2</sup>. ¿Cuáles son sus dimensiones?
  - Halla el área de un triángulo isósceles, cuya altura mide 12 m y su lado mide tres metros más que su base.
  - La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Calcula sus dimensiones si el lado de menor medida es  $\frac{3}{4}$  del lado de mayor medida.
  - ¿Cómo se puede repartir el número 20 de tal manera que la suma de sus cuadrados sea 202?
  - El área de un triángulo rectángulo mide 24 m<sup>2</sup>. Si la longitud de un cateto es igual a  $\frac{3}{4}$  la longitud del otro, ¿cuánto miden los lados del triángulo?

### Resolución de problemas

- 3 Para fabricar una caja en forma de prisma rectangular, como la de la Figura 3, se utiliza una pieza cuadrada de cartón cuyo lado mide  $x$  dm.

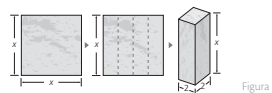


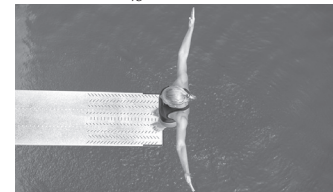
Figura 3

La pieza de cartón se dobla de manera que se forman cuatro rectángulos, cada uno de los cuales tiene un área de  $2x$  dm<sup>2</sup>.

- ¿Cuál es la ecuación que expresa la relación entre el área total de la pieza de cartón y la suma de las áreas de las caras laterales del prisma?
- Según la ecuación anterior, ¿cuál es el valor de la longitud  $x$ ?
- ¿Cuáles son las dimensiones de los rectángulos que forman la caja?

- 4 Una compañía que inicia sus operaciones, proyecta que sus utilidades anuales,  $p(x)$ , en miles de dólares, se pueden calcular mediante la función  $p(x) = 4x + 1,2x^2 - 8$ , donde  $x$  es el número de años en operación.
- ¿Cuál será la utilidad o pérdida de la compañía después del primer año?
  - ¿Qué tiempo será necesario para que la compañía alcance su punto de equilibrio?
- 5 Se ha determinado que para calcular el promedio de la expectativa de vida de una persona de  $t$  años de edad, donde  $30 \leq t \leq 100$ , puede emplearse la función  $q(t) = 0,0054t^2 + 1,46t + 95,11$ . Si una persona tiene una expectativa de vida de 143 años, ¿cuál será la edad que tiene actualmente?
- 6 En un laboratorio, los científicos han detectado que la población de bacterias disminuye con la administración de cierto antibiótico, pero, luego de un tiempo, estas se vuelven inmunes y crecen nuevamente. Ellos encontraron que la función que modela la población de bacterias es  $P(x) = \frac{3}{64}x^2 - \frac{3}{4}x + 4$ , donde  $P$  es la población de bacterias (en miles de individuos) y  $x$  los miligramos de antibiótico suministrado diariamente.
- ¿Cuál es la población que existe antes de que la bacteria se vuelva inmune?

- 7 Una persona se ubica en la parte más alta de una plataforma de salto. Al lanzarse desde 20 m de altura, la trayectoria que sigue la persona está descrita por la función  $f(x) = -\frac{11}{18}(x - 6)^2 + 22$ .



¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la persona?

- 8 Plantea y resuelve un problema que se relacione con la ecuación  $x^2 + 3x - 10 = 0$ , utiliza GeoGebra para graficarla y verifica tu respuesta.

### Modelación

2.

a.  $x^2 + (x - 2)^2 = 100$ ; Ancho: 6 cm y largo: 8 cm

b.  $x^2 - 7x = 100$ ;  $x_1 = 11$  y  $x_2 = 4$

c.  $10x - x^2 = 24$ ;  $x_1 = 6$  y  $x_2 = 4$

d.  $x^2 + 30x = 7\,000$ ; Ancho: 70 m y largo: 100 m

e. 92,63 m<sup>2</sup>

f.  $x^2 + \frac{3}{4}x^2 = 100$ ; Ancho: 6 cm y largo: 8 cm

g.  $x^2 - 20x = -99$ ;  $x_1 = 11$  y  $x_2 = 9$

h.  $\frac{3}{8}x^2 = 24$ ;  $x_1 = 6$  y  $x_2 = 8$

### Resolución de problemas

3.

a.  $x^2 - 8x = 0$

b. 8 dm

c. 2 dm de ancho y 8 dm de largo

### Resolución de problemas

4. a. Tendrá una pérdida de 2 800 dólares en el primer año.

b. Llega al punto de equilibrio aproximadamente a los 1,4 años.

5. 30 años de edad.

6. 1 000 bacterias.

7. 4,2 m.

8. Respuesta abierta

# 2

## Evaluación formativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Resuelve por el método de factorización las siguientes ecuaciones  
 $0 = x^2 - 17x + 60$ ;  $0 = x^2 - 0,4x$ .

2. Resuelve la ecuación completando el trinomio cuadrado perfecto  
 $0 = 2x^2 - 2x - 1$

3. Resuelve la siguiente ecuación usando la fórmula general  $0 = -3x^2 + x + 3$

4. Escribe la ecuación cuadrática cuyas raíces son:  $x_1 = \frac{2}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{1}{2}$

5. Bosqueja la función  $y = 2x^2 - 2x - 1$  e indica los cortes, vértice, dominio y recorrido.

6. El largo de un rectángulo es 2 m más que el ancho y su área es  $48 \text{ m}^2$ . Si el ancho disminuye en 2 m y el largo aumenta en 2 m, el área disminuye en  $8 \text{ m}^2$ , ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

1. Resuelve por el método de factorización las siguientes ecuaciones  
 $0 = x^2 - 17x + 60$ ;  $0 = x^2 - 0,4x$ .

a.  $0 = x^2 - 17x + 60 = (x - 12)(x - 5)$ ;  $x_1 = 12$ ;  $x_2 = 5$

b.  $0 = x^2 - 0,4x = x(x - 0,4)$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0,4$

2. Resuelve la ecuación completando el trinomio cuadrado perfecto  
 $0 = 2x^2 - 2x - 1$

$$0 = 2\left(x - \frac{2}{2}\right)^2 - \frac{(-2)^2}{4 \cdot 2} - 1; 0 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}; \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2; x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

3. Resuelve la siguiente ecuación usando la fórmula general  $0 = -3x^2 + x + 3$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-3) \cdot 3}}{2(-3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{-6}$$

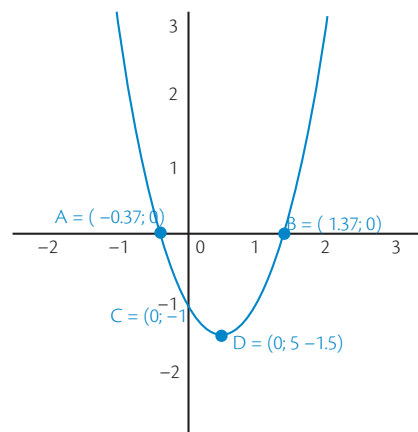
4. Escribe la ecuación cuadrática cuyas raíces son:  $x_1 = \frac{2}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{1}{2}$

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}; x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}; 0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a};$$

$$0 = x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}; 0 = 6x^2 - x - 2$$

5. Bosqueja la función  $y = 2x^2 - 2x - 1$  e indica los cortes, vértice, dominio y recorrido.

Cortes: A, B y C; vértice D; Dominio  $x \in \mathbb{R}$ ; recorrido  $y \geq -1,5$



6. El largo de un rectángulo es 2 m más que el ancho y su área es 48 m<sup>2</sup>. Si el ancho disminuye en 2 m y el largo aumenta en 2 m, el área disminuye en 8 m<sup>2</sup>, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Largo 6 m; ancho 8 m

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

7

**Función potencia**

**Explora**

En la figura 1 se observa la gráfica de la función  $f(x) = x^3$

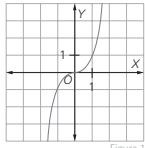


Figura 1

Estudia el comportamiento de la función e indica si es par o impar.

En la gráfica de la función  $f(x) = -x^3$ , se observa que:

- Su dominio es el conjunto de todos los números reales.
- Su recorrido es el conjunto de todos los números reales.
- Es creciente para todo valor de  $x$ .
- Es simétrica con respecto al origen, por lo tanto es una función impar.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Una función polinómica con un solo término, es una función potencia, también se la llama función monomial.

Las funciones de la forma  $f(x) = k \cdot x^a$ , donde  $k$  y  $a$  son constantes diferentes de cero, se denominan funciones potencia. La constante  $a$  es la potencia (exponente) y  $k$  es la constante de proporcionalidad.

Las funciones básicas  $f(x) = x$ ;  $f(x) = x^2$ ;  $f(x) = x^3$ , son funciones potencia comunes, en general, toda función polinómica es una función potencia o es la suma de funciones potencia.

Si  $y = f(x)$  varía como una potencia constante de  $x$ , entonces  $y$  es una función potencia de  $x$ . En geometría, la mayoría de las funciones más comunes (fórmulas), son funciones potencia.

Nombre	Fórmula	Potencia (a)	Constante de probabilidad (k)
Área del cuadrado	$A = l^2$	2	1
Área del círculo	$A = \pi r^2$	2	$\pi$
Longitud de la circunferencia	$C = 2\pi r$	1	$2\pi$
Volumen del cubo	$V = l^3$	3	1

Tabla 1

**Ten en cuenta**

Ten en cuenta  $f(x) = x^n$ , es una función par si  $n$  es par y es una función impar si  $n$  es impar.

**Ampliación conceptual**

La función potencia se define por la expresión  $f(x) = kx^a$ , con  $k$  y  $a$  diferentes de cero. En el siguiente cuadro se resume como el valor de  $k$  y  $a$  influyen en la función.

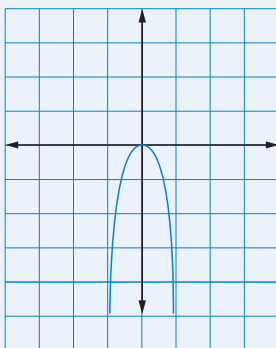
		a			
		Positivo		Negativo	
		Par	Impar	Par	Impar
k	k > 0	Simétrica con respecto a y, se abre hacia arriba	Simétrica con respecto al origen	Tiene asíntotas en x e y, se abre hacia arriba	Tiene asíntotas en x e y, es decreciente
	k < 0	Simétrica con respecto a y, se abre hacia abajo	Simétrica con respecto al origen	Tiene asíntotas en x e y, se abre hacia abajo	Tiene asíntotas en x e y, es decreciente

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Para explicar la tabla expuesta, genere varios ejemplos para cada caso. Para esto puede apoyarse con la ayuda de un graficador, Geogebra por ejemplo.
- Proporcione una batería de funciones potencia para que sus estudiantes pongan en práctica la tabla que usted ha explicado.

2.

a. Dominio:  $\mathbb{R}$ , recorrido:  $[0, +\infty)$ ; Monotonía: Crece en  $[-\infty, 0)$ ; Decrece en  $[0, +\infty)$



3.

a. Todos los reales

4.

a. Respuesta abierta

5.

a. Es creciente y  $y = \frac{x}{2}$

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones potencia con  $n=1, 2, 3$ , representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía.

**Ejemplo 1**

Las gráficas de las funciones  $f(x) = 2x^3$  y  $g(x) = -2x^3$  de las figuras 3 y 4, se obtuvieron a partir de los valores registrados en la siguiente tabla.

El dominio de estas funciones corresponde a todos los números reales. La función  $f(x)$  es creciente en todo su dominio, mientras que la función  $g(x)$  es decreciente en todo su dominio. El recorrido de las dos funciones corresponde a todos los números reales.

x	f(x)	g(x)
-2	-16	16
-1	-2	2
0	0	0
1	2	-2
2	16	-16

Tabla 2

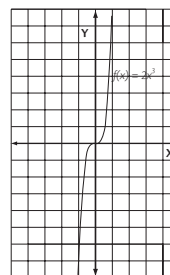


Figura 3

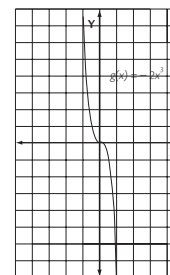


Figura 4

**Actividad resuelta**

Modelación

1 Representa la función  $f(x) = 3x^2$ , determina su dominio, su recorrido y su monotonía.

• Solución:

La gráfica de  $f(x)$ , se observa en la figura 5.

- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Recorrido:  $\mathbb{R}^+$
- Monotonía:

- Es decreciente en el intervalo  $(-\infty, 0]$ .
- Es creciente en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

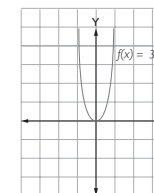


Figura 5

**Desarrolla tus destrezas**

Ejercitación

2 Representa la función  $f(x) = -3x^2$ , determina su dominio, recorrido y monotonía.

Razonamiento

3 ¿En qué intervalo es creciente la función potencia  $f(x) = x$ ?

4 Inventa una función potencia, grafícala y describe sus características.

Modelación

5 Con los valores de la tabla 3, dibuja la gráfica de la función potencia y determina si es creciente o decreciente.

x	f(x)
-2	-1
-1	-0,5
0	0
1	0,5
2	1

Tabla 3

# Ejercicios resueltos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones completando el trinomio cuadrado perfecto:

A.  $x^2 + 2x - 15 = 0$

El término que completa el trinomio al cuadrado es  $(b/2)^2$ , es decir,  $(2/2)^2 = 1$ . Para que no altere la expresión, se suma y se resta el término que completa el trinomio, con lo cual, la expresión queda así  $x^2 + 2x + 1 - 1 - 15 = 0$ . Como puedes ver, los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado, por tal motivo, se lo puede expresar  $(x + 1)^2 - 1 - 15 = 0$ ; reduciendo términos queda  $(x + 1)^2 - 16 = 0$ ; despejando el paréntesis, se obtiene  $(x + 1)^2 = 16$ ; extraemos la raíz a los dos miembros de la expresión  $x + 1 = \pm 4$ ; despejando la incógnita  $x = \pm 4 - 1$ . El valor de la incógnita tiene dos posibilidades  $x = 4 - 1$  o  $x = -4 - 1$ , es decir,  $x = 3$  o  $x = -5$ .

B.  $3x^2 - 12x + x = 0$

Antes de completar el trinomio, es importante dividir para el valor de a, es decir por 3, con lo cual la expresión se transforma en  $x^2 - 4x + 4/3 = 0$ . A esta última expresión, le completamos el trinomio con el término  $(b/2)^2$ , es decir,  $(-4/2)^2 = 4$ . Para que no altere la expresión, se suma y se resta el término que completa el trinomio, con lo cual, la expresión queda así  $x^2 - 4x + 4 - 4 + 4/3 = 0$ . Como puedes ver, los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado, por tal motivo, se lo puede expresar  $(x - 2)^2 - 4 + 4/3 = 0$ ; reduciendo términos queda  $(x - 2)^2 - 8/3 = 0$ ; despejando el paréntesis, se obtiene  $(x - 2)^2 = 8/3$ ; extraemos la raíz a los dos miembros de la expresión  $x - 2 = \pm \sqrt{8/3}$ ; despejando la incógnita  $x = 2 \pm \sqrt{8/3}$ . El valor de la incógnita tiene dos posibilidades  $x = 2 + \sqrt{8/3}$  o  $x = 2 - \sqrt{8/3}$ , es decir,  $x \approx 3.6$  o  $x \approx 0.4$ .

Solución paso a paso

2.

**Bosquejo de la función cuadrática**

**Bosquejar las siguientes funciones**

A.  $y = x^2 + 2x - 15$

Debemos considerar como elementos de vital importancia para realizar un bosquejo al vértice, cortes con los ejes, eje de simetría y concavidad.

**Vértice.** El vértice puede encontrarse de dos formas, la primera consiste en aplicar la fórmula  $\left( \frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$  y la segunda consiste en completar el trinomio cuadrado perfecto para obtener el modelo  $y = a(x + h)^2 + h$ , donde el vértice está dado por la expresión  $(-h;$

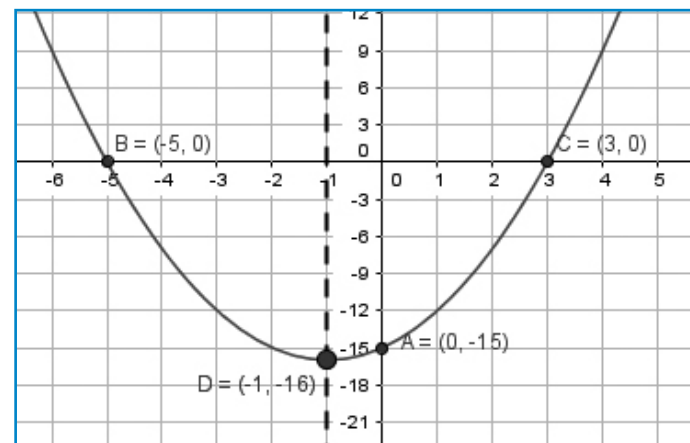
k). Aplicando el primer método tenemos  $\frac{-2}{2(1)}; f\left(\frac{-2}{2(1)}\right)$  con lo cual se obtiene  $(-1; (-1)^2 + 2(-1) - 15)$ , es decir,  $(-1; -16)$ . Por el segundo método, al completar el trinomio cuadrado perfecto se obtiene  $y = (x+1)^2 - 16$ , con lo que el vértice es  $(-1; -16)$ .

**Cortes.** Puede haber dos tipos de cortes, uno con el eje de las x y otro con el eje de las y. Para encontrar el corte con el eje de las y, es necesario asignar cero a x, con lo cual se obtiene  $y = 0^2 + 2x - 15$ , es decir  $y = -15$ ; este valor es el mismo de c, entonces el punto de corte es  $(0; -15)$ . De igual manera, para obtener el corte con x, se asigna cero a y, obteniéndose la expresión  $0 = x^2 + 2x - 15$ . Esta ecuación se puede resolver por cualquiera de los métodos estudiado, al resolver la ecuación se obtiene que  $x = 3$  o  $x = -5$ , con lo cual los puntos de corte con x son  $(3; 0)$  y  $(-5; 0)$ .

**Eje de simetría.** El eje de simetría viene dado por el valor de la primera componente correspondiente al vértice, en este caso,  $x = -1$ . Esta expresión representa una recta vertical en el valor de  $x = -1$  y divide exactamente en dos partes iguales a la parábola.

**Concavidad.** La concavidad está determinada por el valor de a, esto es  $a = 1$ . Como  $a > 0$ , la parábola es cóncava, es decir, se abre hacia arriba.

Una vez obtenidos los elementos más representativos de la función, representamos los puntos obtenidos y trazamos la curva, así:



UNIDAD  
**4****Evaluación sumativa**

Nombre:.....

Grado:..... Fecha:.....

1. Encuentra el dominio, el recorrido y la monotonía de  $y = 2x^2 + 3x + 6$

2. Resolver factorizando la ecuación  $0 = x^2 - 3x - 108$

3. Resolver completando el trinomio cuadrado perfecto  $0 = 2x^2 - 5x - 12$

4. Resolver aplicando la fórmula general de la ecuación de segundo grado  
 $0 = -x^2 - 3x + 8$

5. Señala cuál de las siguientes expresiones es verdadera.

- A. La función  $f(x) = x^{-3}$  es una función par
- B. La función  $f(x) = x^{1/3}$  es decreciente
- C. La función  $f(x) = x^4$  es una función simétrica con respecto al origen.
- D. La función  $f(x) = x^{-4}$  es una función simétrica con respecto al eje y.

6. Realiza un bosquejo de la función  $y = -2x^2 + 3x + 6$ .

UNIDAD

5 Evaluación diagnóstica

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Dada la función cuadrática  $f(x) = 2x^2 - 6$ , indique cuál de las alternativas corresponde a la función cuadrática.
- A. es cóncava hacia abajo,  $V(2, 4)$ ,  $x = 2$   
 B. es cóncava hacia arriba,  $V(0, 6)$ ,  $x = 1$   
 C. es cóncava hacia abajo,  $V(0, 2)$ ,  $x = 0$   
 D. Es cóncava hacia arriba,  $V(0, -6)$ ,  $x = 0$
2. Dada la función cuadrática  $f(x) = -2x^2 - x + 6$ , indique cuál de las alternativas corresponde a la función cuadrática.
- A. es cóncava hacia abajo,  $V(0,2, 6.13)$ ,  $x = 0.2$   
 B. es cóncava hacia arriba,  $V(0, 6)$ ,  $x = -2$   
 C. es cóncava hacia abajo,  $V(-0.25, 6.13)$ ,  $x = -0.25$   
 D. es cóncava hacia arriba,  $V(0, -6)$ ,  $x = -0,5$
3. El dominio de la función cuadrática es el conjunto de los números
- A. naturales                      B. enteros  
 C. racionales                      D. reales

4. Obtenga la función cuadrática que pasa por los puntos:  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(-2, 9)$
- A.  $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$   
 B.  $f(x) = x^2 - x - 1$   
 C.  $f(x) = x^2 - 2x + 1$   
 D.  $f(x) = x^2 + 2x + 1$
5. Obtenga el rango de la función  $f(x) = x^2 - 5x - 6$
- A.  $y \in \left\{ \frac{47}{4} + \infty \right\}$       B.  $y \in \left\{ -\frac{49}{4} + \infty \right\}$   
 C.  $y \in \left\{ \frac{49}{4} - \infty \right\}$       D.  $y \in \left\{ -\frac{49}{4} - \infty \right\}$
6. Dada la regla de correspondencia de  $f$ , siendo  $c > 0$ , se pueden generar nuevas funciones. Empareje las funciones con sus definiciones de desplazamiento.
- |   | Función        |   | Definición de desplazamiento: indica que                |
|---|----------------|---|---|
| A | $y = f(x) + c$ | 1 | La gráfica se ha desplazado $c$ unidades a la izquierda |
| B | $y = f(x - c)$ | 2 | La gráfica se ha desplazado $c$ unidades a la derecha   |
| C | $y = f(x) - c$ | 3 | La gráfica se ha desplazado $c$ unidades arriba         |
| D | $y = f(x + c)$ | 4 | La gráfica se ha desplazado $c$ unidades a abajo        |
- A. A1, B2, C3, D4                      B. A3, B2, C4, D1

- C. A4, B1, C2, D3                      D. A2, B4, C1, D3
7. Dada la regla de correspondencia de  $f$ , siendo  $c > 0$ , se pueden generar nuevas funciones. Empareje las funciones con sus definiciones de compresión o alargamiento.
- |   | Función                       |   | Definición de compresión o alargamiento       |
|---|-------------------------------|---|---|
| A | $y = c f(x)$ con, $0 < c < 1$ | 1 | La gráfica muestra un alargamiento vertical   |
| B | $y = c f(x)$ con, $c > 1$     | 2 | La gráfica muestra una compresión horizontal  |
| C | $y = f(c x)$ con, $c > 1$     | 3 | La gráfica muestra una compresión vertical    |
| D | $y = f(c x)$ con, $0 < c < 1$ | 4 | La gráfica muestra un alargamiento horizontal |
- A. A1, B2, C3, D4                      B. A2, B3, C1, D4  
 C. A3, B4, C4, D1                      D. A3, B1, C2, D4
8. Considere un alambre de longitud 40 cm, con el que se desea construir un rectángulo cuya área se necesita representar matemáticamente, para representar la función cuadrática, su gráfica y sus máximas dimensiones. Determine el modelo matemático del área.
- A.  $A(x) = x(20 - x)$       B.  $A(x) = x(40 - x)$   
 C.  $A(x) = x(20 + x)$       D.  $A(x) = x(40 + x)$

# Propósito de la unidad

## Geometría y medida

La finalidad de esta unidad es, que el estudiante identifique las unidades de medida de los ángulos así como la relación que existe entre los ángulos y los lados de los triángulos. Seguidamente debe reconocer las razones trigonométricas como son seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante los mismos que servirán para el estudio del círculo trigonométrico y de las identidades Pitagóricas, con esta información podrá solucionar problemas relacionados con triángulos.

Por último podrá calcular áreas de figuras planas trazando y empleando correctamente unidades de medida de ángulos como de longitud. Finalmente calculará el volumen de cuerpos valiéndose de la elaboración de objetos que representen cuerpos geométricos así como del correcto uso de unidades de medida.

## Evaluaciones

La evaluación juega un papel muy importante en todo proceso educativo, tanto para el estudiante como para el docente.

La evaluación le permite al estudiante verificar sus avances para tomar decisiones en el futuro. La evaluación también le permite al estudiante conocer sus estilos de aprendizaje para luego poder escoger la carrera o profesión que más se adecúe a sus intereses y capacidades.

Una evaluación bien estructurada le permite al

docente evaluar su estilo de enseñanza y medir los logros y aprovechamiento de sus estudiantes. Según (Standaert, 2014) hay dos tipos de evaluación, una de carácter formativo y la otra sumativa.

### Diagnóstica

Esta evaluación busca demostrar si los estudiantes están en condiciones de comenzar a estudiar un determinado tema o unidad, la situación personal del estudiante en una determinada etapa del curso, ya sea familiar, física o incluso emocional. Y lo más importante, muestra en qué nivel los estudiantes lograron los objetivos y logros propuestos. La evaluación diagnóstica es una evaluación de carácter formativo.

### Formativa

Esta evaluación tiene como objetivo mostrar al docente y al estudiante qué progresos tuvo este último. También, señalar qué fracasos hubo durante los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje y, por último, analizar las conductas del alumno a lo largo del proceso de aprendizaje además ver hasta qué punto fueron alcanzados los objetivos y logros, esta se presenta a la mitad de la unidad.

### Sumativa

En esta evaluación se valoran los comportamientos finales de los estudiantes apuntando el final de un determinado proceso, permiten verificar si se han alcanzado o no las metas propuestas y hacer una reseña de los contenidos tratados a lo largo de un

curso o unidad. Finalmente, sirven para integrar en un juicio de valor todo aquello que se ha dicho sobre un estudiante a lo largo del curso o unidad, es el resultado de todos los datos disponibles, ya sean pruebas, lecciones, tareas, observaciones, etc.

Como conclusión es importante anotar que la única diferencia entre una evaluación de carácter formativo y una evaluación de carácter sumativo es el propósito. En este sentido, la evaluación sumativa siempre será cuantitativa; mientras que la formativa, puede ser cuantitativa o cualitativa.

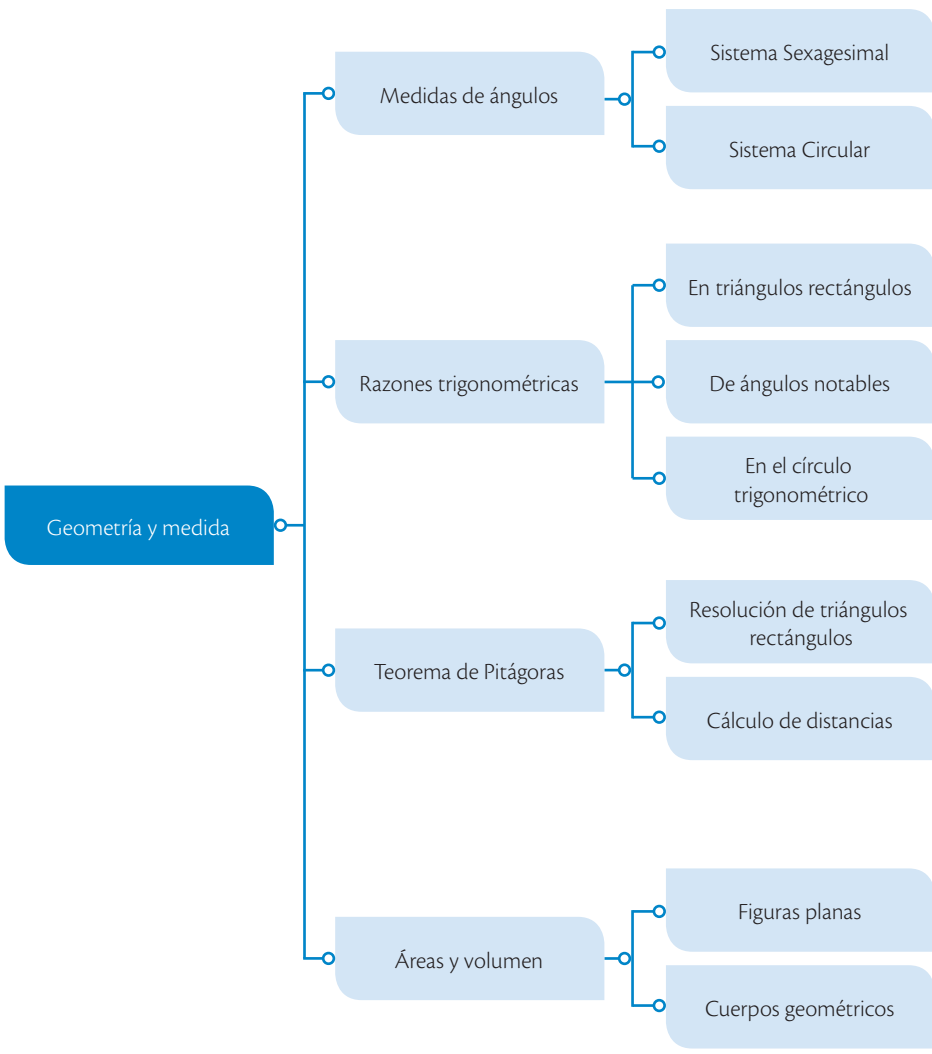
## Respuestas

### Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
6	7	8		
A	A	A		
B	B	B		
C	C	C		
D	D	D		

# Esquema conceptual

## Conocimientos de la unidad



## Cultura del Buen Vivir

### ■ Valor: **La Cooperación**

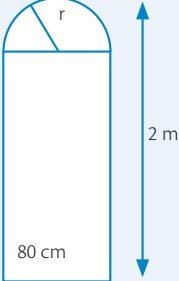
Sabemos que la cooperación es vital en todos nuestros ámbitos de vida, por ejemplo en el trabajo, en la pareja, pues nos ayuda a confiar en los demás porque todos haremos la parte que nos corresponda con responsabilidad y pensando alcanzar una misma meta.

### ■ **Compromiso a lograr**

La educación integral con la que estamos comprometidos todos los docentes busca crear espacios de reflexión, así como de análisis y síntesis ya sea de manera individual o grupal con la finalidad de emitir un juicio de valor razonado. Para esto es de suma importancia que primero reconozcamos nuestras limitaciones, luego nuestros errores o equívocos para poder enmendarlos inmediatamente, además debemos ser agradecidos con todo lo que tenemos en nuestro entorno. Es por eso que por más sacrificio que te haya costado tener lo que tienes, no es razón suficiente para alardear de tus logros más importantes es compartir tus experiencias que pueden ser útiles a otros como tú.

# Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica	
Unidad 5: razones trigonometricas	
Objetivos generales del área	Objetivos del área por subnivel
OG.M.2 – OG.M.3. – OG.M.4. – OG.M.5	O.M.4.5. – O.M.4.6.
Objetivos de subnivel	Valores
M.4.2.15 – M.4.2.16 – M.4.2.17 – M.4.2.18 – M.4.2.19 – M.4.2.20 M.4.2.21 – M.4.2.22	La cooperación
Criterios de evaluación	Indicadores de evaluación
CE.M.4.5 – CE.M.4.6	I.M.4.6.1 – I.M.4.6.2 – I.M.4.6.3
Objetivos de la unidad	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convertir medidas de ángulos en grados o radianes reconociendo sus equivalencias.</li> <li>• Aplicar razones trigonométricas para identificar triángulos rectángulos de ángulos notables y uso del círculo trigonométrico.</li> <li>• Resolución de problemas con teorema de Pitágoras y razones trigonométricas.</li> <li>• Cálculo de áreas de figura planas y volumen de cuerpos geométricos.</li> </ul>	

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
<p><b>Geometría y medida</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplica el Teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.</li> <li>• Definir e identificar las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno y tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.</li> <li>• Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</li> <li>• Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas.</li> <li>• Construir pirámides, prismas, conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes), para calcular el área lateral y total de estos cuerpos geométricos.</li> <li>• Calcular el volumen de pirámides, prismas, conos y cilindros aplicando formulas respectivas.</li> <li>• Resolver problemas que impliquen el cálculo de volúmenes de cuerpos compuestos (usando la descomposición de cuerpos).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Supón que tu casa tiene ventanas como se muestra en la figura</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lo que desea saber es cuánto dinero debe cancelar su padre para poner vidrios en cada ventana, si en tu casa hay un total de siete ventanas.</li> <li>• Solución: Lo que debemos hacer es separar en dos figura planas, es decir, primero analizamos la mitad del círculo y después el rectángulo. Así: Para la mitad del círculo, el radio mide 40 cm, y sabemos que: <math>A_c = \pi \cdot r^2</math></li> <li>• Pero como se trata de medio círculo, tenemos: <math>\frac{A_c}{2} = \pi \cdot r^2 : 2</math></li> <li>• Lo que equivale a decir, <math>\frac{A_c}{2} = 800\pi \text{ cm}^2 = 2\,512 \text{ cm}^2</math></li> <li>• Ahora calculamos el área del rectángulo, y sabemos que: <math>A_R = b \cdot a</math></li> <li>• Donde la altura es: <math>a = 200 \text{ cm} - 40 \text{ cm} = 160 \text{ cm}</math></li> <li>• Lo que equivale a decir, <math>A_R = 80 \cdot 160 = 12\,800 \text{ cm}^2</math></li> <li>• Por lo tanto, el área de la ventana será: <math>A_v = A_c + A_R = 2\,512 + 12\,800 = 15\,312 \text{ cm}^2</math></li> <li>• Como la venta del vidrio se hace por metros, obtendremos: <math>15\,312 \text{ cm}^2 \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10\,000 \text{ cm}^2} = 1,53 \text{ m}^2</math></li> <li>• Y como tenemos siete ventanas, necesitaremos de <math>10,71 \text{ m}^2</math>.</li> <li>• Solo te queda por averiguar el costo del metro de vidrio, el cual lo debes multiplicar por los <math>10,71 \text{ m}^2</math>. ¡Averígualo!</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• razones trigonométricas y sus relaciones en la resolución de triángulos rectángulos y es situaciones problema de la vida real. (I.3)</li> <li>• Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas y volumen de pirámides, primas, conos y cilindros; aplica, como estrategia de solución, la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos; explica los procesos de solución empleando la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de los resultados. (I.3,I.4)</li> </ul>	<p><b>Tarea grupal</b></p> <p>En grupos de 3 personas deben proponer solución al problema planteado.</p> <p><b>Actividades</b></p> <p>colaborativas y talleres propuestos en el libro de trabajo. / Tabla de cotejo.</p> <p><b>Prueba de bloque</b></p> <p>Prueba objetiva./ Rúbrica de evaluación</p>

**Recursos:**

texto guía, cuaderno de trabajo, materiales elaborados por el docente, medios visuales y material concreto.

Bibliografía: SWOKOWSKI – COLE, Algebra, editorial THOMSSON LEARNING, México D.F. 2011 – LEHMAN, Algebra, LIMUSA editores, México D.F. 2011 – GALINDO Edwin, Matemáticas Superiores, Prociencia Editores, Ecuador 2010

## Ampliación conceptual

### Sistema sexagesimal.

Se llama grado sexagesimal a cada una de las partes del resultado de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

Los divisores del grado son:  $1^\circ = 60' = 60''$

Es por ello que, el ángulo de 15 grados, 30 minutos y 50 segundos se expresa de la siguiente forma:  $15^\circ 30' 50''$

### El radián.

Definimos radián, como el arco de circunferencia que mide lo mismo que el radio. Por lo que dado el primer gráfico decimos que,

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ$$

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44''$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que una vuelta en el sistema sexagesimal es  $360^\circ$ , mientras que una vuelta en el sistema circular es  $2\pi \text{ rad}$ .
- Grafique en grados y radianes una vuelta.
- Con el graduador mida los cuadrantes y realice las conversiones a radianes, y trace la circunferencia en cada caso.
- Aclare cuando el ángulo está en sentido horario y cuando en sentido anti horario.

## 1 Medidas de ángulos

### Explora

Observa la Figura 1

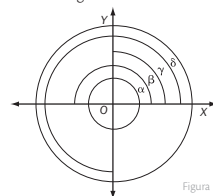


Figura 1

- Halla la medida de los ángulos centrales marcados en la figura.

### Ten en cuenta

Un ángulo central tiene su vértice en el centro de una circunferencia y sus lados son dos radios de la misma.

### 1.1 El grado sexagesimal

Para hallar la medida de los ángulos centrales  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ , se fija como primer lado de los ángulos el semieje positivo de las abscisas.

Si el sentido de giro es contrario al de las agujas del reloj, la medida de los ángulos es un número positivo; si el sentido es el mismo de las manecillas, es un número negativo.

El **grado sexagesimal** es la medida de cada uno de los ángulos que resultan al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales. Su símbolo es  $^\circ$ .

Un grado se divide en 60 minutos:  $1^\circ = 60'$ .

Un minuto se divide en 60 segundos:  $1' = 60''$ .

#### Ejemplo 1

Para expresar el ángulo de  $7225^\circ$  como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que  $360^\circ$ , se divide por  $360^\circ$ , de modo que el cociente es el número de vueltas y el residuo es el ángulo buscado.

$$7225^\circ = 20 \cdot 360^\circ + 25^\circ$$

### 1.2 El radián

El **radián** es la medida del ángulo central de una circunferencia cuyo arco tiene la misma longitud que el radio. Su símbolo es **rad**.

Como el ángulo de un giro completo abarca toda la circunferencia, y la longitud de una circunferencia con radio  $r$  es  $2\pi r$ , este ángulo mide  $2\pi \text{ rad}$ . Por lo tanto, se tiene la equivalencia:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44''$$

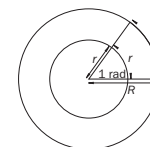


Figura 2

El radián es independiente del radio de la circunferencia que se considere, ya que todos los sectores circulares determinados por un mismo ángulo son semejantes entre sí (Figura 2).

Los ángulos que determinan arcos de mayor longitud que la de la circunferencia pueden expresarse como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que  $360^\circ$  o  $2\pi$  radianes.

### 1.3 Conversión entre unidades de medida de ángulos

Para hacer conversiones de medidas de ángulos entre los sistemas sexagesimal y de radianes, se parte de la equivalencia estudiada anteriormente ( $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ ).

#### Ejemplo 2

Para expresar  $125^\circ$  en radianes, se plantea la siguiente regla de tres:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{125^\circ} \Rightarrow x = \frac{125^\circ \cdot 2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{25\pi}{36} \text{ rad}$$

Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar medidas de ángulos en la solución de ejercicios y problemas.

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Expresa en radianes el ángulo de 155°.

Solución:

Al utilizar la equivalencia entre grados y radianes, se obtiene:

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{x}{155^\circ} \Rightarrow x = \frac{155^\circ \cdot \pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{31\pi}{36} \text{ rad}$$

2 Expresa en grados el ángulo de 2,4 rad.

Solución:

Se plantea una regla de tres simple:  $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{2,4 \text{ rad}}{x}$

$$\text{Entonces: } x = \frac{180^\circ \cdot 2,4 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}$$

$$x = \frac{432^\circ}{\pi} = 137,5099^\circ$$

Ten en cuenta

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x}{1 \text{ rad}}$$

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

3 Indica a qué ángulo menor que 360° equivalen los ángulos que se indican a continuación.

- a. 720°      b. 1050°      c. 990°  
d. 840°      e. 600°      f. 1260°

Ejercitación

4 Indica la medida en radianes de los siguientes ángulos.

- a. 0°      b. -45°      c. -60°  
d. 120°      e. 30°      f. -240°  
g. 90°      h. -270°      i. 135°  
j. -300°      k. 36°      l. -20°  
m. 216°      n. -160°      ñ. 324°

5 Expresa la medida en radianes del ángulo  $\alpha$ , menor que 360°, al que equivalen estos ángulos.

- a. 480°      b. -1235°      c. 930°      d. 1440°

6 Expresa en grados los siguientes ángulos.

- a.  $-\frac{\pi}{6}$  rad      b. 0,8 rad      c.  $\frac{3\pi}{4}$  rad  
d.  $-3\pi$  rad      e. 4 $\pi$  rad      f.  $-\frac{9\pi}{4}$  rad  
g.  $-\frac{7\pi}{9}$  rad      h.  $\frac{13\pi}{6}$  rad      i.  $-\frac{5\pi}{12}$  rad  
j.  $-\frac{11\pi}{5}$  rad      k.  $-\frac{\pi}{5}$       l.  $\frac{5\pi}{6}$

Comunicación

7 Calcula el ángulo equivalente, en sentido positivo, a cada uno de los siguientes ángulos. Utiliza la misma unidad de medida en que vienen dados.

- a. -330°      b.  $-\frac{3\pi}{4}$  rad  
c. -120°      d.  $-\frac{\pi}{2}$  rad

Razonamiento

8 Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F), sea un ángulo  $\beta$  en posición normal.

- a. Su lado final debe estar en el primer cuadrante.  
b. Su rotación debe ser en sentido contrario al de las manecillas del reloj.  
c. Su vértice debe estar sobre el eje positivo de las abscisas.  
d. Su lado inicial debe coincidir con el eje positivo de las abscisas.

Resolución de problemas



9 Dos ángulos  $a$  y  $b$  son complementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo recto, es decir,  $a + b = 90^\circ$ . ¿Cuál es la medida, en grados y en radianes, del ángulo complementario en cada caso?

- a. 15°      b. 38°  
c.  $\frac{5\pi}{12}$       d.  $\frac{13\pi}{36}$

Comunicación

3. a. 0° b. 330° c. 270° d. 120° e. 240° f. 180°

Ejercitación

4. a. 0 rad;      b.  $-\frac{\pi}{4}$  rad;      c.  $-\frac{\pi}{3}$  rad;  
d.  $\frac{2\pi}{3}$  rad;      e.  $\frac{\pi}{6}$  rad;      f.  $-\frac{4\pi}{3}$  rad;  
g.  $\frac{\pi}{2}$  rad;      h.  $-\frac{3\pi}{2}$  rad;      i.  $\frac{3\pi}{4}$  rad;  
j.  $-\frac{5\pi}{3}$  rad;      k.  $\frac{\pi}{5}$  rad;      l.  $-\frac{\pi}{9}$  rad;  
m.  $\frac{6\pi}{5}$  rad;      n.  $-\frac{8\pi}{9}$  rad;      ñ.  $\frac{9\pi}{5}$  rad

5. a.  $\frac{2\pi}{3}$  rad; b.  $-\frac{31\pi}{36}$  rad; c.  $\frac{7\pi}{6}$  rad; d. 0 rad

6. a. -30°;      b. 144°;      c. 135°;      d. -540°  
e. 720°;      f. -405°;      g. -140°;      h. 390°;  
i. -75°;      j. -396°      k. -36°;      l. 150°

Comunicación

7. a. 30°; b.  $\frac{5\pi}{4}$  rad; c. 240°; d.  $\frac{3\pi}{2}$  rad

Razonamiento

8. a. F; b. F; c. F; d. V

Resolución de problemas

9. a.  $\frac{5\pi}{12}$  rad, 75°      b.  $\frac{13\pi}{45}$  rad, 52°  
c.  $\frac{\pi}{12}$  rad, 15°      d.  $\frac{5\pi}{36}$  rad, 25°

## Ampliación conceptual

### Razones trigonométricas.

Las Razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos.

Existen seis razones trigonométricas básicas. Es por ello que si queremos definir las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ , del vértice A, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo.

Donde tenemos que:

- Hipotenusa (h) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- Cateto opuesto (a) es el lado opuesto al ángulo que queremos determinar.
- Cateto adyacente (b) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique el Teorema de Thales para formar razones y proporciones, mostrando al menos dos ejemplos.
- Ejemplifique la congruencia de triángulos mostrando al menos dos ejemplos.
- Recalque las razones trigonométricas son exclusivas del triángulo rectángulo.
- Señale los elementos del triángulos rectángulo y defina las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

## 2 Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

En la figura se observa que  $\triangle ABC$  y  $\triangle AA'C'$  comparten el ángulo A, y que los ángulos B y A' son congruentes por ser ángulos rectos. Por tanto, por el criterio Ángulo-Ángulo se puede afirmar que  $\triangle ABC \sim \triangle AA'C'$ . En consecuencia, se tienen estas relaciones:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{A'C'}{AC'} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AA'}{AC'} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{A'C'}{AA'}$$

A estas razones iguales se les denominan seno del ángulo A, coseno del ángulo A y tangente del ángulo A, respectivamente.

Las razones que se pueden establecer entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo reciben el nombre de **razones trigonométricas**.

De acuerdo con el planteamiento anterior, las **razones trigonométricas** de un ángulo agudo  $\alpha$  en un triángulo rectángulo son:

$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{cos } \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{tan } \alpha = \frac{a}{b}$$

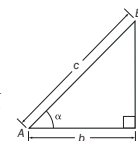


Figura 2

### Ejemplo 1

Los triángulos ABC y A'B'C' de la Figura 4 son semejantes, ya que son triángulos rectángulos y tienen los ángulos  $\alpha$  y  $\alpha$  congruentes; por consiguiente, los lados correspondientes son proporcionales.

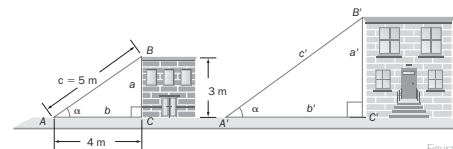


Figura 4

Las razones son:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{3}{5}. \text{ Esta razón se denomina } \textit{seno} \text{ del ángulo } \alpha.$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{4}{5}. \text{ A esta razón se le llama } \textit{coseno} \text{ del ángulo } \alpha.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{4}. \text{ Esta razón es el } \textit{tangente} \text{ del ángulo } \alpha.$$

### Explora

Observa la Figura 1.

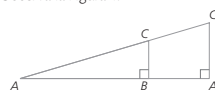


Figura 1

- ¿Cuál es la relación entre el valor de las razones de las longitudes de los lados de los triángulos?

### Ten en cuenta

Dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

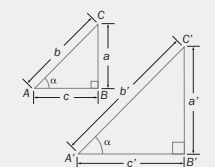


Figura 3

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ si } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \text{ y } \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

Bloque de Geometría y medida

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir e identificar las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.

**Actividad resuelta**

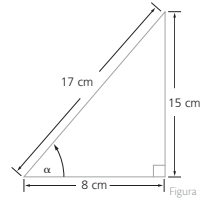
Razonamiento

- Halla las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 8 cm, 15 cm y 17 cm, respectivamente.

**Solución:**  
El cateto opuesto al ángulo agudo de mayor amplitud es el que mide 15 cm (Figura 5). De esta forma:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{15}{17} \quad \text{cos } \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{8}{17}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{15}{8}$$



**Desarrolla tus destrezas**

Ejercitación

- Halla las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en cada triángulo rectángulo.

a.

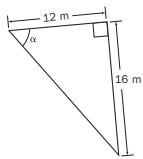


Figura 7

b.

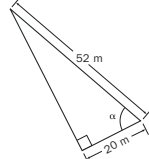


Figura 8

- Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de la Figura 9.

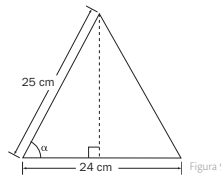


Figura 9

Comunicación

- Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si se sabe que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 cm y 5 cm, respectivamente.
- Describe tres formas distintas de hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuando se conocen un cateto y un ángulo.

Razonamiento

- Escribe, en función de  $m$ ,  $n$  y  $p$ , el seno, el coseno y la tangente del ángulo  $\alpha$  de cada uno de los triángulos rectángulos que se muestran a continuación.

a.

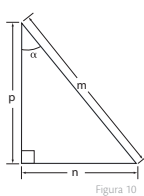


Figura 10

b.

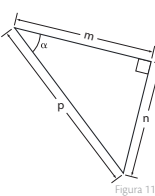


Figura 11

Ejercitación

- Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud (Figura 12).

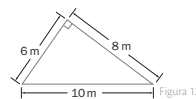


Figura 12

Comunicación

- Discute con un compañero: ¿Qué relación existe entre las tangentes de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

Resolución de problemas

- La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 dm, 16 dm y 12 dm, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

Ejercitación

2.

a.  $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}, \text{cos } \alpha = \frac{3}{5}, \text{tan } \alpha = \frac{4}{3}$

b.  $\text{sen } \alpha = \frac{12}{13}, \text{cos } \alpha = \frac{5}{13}, \text{tan } \alpha = \frac{12}{5}$

3.  $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{481}}{25}, \text{cos } \alpha = \frac{12}{25}, \text{tan } \alpha = \frac{\sqrt{481}}{12}$

Comunicación

4.

$\text{sen } \alpha = \frac{5}{13}, \text{cos } \alpha = \frac{12}{13}, \text{tan } \alpha = \frac{5}{12}$

$\text{sen } \beta = \frac{12}{13}, \text{cos } \beta = \frac{5}{13}, \text{tan } \beta = \frac{12}{5}$

5. Respuesta abierta.

Razonamiento

6.

a.  $\text{sen } \alpha = \frac{n}{m}, \text{cos } \alpha = \frac{p}{m}, \text{tan } \alpha = \frac{n}{p}$

b.  $\text{sen } \alpha = \frac{n}{p}, \text{cos } \alpha = \frac{m}{p}, \text{tan } \alpha = \frac{n}{m}$

Ejercitación

7.  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}, \text{cos } \alpha = \frac{4}{5}, \text{tan } \alpha = \frac{3}{4}$

Comunicación

8. Respuesta abierta

Resolución de problemas

9.  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}, \text{cos } \alpha = \frac{4}{5}, \alpha = \frac{3}{4}$

## Ampliación conceptual

Si tenemos un triángulo rectángulo isósceles y la mitad de un triángulo equilátero

Podemos elaborar la siguiente tabla utilizando las razones trigonométricas fundamentales:

RAZÓN	ÁNGULO				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\text{sen } \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{cos } \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg } \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique el ángulo de elevación y depresión, mostrando al menos dos ejemplos.
- Generalice las razones trigonométricas de ángulos notables empleando un triángulo rectángulo isósceles para el ángulo de 45°, y la mitad de un triángulo rectángulo equilátero para ángulos de 30° y 60°.
- Elabore una tabla de doble entrada para ubicar los valores de las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídale que investiguen si existen otros triángulos rectángulos con ángulos notables, por ejemplo 37° y 53°, 8° y 82°.
- Elabore una tabla de doble entrada para ubicar los valores de las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente.
- Realice una socialización de esta nueva tabla.

## 3 Razones trigonométricas de ángulos especiales

### 3.1 Razones trigonométricas del ángulo de 45°

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles mide:

$$c = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

De acuerdo con las definiciones de las razones trigonométricas, para el ángulo de 45° se tiene que:

$$\text{sen}45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{cos}45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{tan}45^\circ = \frac{x}{x} = 1$$

A partir de la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, es posible calcular los valores correspondientes a los **ángulos especiales** tales como 45°, 30° y 60°.

### Explora

En un triángulo rectángulo isósceles, los dos catetos tienen la misma longitud y los dos ángulos agudos son congruentes e iguales a 45° (Figura 1).

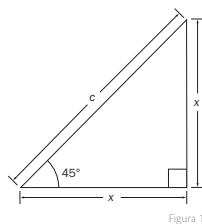


Figura 1

- Calcule los valores de  $\text{sen}45^\circ$ ,  $\text{cos}45^\circ$  y  $\text{tan}45^\circ$ .

### 3.2 Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

La altura de un triángulo equilátero lo divide en dos triángulos rectángulos cuyos catetos menores corresponden a la mitad del lado, como se muestra en la Figura 2.

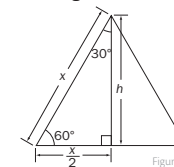


Figura 2

La medida de la altura es:

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Así, las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{cos}60^\circ = \frac{x}{x} = \frac{1}{2}; \text{tan}60^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Por su parte, las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}; \text{cos}30^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{tan}30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### Ejemplo 1

Para calcular la altura del triángulo de la Figura 3, si se sabe que uno de los ángulos agudos mide el doble que el otro, se procede como sigue.

Sea  $\alpha$  la medida del ángulo agudo de menor amplitud y  $h$  la altura del triángulo, entonces:

$$90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\text{cos}30^\circ = \frac{h}{5,5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{5,5} \Rightarrow h = 4,76 \text{ m}$$



Figura 3



## Ampliación conceptual

Recíprocas	Cociente	Pitagóricas
$\text{Sen}(\vartheta) \text{Csc}(\vartheta) = 1$	$\text{Tan}(\vartheta) =$	$\text{Sen}2(\vartheta) + \text{Cos}2(\vartheta) = 1$
$\text{Cos}(\vartheta) \text{Sec}(\vartheta) = 1$	$\text{Sen}(\vartheta) / \text{Cos}(\vartheta)$	$\text{Tan}2(\vartheta) + 1 = \text{Sec}2(\vartheta)$
$\text{Tan}(\vartheta) \text{Ctg}(\vartheta) = 1$	$\text{Ctg}(\vartheta) =$	$\text{Ctg}2(\vartheta) + 1 = \text{Csc}2(\vartheta)$
	$\text{Cos}(\vartheta) / \text{Sen}(\vartheta)$	

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique otra opción de escribir las relaciones recíprocas y Pitagóricas.
- Recalque que las relaciones recíprocas, de cociente y Pitagóricas son identidades.
- Elabore una tabla de relaciones entre razones trigonométricas.
- Resuelva al menos dos ejercicios de identidades trigonométricas.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídales que obtengan las relaciones recíprocas, de cociente y Pitagóricas del vértice B del triángulo original, llamando al ángulo beta ( $\beta$ ).
- Pida que elaboren una tabla de relaciones entre razones trigonométricas con respecto al ángulo beta ( $\beta$ ).
- Realice una socialización de esta nueva tabla y comparen con la usted elaboró.

## 4

## Relaciones entre las razones trigonométricas

### Explora

Observa la Figura 1.

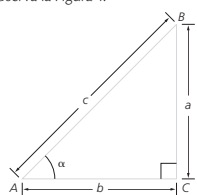


Figura 1

Haz uso del teorema de Pitágoras para demostrar las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha &= 1 \\ \text{tan}\alpha &= \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} \\ \text{tan}^2\alpha + 1 &= \frac{1}{\text{cos}^2\alpha} \end{aligned}$$

### Ten en cuenta

$$\begin{aligned} (\text{sen}\alpha)^2 &= \text{sen}^2\alpha \\ (\text{sen}\alpha)^2 &\neq \text{sen}\alpha^2 \end{aligned}$$

Según la información representada en la Figura 1, por el teorema de Pitágoras se tiene que  $a^2 + b^2 = c^2$ . Así, dividiendo por  $c^2$ , se obtiene:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \text{ o}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Como  $\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$  y  $\text{cos}\alpha = \frac{b}{c}$ , entonces:

$$(\text{sen}\alpha)^2 + (\text{cos}\alpha)^2 = 1$$

La anterior expresión es equivalente a la igualdad:

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

Esta relación es la **identidad fundamental de la trigonometría**.

Asimismo, se verifica que:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \text{tan}\alpha$$

Si se dividen los dos miembros de esta ecuación por  $\text{cos}^2\alpha$ , se obtiene:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} + \frac{\text{cos}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2\alpha} \Rightarrow \text{tan}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2\alpha}$$

Para cualquier ángulo agudo  $\alpha$  de un triángulo rectángulo se verifica que:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha &= 1 \\ \text{tan}\alpha &= \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} \quad \text{tan}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2\alpha} \end{aligned}$$

### Ejemplo 1

Para calcular los valores del coseno y la tangente de un ángulo agudo  $\alpha$ , si se conoce que  $\text{sen}\alpha = 0,6$ , se puede utilizar la identidad fundamental como sigue:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1 &\Rightarrow (0,6)^2 + \text{cos}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{cos}^2\alpha = 1 - 0,36 \\ &\Rightarrow \text{cos}\alpha = \sqrt{0,64} \Rightarrow \text{cos}\alpha = 0,8 \end{aligned}$$

Por su parte:

$$\text{tan}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} \Rightarrow \text{tan}\alpha = \frac{0,6}{0,8} \Rightarrow \text{tan}\alpha = 0,75$$

### Ejemplo 2

Se puede calcular el valor de la tangente de un ángulo agudo  $\alpha$ , si se sabe que el valor del coseno es 0,5, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{tan}^2\alpha + 1 &= \frac{1}{\text{cos}^2\alpha} \Rightarrow \text{tan}^2\alpha + 1 = \frac{1}{(0,5)^2} \\ &\Rightarrow \text{tan}^2\alpha = \frac{1}{0,25} - 1 \\ &\Rightarrow \text{tan}^2\alpha = 3 \\ &\Rightarrow \text{tan}\alpha = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Bloque de Geometría y medida

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir e identificar las relaciones entre las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.

**Actividad resuelta**

**Ejercitación**

- 1 Calcula el valor del seno y la tangente de un ángulo agudo  $\alpha$ , si el coseno vale  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . Apóyate en la información de la Figura 2.

**Solución:**

Si se aplica la ecuación fundamental, resulta que:

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{7}{9} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Por su parte,  $\text{tan}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

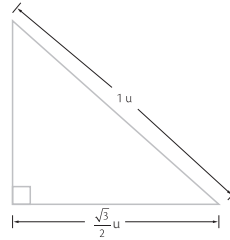


Figura 2

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

- 2 Calcula, en cada caso, las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo si se conoce que:

- a.  $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$       b.  $\text{cos}\alpha = \frac{1}{3}$   
 c.  $\text{tan}\alpha = \sqrt{5}$       d.  $\text{cos}\alpha = \frac{4}{5}$   
 e.  $\text{tan}\alpha = 5$       f.  $\text{cos}\alpha = 0,8$

**Comunicación**

- 3 Completa la Tabla 1 con valores aproximados.

<b>sen</b> $\alpha$	0,92		
<b>cos</b> $\alpha$			0,12
<b>tan</b> $\alpha$		0,75	

Tabla 1

- 4 Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la Tabla 2 ( $\alpha < 90^\circ$ ).

<b>sen</b> $\alpha$	$\frac{1}{3}$		
<b>cos</b> $\alpha$		$\frac{\sqrt{2}}{3}$	
<b>tan</b> $\alpha$			2

Tabla 2

**Razonamiento**

- 5 Dibuja un ángulo menor que  $180^\circ$  cuyo coseno sea  $-\frac{1}{2}$  y halla las restantes razones trigonométricas.

- 6 Aplica la identidad fundamental de la trigonometría y simplifica las expresiones.  
 a.  $(\text{sen}\alpha + 1)(\text{sen}\alpha - 1)$   
 b.  $\text{cos}^2\alpha (\text{tan}^2\alpha + 1)$   
 c.  $(1 - \text{cos}\alpha)(1 + \text{cos}\alpha)$   
 d.  $\text{tan}\alpha \cdot \frac{1}{\text{cos}\alpha} \left(\frac{1}{\text{sen}\alpha} - \text{sen}\alpha\right)$

- 7 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

- a.  $\text{tan}^2\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha$   
 b.  $\frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha}{\text{tan}\alpha} = 1 - \text{sen}^2\alpha$   
 c.  $(1 + \text{tan}^2\alpha) \cdot \text{cos}^2\alpha = 1$

**Resolución de problemas**

- 8 Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones trigonométricas ( $\text{sen}\alpha$ ,  $\text{cos}\alpha$  y  $\text{tan}\alpha$ ) y es válida para todos los valores del ángulo. Demuestra que la expresión  $2\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha - \text{sen}\alpha = 0$  no es una identidad.

- 9 Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros se habrán descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?

**Ejercitación**

2. a.  $\text{cos}\alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\text{tan}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$   
 b.  $\text{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\text{tan}\alpha = 2\sqrt{2}$   
 c.  $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$ ,  $\text{cos}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$   
 d.  $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\text{tan}\alpha = \frac{3}{4}$   
 e.  $\text{sen}\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ ,  $\text{cos}\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$   
 f.  $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\text{tan}\alpha = \frac{3}{4}$

**Comunicación**

- 3.

<b>sen</b> $\alpha$	0,92	0,6	0,99
<b>cos</b> $\alpha$	0,39	0,8	0,12
<b>tan</b> $\alpha$	2,36	0,75	8,25

- 4.

<b>sen</b> $\alpha$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$
<b>cos</b> $\alpha$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
<b>tan</b> $\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{14}}{2}$	2

**Razonamiento**

5.  $\text{sen } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\text{cos } 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\text{tan } 120^\circ = -\sqrt{3}$   
 Verificar construcción.

6. a.  $-\text{cos}^2\alpha$     b. 1      c.  $\text{sen}^2\alpha$     d. 1

**7. Respuesta abierta**

**Resolución de problemas**

8. Respuesta abierta

9. El ángulo es de  $10,8^\circ$  y se habrán descendido 1,312 km después de recorrer 7 km.

## Ampliación conceptual

El círculo trigonométrico es una herramienta práctica en el manejo de los conceptos de trigonometría, pues ayuda a fundamentar y tener una idea más precisa y formal de las razones trigonométricas (sen, cos, tang, cot), el círculo trigonométrico tiene de radio la unidad, lo que se muestra por cuadrantes:

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique las razones trigonométricas de ángulos cuadrantales, es decir de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$ .
- Trace círculos trigonométricos para ángulos cuadrantales.
- Elabore una tabla de las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales.
- Resuelva al menos un ejercicio de razones trigonométricas por cuadrantes y/o de ángulos cuadrantales.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 5 estudiantes y pídale que elaboren un círculo trigonométrico donde se muestren todas las razones trigonométricas tanto de ángulos notables como de ángulos cuadrantales medidos en grados o radianes
- Trabaje en un papelote y pídale que socialicen la tarea realizada por los estudiantes.

## 5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

### Explora

El ángulo  $\alpha$  de la Figura 1 está situado en posición normal, es decir, su vértice coincide con el origen del plano cartesiano.

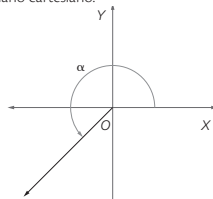


Figura 1

• Si se sabe que  $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ¿cuáles son los valores de  $\text{sen}\alpha$  y  $\tan\alpha$ ?

### Ten en cuenta

$\text{sen } 90^\circ = 1$   
 $\cos 90^\circ = 0$   
 $\tan 90^\circ$  no existe (Figura 3).

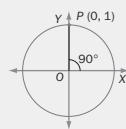


Figura 3

### 5.1 Circunferencia goniométrica

Las definiciones de seno, coseno y tangente se pueden extender a un ángulo cualquiera haciendo uso de un sistema de coordenadas cartesianas y una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r = 1$  denominada **circunferencia goniométrica**.

Cada ángulo  $\alpha$  determina un punto  $P(x, y)$  sobre la circunferencia goniométrica. El radio y las coordenadas de este punto forman un triángulo rectángulo, tal que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{1} = y \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \text{ con } x \neq 0$$

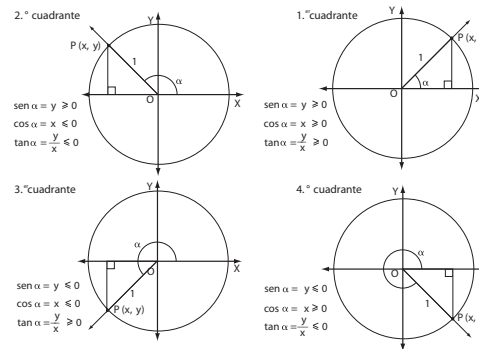


Figura 2

Así, para calcular los valores  $\text{sen}\alpha$  y  $\tan\alpha$  para el ángulo  $\alpha$  de la Figura 1, se puede hacer el siguiente razonamiento.

- Como  $\alpha$  pertenece al tercer cuadrante, entonces  $\text{sen}\alpha \leq 0$  y  $\tan\alpha \geq 0$ . Al aplicar la identidad fundamental, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \text{sen}\alpha &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- Por otra parte:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \Rightarrow \tan\alpha &= 1 \end{aligned}$$

Las razones trigonométricas no dependen del radio de la circunferencia, ya que los triángulos rectángulos determinados por el ángulo  $\alpha$  son semejantes entre sí. Además, como  $r = 1$ , se cumple que:

$$|\text{sen}\alpha| \leq 1 \quad |\cos\alpha| \leq 1$$

Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Determinar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

### 5.2 Razones trigonométricas de ángulos suplementarios y de ángulos que difieren en 180°

#### Ángulos suplementarios: $\alpha$ y $180^\circ - \alpha$

Los ángulos  $\alpha$  y  $180^\circ - \alpha$  son suplementarios, por lo que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) &= \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cos}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tan}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tan} \alpha \end{aligned}$$

#### Ejemplo 1

Los puntos  $P$  y  $P'$  son simétricos con respecto al eje de ordenadas (Figura 4).

$$\begin{aligned} y' &= y \Rightarrow \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \\ x' &= -x \Rightarrow \operatorname{cos}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tan}(180^\circ - \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\operatorname{cos} \alpha} = -\operatorname{tan} \alpha \end{aligned}$$

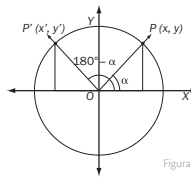


Figura 4

#### Ángulos que difieren en 180°: $\alpha$ y $180^\circ + \alpha$

Los ángulos  $\alpha$  y  $180^\circ + \alpha$  difieren en  $180^\circ$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cos}(180^\circ + \alpha) &= -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tan}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tan} \alpha \end{aligned}$$

#### Ejemplo 2

Los puntos  $P$  y  $P'$  son simétricos con respecto al origen de coordenadas (Figura 5).

$$\begin{aligned} y' &= -y \Rightarrow \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ x' &= -x \Rightarrow \operatorname{cos}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tan}(180^\circ + \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)}{\operatorname{cos}(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{-\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tan} \alpha \end{aligned}$$

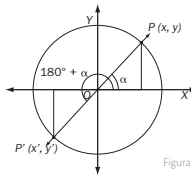


Figura 5

#### Ejemplo 3

Para hallar las razones trigonométricas de  $135^\circ$ , se tiene en cuenta que  $135^\circ$  y  $45^\circ$  son ángulos suplementarios; es decir:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 135^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{cos} 135^\circ &= \operatorname{cos}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tan} 135^\circ &= \operatorname{tan}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tan} 45^\circ = -1 \end{aligned}$$

Estas son las razones trigonométricas del ángulo  $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ .

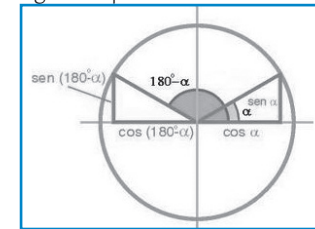
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 210^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{cos} 210^\circ &= \operatorname{cos}(180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tan} 210^\circ &= \operatorname{tan}(180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tan} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

APLICA © EDICIONES SM

## Ampliación conceptual

A continuación se muestran razones trigonométricas de ángulos suplementarios y de ángulos que difieren de  $180^\circ$ .

Sea  $\alpha$  un ángulo y  $180^\circ - \alpha$  su suplementario. Gráficamente tenemos los ángulos suplementarios:



Por lo que se cumple lo siguiente:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cos}(\alpha)$$

$$\operatorname{tan}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tan}(\alpha)$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que las razones trigonométricas de ángulos suplementarios está dado por la formación de triángulos rectángulos tanto en el primer cuadrante como en el segundo cuadrante, que el seno tiene la misma magnitud y positiva, pero el coseno tiene la misma magnitud pero de signo opuesto. Por otro lado, la tangente de un ángulo suplementario es el opuesto de la tangente.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 5 estudiantes y pídale que elaboren un círculo trigonométrico para calcular las razones trigonométricas (sen, cos, tan) del ángulo  $\alpha$  correspondiente al primer cuadrante de  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $225^\circ$  y  $240^\circ$ .
- Trabaje en un papelote y pídale que socialicen la tarea realizada por los estudiantes.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que las razones trigonométricas de ángulos opuestos está dado por la formación de triángulos rectángulos tanto en el primer cuadrante como en el cuarto cuadrante, que el seno tiene la misma magnitud pero de signo opuesto, y el coseno tiene la misma magnitud con signo positivo. Por otro lado, la tangente de un ángulo opuesto es el opuesto de la tangente.
- Explique que las razones trigonométricas de ángulos complementarios está dado por la formación de triángulos rectángulos solo en el primer cuadrante, y que tanto el seno como el coseno son positivos. Por otro lado, la tangente de ángulos complementarios es la cotangente.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 5 estudiantes y pídale que elaboren un círculo trigonométrico para calcular las razones trigonométricas (sen, cos, tan) del ángulo  $\alpha$  correspondiente al primer cuadrante de  $300^\circ$ ,  $315^\circ$  y  $330^\circ$ .
- También pídale que expresen las siguientes razones trigonométricas en función de un ángulo del primer cuadrante de  $\text{sen}(870^\circ)$  y  $\text{cos}(-30^\circ)$   
Trabaje en un papelote y pídale que socialicen la tarea realizada por los estudiantes.

## 5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

### Ten en cuenta

En la práctica, se toma el semieje positivo de las abscisas como lado inicial de los ángulos de giro. El sentido es positivo si es contrario al de las agujas del reloj, o negativo si tiene el mismo sentido que las agujas del reloj.

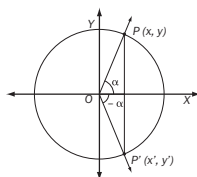


Figura 6

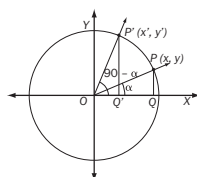


Figura 7



### TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

[www.e-sm.net/9smt13](http://www.e-sm.net/9smt13)

Evalúa tus conocimientos sobre el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

### 5.3 Razones trigonométricas de ángulos opuestos y de ángulos complementarios

#### Ángulos opuestos: $\alpha$ y $-\alpha$

Los ángulos  $\alpha$  y  $-\alpha$  son opuestos, por lo que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\alpha) &= -\text{sen}\alpha & \text{cos}(-\alpha) &= \text{cos}\alpha \\ \text{tan}(-\alpha) &= -\text{tan}\alpha \end{aligned}$$

#### Ejemplo 4

Los puntos  $P$  y  $P'$  son simétricos con respecto al eje de abscisas (Figura 6).

$$y' = -y \Rightarrow \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$$

$$x' = x \Rightarrow \text{cos}(-\alpha) = \text{cos}\alpha$$

$$\text{tan}(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\text{cos}(-\alpha)} = \frac{-\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = -\text{tan}\alpha$$

#### Ángulos complementarios: $\alpha$ y $90^\circ - \alpha$

Los ángulos  $\alpha$  y  $90^\circ - \alpha$  son complementarios, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{sen}(90^\circ - \alpha) &= \text{cos}\alpha & \text{cos}(90^\circ - \alpha) &= \text{sen}\alpha \\ \text{tan}(90^\circ - \alpha) &= \frac{1}{\text{tan}\alpha} \end{aligned}$$

#### Ejemplo 5

Los triángulos  $\triangle OPQ$  y  $\triangle OP'Q'$  de la Figura 7 son congruentes.

$$y' = x \Rightarrow \text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos}\alpha$$

$$x' = y \Rightarrow \text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen}\alpha$$

$$\text{tan}(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{sen}(90^\circ - \alpha)}{\text{cos}(90^\circ - \alpha)} = \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{\text{tan}\alpha}$$

#### Actividad resuelta

##### Ejercitación

1 Calcula las razones trigonométricas de  $330^\circ$ .

##### Solución:

Al trazar el ángulo  $330^\circ$  en posición normal (Figura 8) se observa que su lado terminal coincide con el ángulo  $-30^\circ$ . Por lo tanto:

$$\text{sen}330^\circ = \text{sen}(-30^\circ) = -\text{sen}30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{cos}330^\circ = \text{cos}(-30^\circ) = \text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan}330^\circ = \text{tan}(-30^\circ) = -\text{tan}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

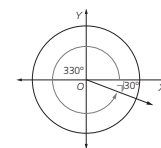


Figura 8

**Ejercitación**

2. a.  $\sin \pi = 0, \cos \pi = -1, \tan \pi = 0$   
 b.  $\sin 270^\circ = -1, \cos 270^\circ = 0, \tan 270^\circ$  indeterminado  
 c.  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 d.  $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 225^\circ = 1$   
 e.  $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$   
 f.  $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \frac{3\pi}{4} = -1$   
 g.  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 135^\circ = -1$   
 h.  $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}, \tan 240^\circ = \sqrt{3}$   
 i.  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \frac{\pi}{4} = 1$   
 j.  $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 k.  $\sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}, \tan(-120^\circ) = \sqrt{3}$   
 l.  $\sin \frac{5\pi}{2} = 1, \cos \frac{5\pi}{2} = 0, \tan \frac{5\pi}{2}$  indeterminado  
 m.  $\sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(-300^\circ) = \frac{1}{2}, \tan(-300^\circ) = \sqrt{3}$   
 n.  $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}, \tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$   
 ñ.  $\sin(-225^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan(-225^\circ) = -1$   
 o.  $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \tan \frac{\pi}{2}$  indeterminado

3. a.  $\frac{1}{2}$     b.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     c.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 d.  $-\frac{1}{2}$ ;    e.  $-1$     f.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 4. a.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     b.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     c.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 d.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     e.  $0,95$     f.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Comunicación**

5.  $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

**Razonamiento**

6. a.  $170^\circ 24' 21,35''$     b.  $233^\circ 7' 48,37''$   
 7. a.  $0,64$     b.  $0,64$     c.  $-0,64$     d.  $-0,64$   
 8. a.  $\sin \alpha \approx -0,82, \tan \alpha \approx 1,44$   
 b.  $\cos \alpha \approx 0,44, \tan \alpha \approx -2,06$   
 c.  $\sin \alpha \approx 0,94, \cos \alpha \approx -0,33$   
 9. a.  $2,863\pi$     b.  $0,137\pi$     c.  $-0,863\pi$     d.  $-1,363\pi$   
 10. Para ángulo suplementario:

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos(\pi - \alpha) = -\frac{1}{4},$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\sqrt{15}$$

Para ángulo opuesto:

$$\sin(-\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \cos(-\alpha) = \frac{1}{4},$$

$$\tan(-\alpha) = -\sqrt{15}$$

**Resolución de problemas**

11. a.  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$      $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 El seno de  $\beta$  aumentó en  $41,42\%$ .  
 b. El  $\sin \beta = 1$ .  
 El seno de  $\beta$  aumentó en  $15,47\%$   
 c. Respuesta abierta

Bloque de Geometría y medida

**Desarrolla tus destrezas**

**Ejercitación**

2. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a. $\pi$	b. $270^\circ$	7. Calcula los valores que se piden, si $\alpha$ es un ángulo agudo y $\sin \alpha = 0,64$ .
c. $150^\circ$	d. $225^\circ$	a. $\sin(180^\circ - \alpha)$ b. $\cos(90^\circ - \alpha)$
e. $\frac{2\pi}{3}$	f. $\frac{3\pi}{4}$	c. $\sin(-\alpha)$ d. $\sin(180^\circ + \alpha)$
g. $135^\circ$	h. $240^\circ$	8. Halla, en cada caso, las otras dos razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ .
i. $\frac{\pi}{4}$	j. $\frac{5\pi}{6}$	a. Si $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$ y $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$
k. $-120^\circ$	l. $\frac{5\pi}{2}$	b. Si $\sin \alpha = -\frac{9}{10}$ y $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
m. $-300^\circ$	n. $\frac{5\pi}{3}$	c. Si $\tan \alpha = -\sqrt{6}$ y $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
ñ. $-225^\circ$	o. $\frac{\pi}{2}$	9. Encuentra las razones trigonométricas de estos ángulos si se sabe que $\cos \alpha = \frac{10}{11}$ y $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ .

3. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas:

a. $\sin \frac{5\pi}{6}$	b. $\sin \frac{3\pi}{4}$	c. $\cos \frac{3\pi}{4}$
d. $\cos \frac{2\pi}{3}$	e. $\tan \frac{3\pi}{4}$	f. $\tan \frac{5\pi}{6}$

4. Calcula los valores para los siguientes ángulos negativos.

a. $\sin(-60^\circ)$	b. $\cos(-45^\circ)$
c. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	d. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
e. $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$	f. $\tan(-30^\circ)$

**Comunicación**

5. Halla las otras dos razones trigonométricas de un ángulo  $\alpha$ , tal que  $\tan \alpha = 4$ .

**Razonamiento**

6. Halla el valor de los ángulos que se muestran en las Figuras 9 y 10.

Figura 9

Figura 10

a. Halla el valor del seno de cada uno de los ángulos si  $\alpha = 30^\circ$ . Determina en qué porcentaje aumentó el seno de  $\beta$  en relación con el de  $\alpha$ .  
 b. ¿En qué porcentaje aumenta el seno de  $\beta$  si el ángulo  $\alpha$  mide  $60^\circ$ ?  
 c. ¿Crees que los senos de los ángulos son proporcionales a las amplitudes de los mismos?

## Ampliación conceptual

En la calculadora puede calcular el valor de razón trigonométrica, por ejemplo:

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ está en modo DEG}$$

$$\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ está en modo RAD}$$

También puede calcular el ángulo, por ejemplo:

$$\cos(x) = 1/2, \text{ donde } x = \cos^{-1}(1/2), x = 60^\circ \text{ está en modo DEG}$$

$$\cos(x) = 1/2, \text{ donde } x = \cos^{-1}(1/2), x = \pi/3 \text{ está en modo RAD}$$

Por lo tanto, si desea solucionar una ecuación trigonométrica, además de utilizar la calculadora puede utilizar Geogebra como un gráficoador.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que la calculadora entrega resultados inmediatos pero que no analiza, y que se puede trabajar en modo DEG con unidades de grados y en modo RAD con unidades de radianes.
- Elabore gráficas de  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  de  $0 \leq x \leq 360^\circ$
- Señale las soluciones de las ecuaciones simples en las gráficas, generalice.

## Actividades colaborativas

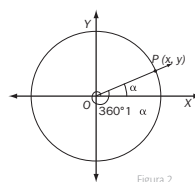
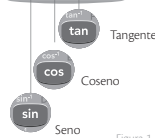
- Forme grupos de 5 estudiantes y pídales que elaboren las gráficas de  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  de  $0 \leq x \leq 2\pi$
- Plantee ecuaciones simples en radianes y pida que señalen la solución en las gráficas.
- Elabore este trabajo en papelotes.

## 6 Trigonometría con la calculadora

### Explora

La calculadora científica permite obtener las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera sin importar si su medida está dada en grados o en radianes.

- Determina las funciones de la calculadora científica que facilitan estos cálculos.



En primer lugar, se debe comprobar el modo de la unidad angular en la que está funcionando la calculadora. Generalmente, la unidad por defecto es el grado sexagesimal; de no ser así, es necesario consultar el manual para aprender a utilizar el modo en radianes y en el sistema sexagesimal.

En la Figura 1 se han señalado las teclas correspondientes a las funciones seno, coseno y tangente.

### Ejemplo 1

Para hallar el valor de  $\sin 25^\circ$ ,  $\cos 95,48^\circ$  y  $\tan \frac{6\pi}{5}$  con ayuda de la calculadora, se procede como sigue:

- Para  $\sin 25^\circ$  se digita la secuencia:

**sin 2 5**

Según el tipo de calculadora, puede variar el orden en el que se digitan la medida del ángulo y la función. En cualquier caso, el resultado es el mismo:  $\sin 25^\circ = 0,4226$ .

- Análogamente, para  $\cos 95,48^\circ$  se digita:

**cos 9 5 . 4 8**

El resultado es  $\cos 95,48^\circ = -0,0955$ .

- Por último, para  $\tan \frac{6\pi}{5}$  se ajusta el modo de la calculadora para trabajar con radianes (modo RAD) y se utiliza la secuencia:

**tan 6 pi EXP abc 5 EXE**

Así, se obtiene que  $\tan \frac{6\pi}{5} = 0,7265$ .

### 6.1 Ecuaciones trigonométricas

Las **ecuaciones trigonométricas** son aquellas en las que aparecen una o más razones trigonométricas de la incógnita.

#### Actividad resuelta

Comunicación

- Indica la medida de todos los ángulos  $x$  que cumplen que  $\sin x = 0,5$ .

#### Solución:

Para resolver ecuaciones trigonométricas con ayuda de la calculadora, se pueden digitar estas secuencias:

**sin sin**      **sin cos**      **sin tan**

En este caso, se digita:

**sin sin 0 . 5**

Se obtiene  $30^\circ$ , pero como  $\sin x > 0$ , se sabe que  $x$  es la medida de ángulos que pertenecen al primer o segundo cuadrante, es decir,  $x = 30^\circ$  o  $x = 150^\circ$ . Además, las razones trigonométricas de un ángulo y todos los que se expresan como un número entero de vueltas más este son iguales (Figura 2).

Así:  $x = 30^\circ + 360^\circ k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $y x = 150^\circ + 360^\circ k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Hallar ángulos y resolver ecuaciones trigonométricas con el uso de la calculadora.

Matemáticas

Construye ángulos en la circunferencia goniométrica con GeoGebra

Para trazar ángulos en la circunferencia goniométrica y conocer su medida —sin importar en cuál cuadrante se encuentre su lado terminal—, se pueden utilizar algunas de las herramientas de la barra principal de GeoGebra, como se muestra a continuación.



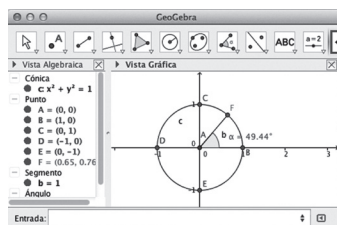
En el menú selecciona la opción *Circunferencia* (centro, radio). Haz clic sobre el punto (0, 0) y, en el cuadro de diálogo en el que se pide introducir el radio, digita 1. De esta manera obtienes la circunferencia goniométrica.

En la barra de Entrada, introduce, uno a la vez, los puntos de corte de la circunferencia con los ejes: B=(1,0), C=(0,1), D=(-1,0) y E=(0,-1).

Selecciona el menú. Luego, haz clic sobre un punto de la circunferencia en el primer cuadrante. Este punto se nombra automáticamente como F. Para desplazarlo, selecciónalo con el puntero.

En el menú selecciona la opción *Segmento* y traza los segmentos BA y AF en el orden que indican las letras. Para medir el ángulo BAF, en el menú selecciona la opción *Ángulo*. Haz clic en los tres puntos en el orden B, A y F. Verifica que la medida del ángulo BAF aparece en color verde.

Selecciona el punto F y muévalo libremente. Observa cómo varía la medida del ángulo, según en donde se encuentre el punto F.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

Halla el seno, el coseno y la tangente de estos ángulos con ayuda de la calculadora.

- a.  $275^\circ$
- b.  $124^\circ 16'$
- c. 1,5 rad
- d.  $\frac{2\pi}{5}$  rad
- e.  $-120^\circ$
- f.  $-\pi$  rad

Comunicación

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

- a.  $\tan x = -1$
- b.  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- c.  $\sen x = 0$
- d.  $\cos x = -0,7561$
- e.  $\sen x = 1$
- f.  $\cos x = 0$

Soluciona las ecuaciones trigonométricas que se proponen. Expresa los resultados en grados.

- a.  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- b.  $1 - \cos x = 0$
- c.  $\sen x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- d.  $\tan x = -1$

Soluciona las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

- a.  $\tan x = -2$
- b.  $2 - 5\cos x = 6$
- c.  $\sen x = -1$
- d.  $\tan x = 1$

Resolución de problemas

Si  $\alpha$  es un ángulo agudo tal que  $\cos \alpha = 0,2$ , ¿cuál es el valor de la  $\tan \alpha$ ?

APLICA © EDICIONES SM

Ejercitación

2.

a.  $\sen 275^\circ \approx -0,996$ ,  $\cos 275^\circ = 0,087$ ,  $\tan 275^\circ = -11,430$

b.  $\sen(124^\circ 16') \approx 0,826$ ,  $\cos(124^\circ 16') \approx -0,563$ ,  $\tan(124^\circ 16') \approx -1,468$

c.  $\sen(1,5 \text{ rad}) \approx 0,997$ ,  $\cos(1,5 \text{ rad}) \approx 0,071$ ,  $\tan(1,5 \text{ rad}) \approx 14,101$

d.  $\sen\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0,951$ ,  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0,309$ ,  $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 3,077$

e.  $\sen(-120^\circ) \approx -0,866$ ,  $\cos(-120^\circ) \approx -0,5$ ,  $\tan(-120^\circ) \approx 1,732$

f.  $\sen(-\pi) = 0$ ,  $\cos(-\pi) = -1$ ,  $\tan(-\pi) = 0$

Comunicación

3.

- a.  $x = -45^\circ$
- b.  $x = 45^\circ$
- c.  $x = 0^\circ$
- d.  $x = 139^\circ 7' 17,68''$
- e.  $x = 90^\circ$
- f.  $x = 90^\circ$

4.

- a.  $x = 150^\circ$
- b.  $x = 0^\circ$
- c.  $x = 300^\circ$
- d.  $x = 135^\circ$

5.

- a.  $x = -0,65\pi$  rad
- b.  $x = 0,795\pi$
- c.  $x = -0,5\pi$  rad
- d.  $x = 1,5\pi$  rad

Resolución de problemas

6. 4,898

UNIDAD  
**5**

# Evaluación formativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Relaciones los términos con su definición:

	Términos
1	Sistema sexagesimal
2	Radianes
3	Horario
4	Anti horario

	Definición
A	El ángulo tiene sentido positivo, se mueve contrario a las manecillas del reloj.
B	Es un sistema de numeración en base 60. Se aplica para medir el tiempo y la de la amplitud de los ángulos.
C	El ángulo tiene sentido negativo, se mueve a favor de las manecillas del reloj.
D	El ángulo de un radian es aquel cuyo recorrido en la circunferencia es igual al radio.

2. complete el enunciado:

Un grado es igual ....., y un radian es igual a .....

3. Realice la conversión solicitada.

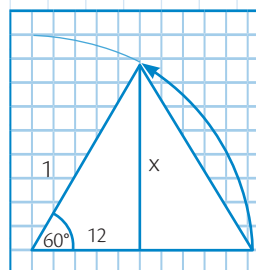
A. Pase a radianes:  $150^\circ$  y  $270^\circ$

B. Pase a grados:  $\frac{11\pi}{6}$  rad y  $\frac{5\pi}{4}$  rad

4. Dibuje un círculo trigonométrico para cada ángulo:

A. $-50^\circ$	
B. $315^\circ$	
C. $\frac{5\pi}{6}$	
D. $\frac{3\pi}{2}$	

5. Calcule la variable x y las razones trigonométricas del triángulo que está en el primer cuadrante que tiene un ángulo de  $60^\circ$ , tal como se muestra.



1. Relaciones los términos con su definición:

	Términos		Definición
1	Sistema sexagesimal	A	El ángulo tiene sentido positivo, se mueve contrario a las manecillas del reloj.
2	Radianes	B	Es un sistema de numeración en base 60. Se aplica para medir el tiempo y la de la amplitud de los ángulos.
3	Horario	C	El ángulo tiene sentido negativo, se mueve a favor de las manecillas del reloj.
4	Anti horario	D	El ángulo de un radian es aquel cuyo recorrido en la circunferencia es igual al radio.

2. complete el enunciado:

Un grado es igual a  $\frac{\pi}{180}$  , y un radian es igual a  $\frac{180}{\pi}$  .

3. Realice la conversión solicitada.

A. Pase a radianes:  $150^\circ$  y  $270^\circ$

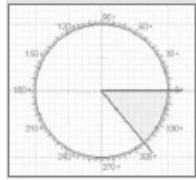
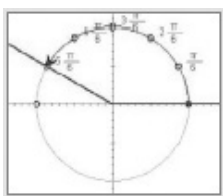
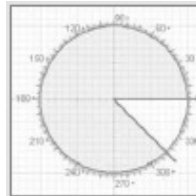
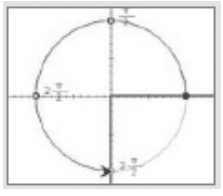
$$150^\circ = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$270^\circ = \frac{270\pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

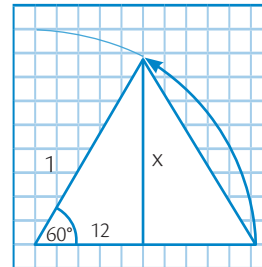
B. Pase a grados:  $\frac{11\pi}{6}$  rad y  $\frac{5\pi}{4}$  rad

$330^\circ$  y  $225^\circ$

4. Dibuje un círculo trigonométrico para cada ángulo:

A. $-50^\circ$		C. $\frac{5\pi}{6}$	
B. $315^\circ$		D. $\frac{3\pi}{2}$	

5. Calcule la variable x y las razones trigonométricas del triángulo que está en el primer cuadrante que tiene un ángulo de  $60^\circ$ , tal como se muestra.



Como x es la altura del triángulo, mediante el Teorema de Pitágoras, tenemos:

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Definir e identificar medidas de ángulos en la solución de ejercicios y problemas.	1, 2 y 3			
Definir e identificar razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.	4 y 5			

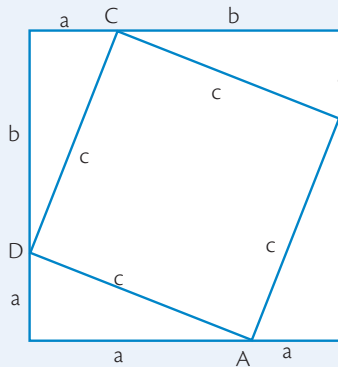
Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique por lo menos dos demostraciones del teorema de Pitágoras, pero utilizando material didáctico (cartulina, fomix).
- Enfatice que solo funciona en triángulos rectángulos.
- Aclare que la expresión  $a^2 + b^2 = c^2$  puede tomar cualquier variable.
- Recuerde que es una ecuación y puede despejar la variable que necesite.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídales que traigan cartulina o fomix, una regla y una tijera.
- Trabaje con el material solicitado y muestre cómo funciona el teorema de Pitágoras, por ejemplo con:



- Solicite que investiguen otra forma de demostrar el teorema de Pitágoras.

## 7

## Teorema de Pitágoras

### Explora

Según el teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de las medidas de los cuadrados de los catetos.

- Utiliza argumentos geométricos para demostrar este teorema.



### CULTURA del Buen Vivir

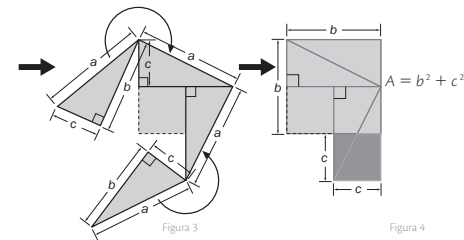
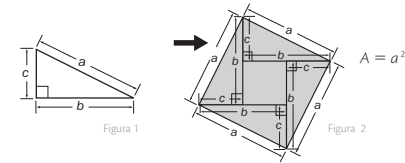
#### La cooperación

Trabajar en cooperación trae ventajas. Algunas de ellas son: mayor coordinación, valoración positiva de los demás y mayor satisfacción personal, entre otras.

- ¿Qué tipo de actitudes caracterizan a una persona cooperativa?

Para demostrar geoméricamente la relación que plantea el teorema de Pitágoras, se pueden seguir estos pasos.

- Se parte del triángulo rectángulo de hipotenusa  $a$  y catetos  $b$  y  $c$  (Figura 1).
- Se construye un cuadrado de lado  $a$  y se dibujan cuatro triángulos congruentes al primero (Figura 2).
- Se rotan dos de los triángulos (como se ve en la Figura 3).
- Si se prolonga un lado, se observa que la nueva figura está formada por dos cuadrados, uno de lado  $b$  y otro de lado  $c$ . Con esto, el área del cuadrado de lado  $a$  es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados  $b$  y  $c$ , respectivamente, es decir,  $a^2 = b^2 + c^2$  (Figura 4).



### 7.1 Medidas indirectas

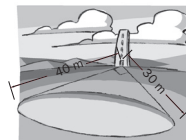
Algunas longitudes no se pueden medir directamente con instrumentos; por ejemplo, alturas muy elevadas o lugares inaccesibles. Por eso se dice que son **medidas indirectas**. En esos casos, se pueden utilizar relaciones como el teorema de Pitágoras.

#### Ejemplo 1

En la Figura 5, la torre está situada formando un ángulo recto con los extremos del lago. En este caso, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para hallar la medida  $a$  del largo del lago.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 40^2 + 30^2 = 2500 \Rightarrow a = \sqrt{2500} = 50$$

Entonces, el largo del lago mide 50 m.



Bloque de Geometría y medida

**Destreza con criterios de desempeño:** Demostrar el Teorema de Pitágoras utilizando áreas de regiones rectangulares.

**7.2 Reconocimiento de triángulos rectángulos**

Un triángulo de lados conocidos  $a, b, c$  es rectángulo si cumple el teorema de Pitágoras.

Para saber si un triángulo es rectángulo, se pueden hacer dos cosas:

1. Se miden sus ángulos con un transportador para comprobar si alguno de ellos es recto. Al medir los ángulos del triángulo de la Figura 6, se comprueba que  $\sphericalangle A$  mide  $90^\circ$  y, por tanto, el triángulo es rectángulo.

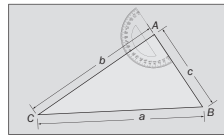


Figura 6

2. Si se conoce la medida de sus lados, o se pueden medir, basta comprobar si cumplen o no con el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

**Ejemplo 2**

Observa cómo se justifica que el  $\triangle ABC$  de la Figura 7 es rectángulo.

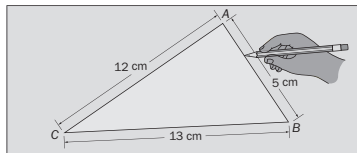


Figura 7

En el triángulo  $ABC$  la hipotenusa mide 13 cm, y los catetos miden 5 cm y 12 cm, respectivamente. Se comprueba si se cumple el teorema de Pitágoras así:

$$\left. \begin{aligned} 13^2 &= 169 \\ 12^2 + 5^2 &= 144 + 25 = 169 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{El triángulo es rectángulo.}$$

**Ejemplo 3**

Observa cómo se comprueba, sin dibujar, si el triángulo de lados 4 cm, 3 cm y 2 cm es rectángulo o no.

Si es rectángulo, la hipotenusa debe ser el lado mayor (el lado de 4 cm) y se debe cumplir el teorema de Pitágoras:  $4^2 = 3^2 + 2^2$

Entonces, se calcula:  $4^2 = 16$  y  $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

Como  $16 \neq 13$ , no se cumple el teorema de Pitágoras; por tanto, el triángulo no es rectángulo.

**Ten en cuenta**

Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son tres números que reciben el nombre de **terna pitagórica**. Por ejemplo, 3, 4 y 5 forman una terna pitagórica porque:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

**TECNOLOGÍAS**  
de la información y la comunicación



[www.e-sm.net/9smt14](http://www.e-sm.net/9smt14)

Complementa tus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras.

**Razonamiento matemático**

En la figura,  $\triangle MNO$  y  $\triangle MNP$  son triángulos rectángulos congruentes cuyo ángulo menor mide  $30^\circ$ .

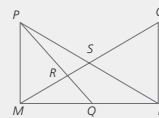


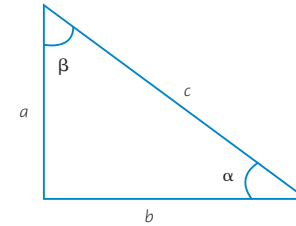
Figura 8

• ¿Cuál es la medida de los ángulos del cuadrilátero  $QNSR$ ?

**Ampliación conceptual**

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos, el lado mayor recibe el nombre de hipotenusa y los lados menores el nombre de catetos.

El gráfico que mostramos servirá para identificar los elementos:



Si nuestro estudio es para el ángulo  $\alpha$ , tenemos:

- $a$  es el cateto opuesto
- $b$  es el cateto adyacente
- $c$  es la hipotenusa

Si nuestro estudio es para el ángulo  $\beta$ , tenemos:

- $a$  es el cateto adyacente
- $b$  es el cateto opuesto
- $c$  es la hipotenusa

Por lo tanto, en cualquiera de los casos el teorema de Pitágoras es:  $a^2 + b^2 = c^2$

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Indique que la hipotenusa es mayor que cualquiera de sus catetos, y que los catetos pueden ser de distinta medida como de igual medida.
- Ejemplifique el teorema de Pitágoras con los números pitagóricos, por ejemplo la triada 3, 4 y 5; o 5, 12 y 13; o 9, 12 y 15.
- Señale los catetos, la hipotenusa, los ángulos agudos y el ángulo recto.

## Ampliación conceptual

Una de las utilidades que tiene teorema de Pitágoras es que ayuda a calcular la diagonal de un rectángulo o cuadrado, así como la altura de un triángulo o la apotema de un polígono regular.

O también si tenemos un polígono regular como el hexágono. Donde el radio mide igual que cualquiera de sus lados.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que la distancia es positiva y en especial cuando se está trabajando con figuras planas.
- Aclare que el teorema de Pitágoras es fundamental para calcular los catetos o hipotenusa de triángulos rectángulos.
- Indique que triángulos rectángulos van a estar presentes en nuestro alrededor.

## ■ Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídale que traigan una copia del plano de su casa o departamento.
- Explique rápidamente la escala que tienen los planos.
- Trabaje en estos planos y pídale calcular diagonales y alturas de las habitaciones donde duerme o de la cocina.

## 7 Teorema de Pitágoras

### 7.3 Cálculo de distancias

El teorema de Pitágoras permite calcular la **distancia entre dos puntos** que son vértices de un triángulo rectángulo o que tienen alguna relación con él.

#### Ejemplo 4

El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 m y 4 m. Se decidió dividirlo en dos con una cortina que une dos esquinas opuestas (Figura 9). Para determinar cuánto mide la cortina, se procede así:

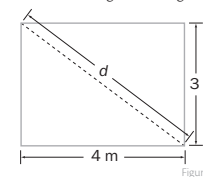
La diagonal y los lados del dormitorio forman un triángulo rectángulo en el que la diagonal es la hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras:  
 $d^2 = 3^2 + 4^2$

Se opera:  $d^2 = 9 + 16 = 25$

Se despeja:  $d = \sqrt{25} = 5$

Por lo tanto, la cortina mide 5 m.



#### Ejemplo 5

El trazado de un rascacielos es como el de la Figura 10. Se puede calcular la medida del lado oblicuo aplicando el teorema de Pitágoras.

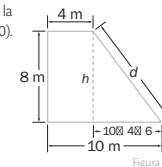
Al trazar la altura, se obtiene un triángulo rectángulo: la hipotenusa es el lado oblicuo, un cateto es la altura, y el otro, la diferencia de las bases (Figura 10).

Por el teorema de Pitágoras:  $d^2 = 8^2 + 6^2$

Se opera:  $d^2 = 64 + 36 = 100$

Se despeja:  $d = \sqrt{100} = 10$

Así que, el lado oblicuo mide 10 m.



#### Actividad resuelta

Resolución de problemas

- Calcule la apotema de un hexágono de 10 cm de lado (Figura 11).

#### Solución:

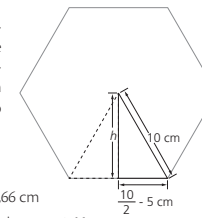
En un hexágono regular, el segmento que une el centro con un vértice mide lo mismo que un lado. Entonces, la apotema es un cateto de un triángulo rectángulo, y el otro cateto mide la mitad del lado.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$$h^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow h = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$$

Entonces, la apotema mide aproximadamente 8,66 cm.



Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Calcular distancias empleando el Teorema de Pitágoras.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Indica cuáles de las siguientes ternas de números forman una terna pitagórica. Justifica.
- a. 28, 195, 197
  - b. 17, 144, 140
  - c. 11, 61, 15
  - d. 11, 61, 60
  - e. 7, 24, 25
  - f. 8, 9, 15
  - g. 9, 10, 11
  - h. 16, 63, 65
  - i. 6, 8, 10
  - j. 7, 10, 13

- 3 Calcula el lado desconocido del triángulo de la figura 12

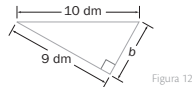


Figura 12

Comunicación

- 4 Determina el perímetro del rectángulo de la Figura 13, cuyas medidas de la base y la diagonal son 7 cm y 7,5 cm, respectivamente.

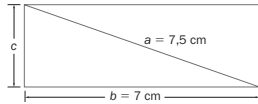


Figura 13

- 5 Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo si se sabe que los catetos miden 1 dm y 12 dm, respectivamente.

Razonamiento

- 6 Determina, sin hacer el dibujo, si son triángulos rectángulos los triángulos cuyos lados tienen las medidas dadas.
- a. 6 dm, 10 dm y 8 dm
  - b. 50 cm, 120 cm y 130 cm
  - c. 11 cm, 9 cm y 2 cm
  - d. 25 cm, 20 cm y 15 cm
  - e. 3 dm, 5 dm y 6 dm
  - f. 7 cm, 10 cm y 15 cm

- 7 Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 16 cm.
- 8 Calcula la medida de estos segmentos.
- a. La altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.
  - b. La altura de un trapecio isósceles de bases 4 cm y 6 cm, y lados congruentes de 5 cm.
- 9 Lee y realiza lo que se indica a continuación.
- Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 6 cm.
  - a. Dibuja el triángulo y mide sus ángulos. ¿Es rectángulo?
  - b. Comprueba si cumple o no el teorema de Pitágoras.

Resolución de problemas

- 10 Los lados de un triángulo miden 45 cm, 27 cm y 36 cm. ¿Es un triángulo rectángulo? Justifica tu respuesta.
- 11 ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 7 cm de radio?
- 12 Un terreno rectangular es dividido por un río que lo atraviesa diagonalmente (Figura 14). El dueño necesita encerrar la parte del terreno en que se encuentran los animales. ¿Cuánta malla utilizará si las medidas de los lados que forman el ángulo recto son 12 m y 15 m?

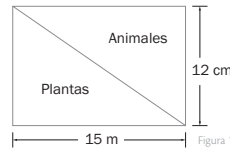


Figura 14

- 13 Dos aviones salen del mismo aeropuerto. Uno se dirige hacia el norte y el otro hacia el oriente. Cuando se encuentran, a 1580 km uno del otro, uno de ellos ha recorrido 800 km. ¿Qué distancia ha recorrido el otro avión?
- 14 En el centro de una plaza de forma circular de 300 m de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 m de altura. Con un teodolito situado en el borde de la plaza, se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6°. Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 m del suelo, ¿cuánto mide la estatua?

Ejercitación

2. Son ternas pitagóricas: a, d, e, h, i.

3.  $b = \sqrt{19}$  cm

Comunicación

4.  $14 + \sqrt{29}$  cm

5.  $\sqrt{145}$  dm

Razonamiento

6. Son triángulos rectángulos: a, b, d.

7.  $8\sqrt{3}$  cm

8. a.  $4\sqrt{3}$  cm b.  $2\sqrt{6}$  cm

9. No es triángulo rectángulo. Por tanto, no se cumple el teorema de Pitágoras.

Resolución de problemas

10. Sí es triángulo rectángulo.

11.  $7\sqrt{2}$  cm

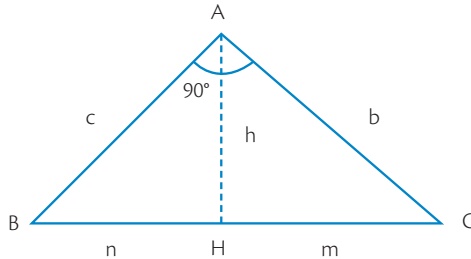
12.  $27 + 3\sqrt{41}$  m

13. Aproximadamente 1362 km.

14. Aproximadamente 14,46 m.

## Ampliación conceptual

Para el teorema de la altura tenemos que, en un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es la media proporcional entre los dos segmentos que dividen a ésta. Gráficamente tenemos:

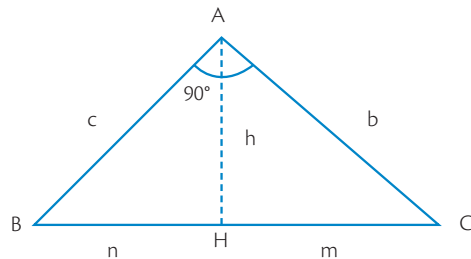


Donde la proporción a formar es:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}; h^2 = m \cdot n; \text{ o lo que es lo mismo que: } h = \sqrt{m \cdot n}$$

Llamada también media geométrica con respecto a la altura.

Para el teorema del cateto tenemos que, en todo triángulo rectángulo un cateto es la media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. Gráficamente tenemos:



Sabemos que a es hipotenusa, b y c son catetos.

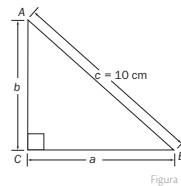
Ahora tenemos que, m es la proyección del cateto b sobre la hipotenusa a.

También tenemos que, n es la proyección del cateto c sobre la hipotenusa a.

## 8 Resolución de triángulos rectángulos

### Explora

La hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de la Figura 1 mide 10 cm.



Halla la medida de los ángulos agudos y de los catetos.

### Ten en cuenta

La proyección de un cateto sobre la hipotenusa es el segmento contenido en la hipotenusa que une el pie de la altura trazada desde el vértice del ángulo recto con uno de los otros vértices.

### App

#### Resolución de triángulos rectángulos

Abre la aplicación *Right Angle Triangle Solver* y utilízala para verificar tus soluciones de triángulos rectángulos.



Dado que ABC es un triángulo rectángulo, se sabe que  $m\angle C = 90^\circ$ . Además, por ser isósceles, los ángulos agudos son congruentes entre sí. Es decir:

$$m\angle A + m\angle B = 90^\circ \Rightarrow m\angle A = m\angle B = 45^\circ$$

Para averiguar la medida del cateto b, se puede plantear la siguiente ecuación.

Aproximación a las milésimas

$$\text{sen}45^\circ = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 10\text{sen}45 = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ cm}$$

Al ser  $a = b$ , el lado a mide también 7,07 cm, con lo cual el triángulo queda resuelto, pues se sabe que:

$$a = 7,07 \text{ cm} \quad b = 7,07 \text{ cm} \quad c = 10 \text{ cm}$$

$$m\angle A = 45^\circ \quad m\angle B = 45^\circ \quad m\angle C = 90^\circ$$

Resolver un triángulo es hallar la medida de todos sus lados y de todos sus ángulos.

### Ejemplo 1

En el triángulo rectángulo de la Figura 2, se observa que  $m\angle A = 90^\circ$ ,  $a = 5 \text{ cm}$  y  $b = 4 \text{ cm}$ . Para determinar la medida del cateto c, la medida de los ángulos y el área del triángulo, se puede proceder de la siguiente manera.

• Por el teorema de Pitágoras, se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 - 4^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \text{ cm}$$

$$\cos C = \frac{b}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{Por lo tanto, } C = \arccos 0,8 = 36^\circ 52' 12''$$

$$\text{• Dado que, } m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + m\angle C = 90^\circ$$

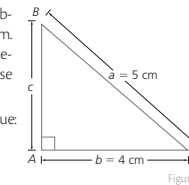


Figura 2

$$\Rightarrow m\angle B = 90^\circ - m\angle C$$

$$\Rightarrow m\angle B = 90^\circ - 36^\circ 52' 12''$$

$$\Rightarrow m\angle B = 53^\circ 7' 48''$$

$$\text{• Finalmente el área es } \frac{bc}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

### 8.1 Teorema de la altura

El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma.

#### Ejemplo 2

Por el teorema de Pitágoras, el triángulo rectángulo BCH de la Figura 3 cumple que:

$$a^2 = m^2 + h^2$$

Por el teorema de la altura se tiene que  $h^2 = m \cdot n$ .

$$\text{Luego, } a^2 = m^2 + m \cdot n = m(m + n) = m \cdot c$$

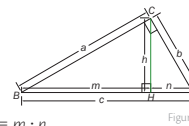


Figura 3

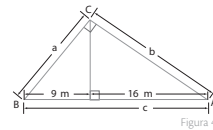
Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar el Teorema de Pitágoras a la resolución de triángulos rectángulos.

**Ejemplo 3**

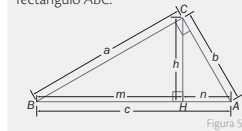
Para calcular la medida del lado  $a$  del triángulo rectángulo de la Figura 4 se aplican el teorema de la altura y el teorema de Pitágoras.

- Por el teorema de la altura:  
 $h^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$  m
- Por el teorema de Pitágoras:  
 $a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 225 \Rightarrow a = 15$  m



**Ten en cuenta**

En la Figura 5, se observa el triángulo rectángulo ABC.



Por el teorema del cateto se cumple que:

$$a^2 = m \cdot c$$

$$b^2 = n \cdot c$$

**8.2 Teorema del cateto**

El cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma.

**Ejemplo 4**

Para resolver el triángulo rectángulo de la Figura 6, en primer lugar se tiene en cuenta que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 18 m y 32 m, respectivamente. Por lo tanto, la medida de la hipotenusa  $c$  es:

$$18 + 32 = 50$$

Además, por el teorema del cateto se cumple que:

$$a^2 = 18 \cdot 50 \Rightarrow a^2 = 900 \Rightarrow a = 30$$

$$b^2 = 32 \cdot 50 \Rightarrow b^2 = 1600 \Rightarrow b = 40$$

Como  $\cos B = \frac{18}{30} = 0,6$ , entonces  $m\angle B = \arccos 0,6 = 53^\circ 7' 49''$ .

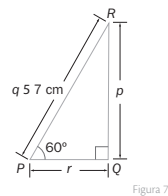
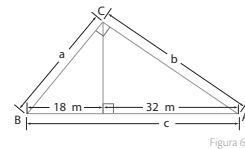
Análogamente:

$$m\angle A = \arccos \frac{32}{40} = 36^\circ 52' 12''$$

Por lo tanto:

$$a = 30 \text{ cm} \quad b = 40 \text{ cm} \quad c = 50 \text{ cm}$$

$$m\angle A = 36^\circ 52' 12'' \quad m\angle B = 53^\circ 7' 49'' \quad m\angle C = 90^\circ$$



**Ejemplo 5**

El triángulo PQR de la Figura 7 es rectángulo con el ángulo recto en Q. Además se observa que  $m\angle P = 60^\circ$ , por lo cual,  $m\angle R = 30^\circ$ .

- Para averiguar la medida del cateto  $p$ , se tiene en cuenta la definición de la razón trigonométrica seno:

$$\text{sen} 60^\circ = \frac{p}{7} \Rightarrow p = 7 \cdot \text{sen} 60^\circ \Rightarrow p = 7 \cdot (0,87)$$

$$\Rightarrow p = 6,09 \text{ cm}$$

- Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$q^2 = p^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = q^2 - p^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 7^2 - (6,09)^2 \Rightarrow r^2 = 49 - 37,0881$$

$$\Rightarrow r^2 = 11,9119 \Rightarrow r = 3,54 \text{ cm}$$

APLICA © EDICIONES SM

Donde la primera proporción a formar es:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}; \text{ o } b^2 = a \cdot m; \text{ h. La segunda proporción a formar es:}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}; \text{ o } c^2 = a \cdot n$$

$$b = \sqrt{a \cdot m}$$

$$c = \sqrt{a \cdot n}$$

Llamadas también media geométrica con respecto al cateto.

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Explique que el teorema de la altura sirve cuando, la altura es perpendicular a la hipotenusa, o sea cuando la hipotenusa es partida en dos pedazos, y calcula directamente la altura.
- Elabore gráficas de triángulos rectángulos con medidas exactas para que se verifique el teorema de la altura.
- Explique que el teorema del cateto sirve cuando, la altura es perpendicular a la hipotenusa, o sea cuando la hipotenusa es partida en dos pedazos, y calcula directamente el cateto.
- Elabore gráficas de triángulos rectángulos con medidas exactas para que se verifique el teorema del cateto.
- Explique que la forma alternativa de la altura sirve para calcular la altura conociendo los catetos y la hipotenusa.

**Actividades colaborativas**

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídale que traigan una copia del plano de su casa o departamento.
- Explique rápidamente la escala que tienen los planos.
- Trabaje en estos planos y pídale aplicar los teoremas de la altura y del cateto, en triángulos que forme en las habitaciones donde duermen o en la sala.

## Ejercitación

2. a.  $30^\circ$ , 6 cm y 10,39 cm
- b.  $50^\circ$ , 10,73 cm y 14 cm
- c.  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  y 15,56 cm
- d.  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  y 17,32 cm
- e.  $52^\circ 33' 41,14''$ ,  $37^\circ 26' 18,86''$  y 80,60 cm
- f.  $48^\circ$ , 24, 22 cm y 16,21 cm

## Razonamiento

3. a. Deben conocerse al menos tres datos, entre ellos un lado.
- b. No.

## Comunicación

4. Aproximadamente 56,92 m

## 8

## Resolución de triángulos rectángulos

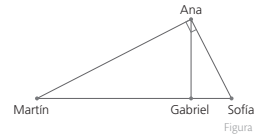


Figura 8

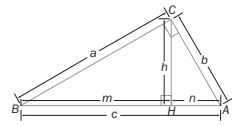


Figura 9

### Actividad resuelta

#### Resolución de problemas

- 1 Las casas de Sofía, Ana, Gabriel y Martín están ubicadas como se muestra en la Figura 8. Si la distancia de la casa de Sofía a la de Martín es de 3 km y la distancia de la casa de Sofía a la de Gabriel es 1,08 km, ¿a cuántos kilómetros corresponden las siguientes distancias?
  - a. De la casa de Gabriel a la de Martín
  - b. De la casa de Sofía a la de Ana
  - c. De la casa de Ana a la de Gabriel

#### Solución:

La situación se puede representar como en la Figura 9. Así:

- a. Distancia de la casa de Gabriel a la de Martín:
 
$$m = c - n = 3 - 1,08 = 1,92 \text{ km}$$
- b. Distancia de la casa de Sofía a la de Ana (por teorema del cateto):
 
$$b^2 = n \cdot c = 1,08 \cdot 3 = 3,24 \Rightarrow b = 1,8$$
- c. Distancia de la casa de Ana a la de Gabriel (por teorema de Pitágoras):
 
$$h^2 = b^2 - n^2 \Rightarrow h^2 = (1,8)^2 - (1,08)^2 \Rightarrow h^2 = 2,0736 \Rightarrow h = 1,44 \text{ km}$$

### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

- 2 Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los triángulos rectángulos de las Figuras 10 a 15.

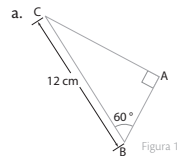


Figura 10

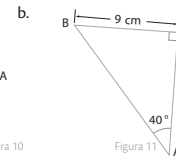


Figura 11

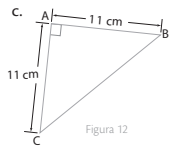


Figura 12

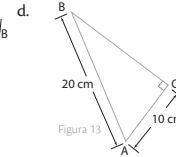


Figura 13

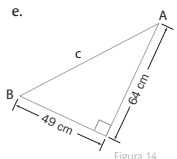


Figura 14

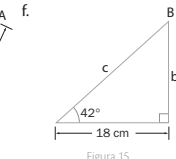


Figura 15

#### Razonamiento

- 3 Responde estas preguntas. Razona tus respuestas.
  - a. ¿Qué elementos de un triángulo rectángulo hay que conocer para resolverlo?
  - b. ¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo dos de sus ángulos? ¿Por qué?

#### Comunicación

- 4 Lee y resuelve.
  - Un **ángulo de depresión** es el que se forma entre la línea horizontal y la línea visual entre un observador y un objeto situado por debajo de la horizontal.

Desde la cima de un faro de 8 m de altura se divisa una lancha con un ángulo de depresión de  $8^\circ$ . Observa cómo se representa la situación en la Figura 16.

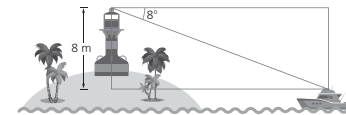


Figura 16

Calcula la distancia entre la lancha y el pie del faro en ese mismo instante.

APLICA © EDICIONES SM

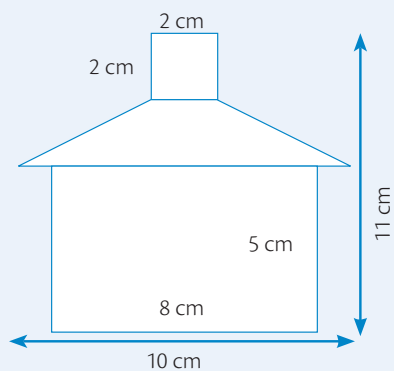


## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que el perímetro es la suma de todos los lados que tiene la figura plana, mientras que el área siempre será una multiplicación.
- Enfatice que cada figura plana tiene su propia fórmula para el cálculo del área.
- Aclare que cuando se trata de polígonos regulares lo primero que debe calcular generalmente es la apotema con teorema de Pitágoras o si conoce el ángulo con razones trigonométricas.
- Recuerde que  $\pi$  es una unidad del sistema circular y es por ello que se recomienda dejar expresada en  $\pi$  al área del círculo.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídale que calculen el perímetro y área de las siguiente figura:

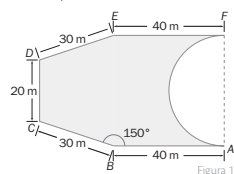


- Trabajen en papelotes y pídale que expongan el proceso utilizado.

## 9 Longitudes y áreas de figuras planas

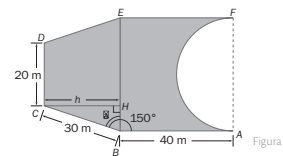
### Explora

En la Figura 1 se muestra el plano de un teatro, en donde el área sombreada corresponde a la zona de silletería.



- Según la información de la figura 1, ¿cuál es el área de la zona en la que se encuentran las sillas?

En la figura se observa que el plano del teatro tiene una forma irregular, por eso para hallar su área se pueden considerar, por separado, las figuras ABEF y BCDE (Figura 2).



- Se traza una altura  $h$  del trapecio isósceles BCDE desde el vértice C (Figura 2). Entonces,  $\triangle BCH$  es un triángulo rectángulo y  $\alpha = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ .

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 25,98 \text{ m y } \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15 \text{ m}$$

Como  $BC = DE$ , se tiene que  $\overline{BE}$  mide  $15 + 20 + 15 = 50 \text{ m}$ .

$$\text{Por lo tanto, } A_{\text{Trapecio}} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{50+20}{2} \cdot 25,98 = 909,3 \text{ m}^2.$$

- El área del rectángulo ABEF es  $40 \cdot 50 = 2000 \text{ m}^2$ .  
Por ser  $AF = BE$ , el radio de la circunferencia que pasa por A y por F mide 25 m.  
Así,  $A_{\text{Círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot 25^2 = 1963,5 \text{ m}^2$ .

- Entonces, el área ocupada por la zona de silletería es:

$$A = 909,3 + 2000 - \frac{1963,5}{2} = 1927,55 \text{ m}^2$$

Además de ayudar en la solución de triángulos rectángulos, las razones trigonométricas proporcionan herramientas para el cálculo de longitudes y áreas de algunas figuras planas.

### Ejemplo 1

Se quiere calcular el área del pentágono regular de lado 8 cm que se muestra en la Figura 3.

- Para hallar la medida de la apotema, se une el centro con dos vértices consecutivos. Los radios  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$  determinan el ángulo central O. Luego:

$$m\angle O = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

La apotema divide el  $\angle AOB$  en dos ángulos congruentes y al  $\overline{AB}$  en dos segmentos congruentes. Así,  $\alpha = 36^\circ$  y  $AM = 4 \text{ cm}$ .

Por ser  $\triangle AMO$  un triángulo rectángulo, se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{AM}{a} \Rightarrow a = \frac{AM}{\tan \alpha}$$

Entonces, la apotema mide  $a = \frac{4}{\tan 36^\circ} = 5,51 \text{ cm}$ .

Por otra parte, si el perímetro del pentágono es  $p = 5 \cdot 8 = 40 \text{ cm}$ ,

su área A se puede calcular como se muestra a continuación:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{40 \cdot 5,51}{2} = 110,2 \text{ cm}^2$$

Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la longitud y el área de figuras planas aplicando razones trigonométricas.

Actividad resuelta

Razonamiento

- Determina la longitud del lado y de la apotema de un octágono regular inscrito en una circunferencia de 49 mm de radio. Halla su área.

**Solución:**  
Según la información proporcionada, el polígono se puede representar como en la Figura 4.

Como el octágono es regular, entonces se deduce que:

$$m\angle POQ = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Dado que la apotema  $a$  divide al  $\angle POQ$  en dos ángulos congruentes y forma un ángulo recto con el lado del octágono, entonces:

$$\angle QOR = 22,5^\circ$$

$$\text{Así, } \sin 22,5^\circ = \frac{PR}{49} \Rightarrow PR = 49 \cdot \sin 22,5^\circ = 18,75 \text{ mm.}$$

Además,  $PQ = 2PR$ , por lo cual, el lado del octágono es:

$$PQ = 2 \cdot 18,75 = 37,5 \text{ mm}$$

Para determinar la apotema, se tiene en cuenta que

$$\cos 22,5^\circ = \frac{a}{49} \Rightarrow a = 49 \cdot \cos 22,5^\circ = 45,27 \text{ mm}$$

Por último, el área del octágono regular es:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{(8 \cdot 37,5) \cdot 45,27}{2} = 6\,790,5 \text{ mm}^2$$

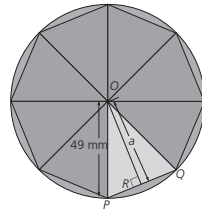


Figura 4

CULTURA del Buen Vivir

La cooperación

Un aspecto importante de la cooperación consiste en ayudar y servir a los demás de manera desinteresada.

- Escribe tres maneras en las que puedes cooperar con un compañero de clase para explicar a alguien los conceptos matemáticos que no entiende.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- Calcula el área y el perímetro de los polígonos que se presentan en las Figuras 5 y 6.
- Halla el perímetro y el área de un rectángulo en el que la diagonal mide 28,84 dm y forma con la base un ángulo de  $33^\circ 41' 24''$ .

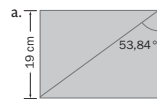


Figura 5

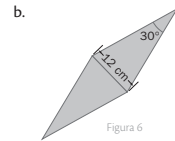


Figura 6

Resolución de problemas

- En la Figura 7 se muestra el plano de un terreno con forma de paralelogramo.
  - ¿Cuál es el área del terreno?
  - Si se quiere cercar el terreno con tres vueltas de alambre, ¿qué cantidad se necesita?

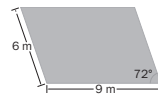


Figura 7

APLICA © EDICIONES SM

Ejercitación

2. a.  $P = 89,98 \text{ cm}$ ;  $A = 493,81 \text{ cm}^2$

b.  $P = 92,72 \text{ cm}$ ;  $A = 268,68 \text{ cm}^2$

Comunicación

3. 15,67 m y 14,48 m aproximadamente.

4.  $A = 237,85 \text{ cm}^2$

5.  $P = 79,98 \text{ dm}$ ;  $A = 383,88 \text{ dm}^2$ .

Resolución de problemas

6. a.  $A = 51,3 \text{ m}^2$ .      b. 90 m

## Ampliación conceptual

Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras paralelas e iguales llamadas bases y sus caras laterales son paralelogramos.

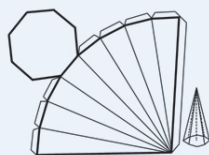
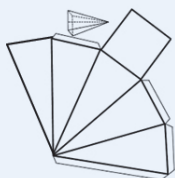
Una **pirámide** es un poliedro, que no es sino un conjunto formado por un polígono (llamado base) y triángulos que tienen su base en cada lado poligonal; todos los triángulos tienen un vértice común llamado vértice de la pirámide. Los triángulos se llaman caras laterales.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Indique las características que tiene un poliedro.
- Elabore una tabla para que explique si es un sólido, poliedro, formas de caras laterales, aristas laterales, análisis del vértice, y calcula según el número de lados, caras, vértices y arista para concluir si es un prisma o pirámide.
- Describe las propiedades que tiene el prisma y la pirámide regulares.
- Calcule el área de la base, lateral, total y volumen de prismas y pirámides regulares.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes, aplicando propiedades de pirámides identifiquen y describan cuál de las siguientes figuras planas forma una pirámide.



## 10 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

### Explora

En una fábrica de chocolates se empaacan los nuevos productos en cajas cuya forma es un prisma trapezoidal, como se ve en la Figura 1.

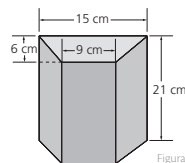


Figura 1

- Si se empaacan chocolates de  $7 \text{ cm}^3$  de volumen, ¿cuántas unidades caben en la caja?

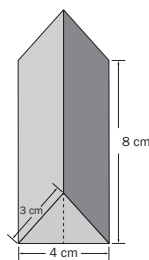


Figura 2

### 10.1 Área y volumen de prismas

Para resolver el problema es importante recordar que un **prisma** es un sólido conformado por dos polígonos paralelos congruentes, que se denominan bases, y por tantos paralelogramos como lados tengan las bases.

Además, es necesario saber que el volumen de un sólido es la medida del espacio que ocupa, pero, también, la medida de la cantidad de material que puede albergar.

Como se observa en la Figura 1, las bases de las cajas son trapecios, por lo tanto:

$$A_{\text{Trapezoido}} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{15 + 9}{2} \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

El volumen del prisma es  $V = A_{\text{Trapezoido}} \cdot h \Rightarrow V = 72 \text{ cm}^2 \cdot 21 \text{ cm} = 1512 \text{ cm}^3$ .

Ahora, como cada chocolate tiene un volumen de  $7 \text{ cm}^3$ , entonces en la caja caben

$$1512 \div 7 = 216 \text{ chocolates.}$$

El **área total** de un prisma es la suma entre el área lateral y el área de las dos bases.

El **volumen** corresponde al producto del área de la base por la altura.

Si en un prisma,  $P_b$  es el perímetro de la base;  $A_b$  el área de la base, y  $h$ , la altura, entonces el área total,  $A_T$ , y el volumen,  $V$ , son respectivamente:

$$A_T = P_b h + 2A_b \quad V = A_b h$$

#### Ejemplo 1

Para calcular el área total y el volumen del prisma triangular de la Figura 2, cuya base es un triángulo isósceles, se realiza lo siguiente:

- Se calcula la altura,  $h$ , del triángulo isósceles de la base:

$$h = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

- Se calcula el perímetro de la base,  $P_b$ :

$$P_b = 10 \text{ cm}$$

- Se calcula el área de la base,  $A_b$ :

$$A_b = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

- Por lo tanto, el área total  $A_T$  es:

$$A_T = 10 \cdot 8 + 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4(20 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$$

- Así, el volumen,  $V$ , es  $V = 2\sqrt{5} \cdot 8 = 16\sqrt{5} \text{ cm}^3$ .

### 10.2 Área y volumen de pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base, que es un polígono cualquiera, y por caras, que son triángulos coincidentes en un vértice común.

El **área total** de una pirámide es la suma del área de las caras laterales y el área de la base. El **volumen** de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura.

Si en una pirámide,  $A_l$  es el área lateral;  $A_b$  el área de la base, y  $h$ , la altura, entonces el área total,  $A_T$ , y el volumen,  $V$ , son respectivamente:

$$A_T = A_l + A_b \quad V = \frac{A_b h}{3}$$

Bloque de Geometría y medida

**Destreza con criterios de desempeño:** Calcular el volumen de pirámides, prismas, y cilindros aplicando las fórmulas respectivas.

**Ejemplo 2**

El área total y el volumen de la pirámide cuadrangular de la Figura 3, cuya altura es 7,23 cm, se calculan así:

$$A_T = 4 \cdot \frac{4 \cdot 7,5}{2} + 16 = 76 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{16 \cdot 7,23}{3} = 38,56 \text{ cm}^3$$

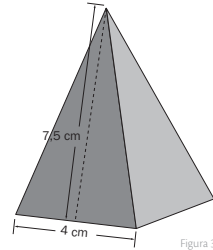


Figura 3

**Razonamiento matemático**

La base de una pirámide es un triángulo equilátero de lado  $x$ . Una de las caras laterales, perpendicular al plano de la base, es también un triángulo equilátero.

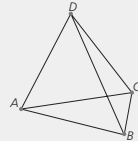


Figura 4

• ¿Cuáles son el área total y el volumen de la pirámide?

**10.3 Área y volumen de cilindros**

Un cilindro es un sólido limitado por dos bases circulares y una cara curva. Se obtiene cuando un rectángulo rota una vuelta entera alrededor de uno de sus lados. En la Figura 5, se observa un cilindro de altura  $h$ , cuyo radio de la base es  $r$ . El **área total** de un cilindro recto es la suma del área lateral y el área de las dos bases. El **volumen** corresponde al producto del área de la base por la altura.

Si  $A_l$  es el área lateral de un cilindro recto,  $A_b$  es el área de la base,  $h$  es la altura y  $r$  es el radio de la base, entonces el **área total**,  $A_T$ , y el **volumen**,  $V$ , se calculan respectivamente como:

$$A_T = A_l + 2A_b \qquad V = A_b h$$

$$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \qquad V = \pi r^2 h$$

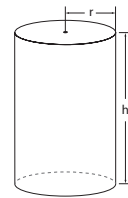


Figura 5

**Ejemplo 3**

En el cilindro recto de la Figura 6, la altura es de 10 cm y el radio de base, de 3 cm. Para calcular el área total y el volumen de este sólido, se aplican las fórmulas estudiadas anteriormente, como sigue:

$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

$$= 2\pi \cdot 3 \text{ cm} \cdot (10 \text{ cm} + 3 \text{ cm})$$

$$= 6\pi \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm}$$

$$= 78\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$= \pi \cdot 9 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$= 90\pi \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, el cilindro tiene  $78\pi \text{ cm}^2$  de área total y  $90\pi \text{ cm}^3$  de volumen.

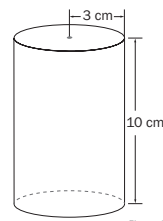


Figura 6

APLICA EDICIONES SM

APLICA © EDICIONES SM

**Ampliación conceptual**

En geometría, un **cilindro** es una superficie de las denominadas cuádricas formada por el desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana, denominada directriz del cilindro,

La superficie de un **cilindro circular recto** está conformada por el área de la base, puesto que tiene dos bases, el área total de las bases es:  $A_b = 2\pi r^2$ . Además, el área lateral está formada por un rectángulo de altura "h" y de largo del perímetro del círculo  $l = 2\pi r$  por lo que el área lateral es:  $A_l = 2\pi r h$ . Por lo tanto, el área total, o área de la superficie cilíndrica es:

$$A = A_b + A_l$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A = 2\pi (r^2 + r h)$$

$$A = 2\pi r (r + h)$$

El **volumen de un cilindro** es el producto del área de la base "A<sub>b</sub>" por la altura del cilindro "h". Por lo tanto, el volumen de un cilindro de base circular, es:

$$V = \pi r^2 h$$

En geometría, un **cono recto** es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina base y al punto donde confluyen las generatrices se llama vértice o cúspide.

El área A de la superficie del cono recto es:

$$A = A_b + A_l$$

$$A = \pi r^2 + \pi r g$$

$$A = \pi (r^2 + r g)$$

Donde r es el radio de la base y g la longitud de la generatriz del cono recto. La generatriz de un cono recto del triángulo rectángulo que conforma con la altura del cono y el radio de la base es:  $g = \sqrt{h^2 + r^2}$

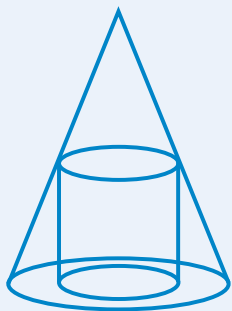
El desarrollo plano de un cono recto es un sector circular y un círculo. El sector circular está delimitado por dos generatrices, siendo la medida del lado curvo igual a la longitud de la circunferencia de la base.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Describe las propiedades que tiene el cilindro y el cono recto.
- Calcule el área de la base, lateral, total y volumen de cilindro y conos rectos.
- Explique porque el volumen es un tercio del volumen sea este prisma o cilindro.

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídale que traigan materiales para construir cilindros y conos rectos.
- Trabaje en estos materiales y pídale calcular el área total y volumen.
- A los mismos grupos pídale solucionar la siguiente situación: Se inscribe un cilindro circular recto dentro de un cono circular recto de radio 6 cm y altura 12 cm, como se muestra en la figura.



Si la altura del cilindro es el doble de un radio, calcule el volumen dentro del cono y fuera del cilindro.

## 10 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

### 10.4 Área y volumen de conos

Un **cono**, como el de la Figura 7, es un sólido limitado por una base circular y una cara curva, se obtiene al rotar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El **área total del cono** es la suma del área lateral con el área de la base. El **volumen del cono** es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura.

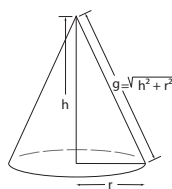


Figura 7

Si  $A_l$  es el área lateral de un cono de altura  $h$ ,  $A_b$  es el área de la base de radio  $r$  y  $g$  la generatriz, entonces el área total  $A_T$  y el volumen  $V$  del cono son respectivamente:

$$A_T = A_l + A_b \quad V = \frac{A_b h}{3}$$

$$A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r) \quad V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

#### Ejemplo 4

Para determinar el área total y el volumen de un cono de altura 12 cm, y cuyo diámetro de la base mide 5 cm, es necesario, en primer lugar, calcular la generatriz  $g$  del cono.

- Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + (2,5)^2} = 12,26 \text{ cm}$$

- Por lo tanto:

$$A_T = \pi \cdot 2,5 \cdot (12,26 + 2,5) = 36,9\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot (2,5)^2 \cdot 12}{3} = 25\pi \text{ cm}^3$$

#### Actividad resuelta

##### Razonamiento

- Determina el área total y el volumen del sólido representado en la Figura 8, si se sabe que el radio de la base es 2 cm.

##### Solución:

Se observa que la figura está compuesta por un cilindro y un cono. Por lo tanto, para determinar el área total, se suman el área lateral del cono, el área lateral del cilindro y el área de una de sus bases.

Por el teorema de Pitágoras, la generatriz del cono que está dada por:

$$g = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

De modo que:

$$A_T = \underbrace{(\pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2)}_{A_l \text{ Cono}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6}_{A_l \text{ Cilindro}} + \underbrace{\pi \cdot 2^2}_{A_b}$$

$$= 4\pi(7 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$$

El volumen del sólido es la suma de los volúmenes del cono y del cilindro:

$$V_{\text{Sólido}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} + \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = \frac{88\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el volumen de pirámides, prismas, conos y cilindros aplicando las fórmulas respectivas.

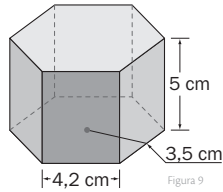
Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

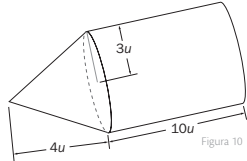
2. Halla el área total y el volumen del siguiente sólido.
- Un prisma de 47 mm de altura con base hexagonal regular de lado 20 mm

Comunicación

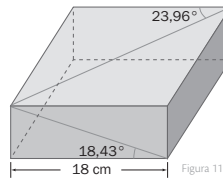
3. Calcula el área total y el volumen del prisma de la Figura 9, si se sabe que su base es un hexágono regular.



4. Halla el área total y el volumen de un cilindro de altura 4 dm, si se sabe que el radio de la base mide 1 dm.
5. Determina el volumen del sólido de la Figura 10.

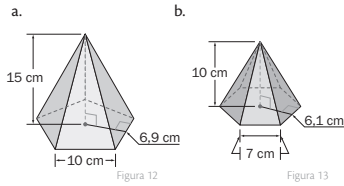


6. Halla el área total y el volumen del ortoedro presentado en la Figura 11.



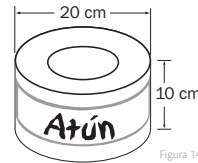
Resolución de problemas

7. ¿Cuál es el espacio ocupado por las pirámides de las Figuras 12 y 13, si sus bases son polígonos regulares?

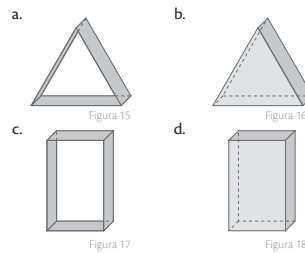


8. ¿Que cantidad de cartón se necesita para fabricar un empaque de 9,5 cm de largo, 2 cm de ancho y 3 cm de profundidad?

9. ¿Cuánto metal se requiere para fabricar una lata cilíndrica como la de la Figura 14?



10. Para cada una de las Figuras 15 a 18, asignales medidas e inventa un problema donde se pida calcular el área total y el volumen de cada una de ellas.



Ejercitación

2. a.  $A = 7718,4 \text{ mm}^2$ ;  $V = 48842 \text{ mm}^3$

Comunicación

3.  $A = 214,2 \text{ cm}^2$ ;  $V = 220,5 \text{ cm}^3$

4.  $A = 10\pi \text{ dm}^2$ ;  $V = 4\pi \text{ dm}^3$

5.  $V = 102\pi u^3$

6.  $A = 600 \text{ cm}^2$ ;  $V = 864 \text{ cm}^3$

Resolución de problemas

7. a.  $862,5 \text{ cm}^3$

b.  $427 \text{ cm}^3$

8.  $107 \text{ cm}^2$

9.  $400\pi \text{ cm}^2$

10. Respuesta abierta

## Ampliación conceptual

En geometría, la esfera es una superficie esférica o es una superficie de revolución formada por el conjunto de los puntos del espacio (de tres dimensiones) cuyos puntos equidistan de otro punto llamado centro. Los puntos cuya distancia es menor que la longitud del radio forman el interior de la superficie esférica. La unión del interior y la superficie esférica se llama bola cerrada, o como la esfera, en la geometría elemental del espacio. La esfera es un sólido geométrico.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Describe las propiedades que tiene la esfera.
- Explique que para calcular el área y el volumen de cuerpos compuestos se deben separar en cuerpos simples o ya conocidos.
- Realice el cálculo de áreas y volumen de varios cuerpos compuestos

## Actividades colaborativas

- Forme grupos de 4 o 5 estudiantes y pídale que traigan los siguientes materiales: un metro, una pelota plástica desinflada y una bomba para inflar.
- Con el metro pida medir el diámetro, a continuación infle la pelota y solicite el área de la pelota y su volumen.
- A los mismos grupos pídale calcular el área total y volumen de figuras similares:
- Puede variar los datos para cada grupo.

## 11 Áreas y volúmenes de cuerpos compuestos

### Explora

La torre principal de una capilla finaliza con un sólido geométrico como el que se muestra en la figura 1.

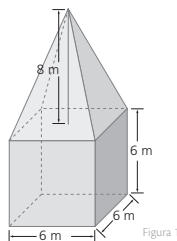


Figura 1

• ¿Qué proceso seguirías para poder calcular el área total de la torre?

La torre corresponde a un cuerpo geométrico compuesto, formado por un cubo y una pirámide cuadrangular. Luego, una manera de calcular el volumen total es calcular los volúmenes parciales de los sólidos y sumar los resultados.

Para calcular el área y el volumen de un cuerpo compuesto, se deben descomponer en cuerpos simples, calcular los volúmenes o áreas parciales, y sumarlos.

### Ejemplo 1

Calcula el área y el volumen del cuerpo de la figura 1. Para ello, se descompone el sólido en las formas simples.

Ten en cuenta que la superficie del cuerpo compuesto está formada por cinco caras del cubo y por las cuatro caras laterales de la pirámide cuadrangular.

Entonces para calcular el área se procede así:

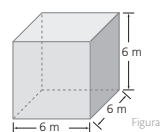


Figura 2

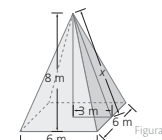


Figura 3

$$A_1 = 5 \cdot 6^2 = 180 \text{ cm}^2$$

$$x = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8,54 \text{ cm}$$

$$A_2 = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8,54}{2} \approx 102,48 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área del cuerpo es la suma de las dos áreas.

$$A = A_1 + A_2 = 180 + 102,48 = 282,48 \text{ cm}^2$$

Ahora, se calcula el volumen total de la torre.

$$V_{\text{cubo}} = A_{\text{base}} \cdot h = (6 \cdot 6) \cdot 6 = 216 \text{ m}^3 \quad V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (6 \cdot 6) \cdot 8 = 96 \text{ m}^3$$

Entonces, el volumen total es  $216 \text{ m}^3 + 96 \text{ m}^3 = 312 \text{ m}^3$

### Actividad resuelta

#### Ejercitación

1 Calcula el volumen del cuerpo de la figura 4.

#### Solución

El volumen de este cuerpo está compuesto por el volumen de una semiesfera y el volumen de un cono.

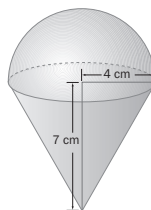


Figura 4

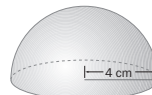


Figura 5

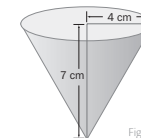


Figura 6

$$V_1 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = 134 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 7}{3} = 117,2 \text{ cm}^3$$

Por tanto, el volumen del cuerpo es la suma de los dos volúmenes.

$$V = V_1 + V_2 = 134 + 117,2 = 251,2 \text{ cm}^3$$

Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Resolver problemas que impliquen el cálculo de volúmenes de cuerpos compuestos (usando la descomposición de cuerpos).

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

- 2 Determina el área total y el volumen del cuerpo de la figura 7. Explica el procedimiento que seguiste.

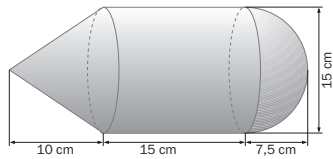


Figura 7

- 5 Halla el volumen de los siguientes cuerpos compuestos.  
• Ten en cuenta que las medidas se dan en centímetros.

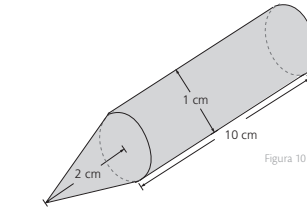


Figura 10

Comunicación

- 3 En la caja de la figura 8, se quieren guardar dos esferas macizas de 10 cm de radio. Calcula el volumen que ocupa el aire que queda en la caja. Escribe un paso a paso claro que le permita a otra persona encontrar el cálculo de este valor.

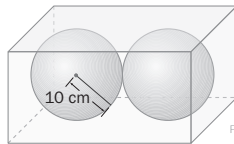


Figura 8

b.

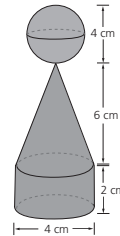


Figura 11

- 4 Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo compuesto donde las medidas están en metros.

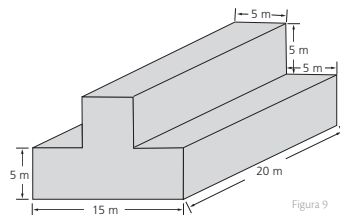


Figura 9

Resolución de problemas

- 6 En una fábrica elaboran una tuerca de forma hexagonal de 2 cm de lado y una altura de 2 cm. Además, se sabe que el cilindro central tiene un diámetro de 0,5 cm. ¿Cuál es el volumen que ocupa esta tuerca?

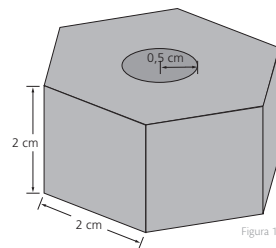


Figura 12

Razonamiento

2.  $A = 1884,96 \text{ cm}^2$ ;  $V = 4121,26 \text{ cm}^3$

Comunicación

3.  $7\,626,7 \text{ cm}^3$

4.  $A = 1\,200 \text{ m}^2$ ;  $V = 2\,000 \text{ m}^3$

5. a.  $8,38 \text{ cm}^3$                       b.  $83,88 \text{ cm}^3$

Resolución de problemas

6.  $19,19 \text{ cm}^3$

UNIDAD  
**5**

# Evaluación sumativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Realice la conversión que corresponda:

A. 30°

B. 45°

C. 60°

2. Complete la tabla de las razones trigonométricas:

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Sen			
Cos			
Tan			

3. Relacione las cofunciones entre las razones trigonométricas 1 y 2:

	Razón trigonométrica 1
1	Sen(30)
2	Cos(37)
3	Tan(45)
4	Sen(25)

	Razón trigonométrica 2
A	Sen(53)
B	Cos(65)
C	Cos(60)
D	Ctg(45)

4. Para medir la anchura de un río se han medido dos ángulos el primero en el punto A que mide 67, 38° y el segundo en el punto B que mide 47,48° los dos están en la una orilla del río que en línea recta están distantes 160 m, y forman un triángulo con un punto C que está en la otra orilla. Calcule el ancho que tiene el río.

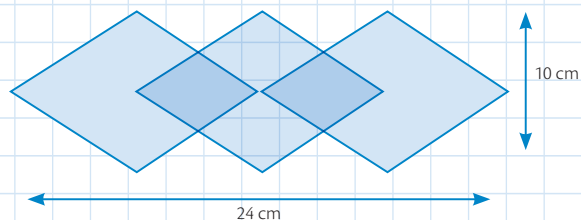
5. Si el  $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$  y  $\alpha$  es el ángulo agudo, calcule  $\cos(180^\circ - \alpha)$

6. Determine las soluciones de la ecuación trigonométrica  $\sin^2(x) - \cos^2(x) = \frac{1}{2}$   
Para solucionar la ecuación puede emplear la identidad trigonométrica  $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ .

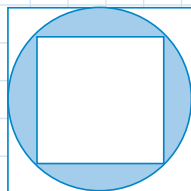
7. Calcule el área de un pentágono regular que mide de radio 4cm.

8. Calcule el área de un pentágono regular que mide de lado 25,2 cm.

9. Calcule el área total de los mosaicos que se muestran a continuación:



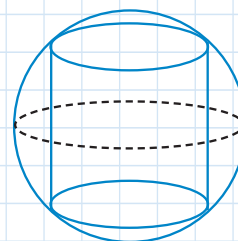
10. Calcule el área de la región pintada de la siguiente figura sabiendo que el cuadrado exterior mide de lado 7 cm.



11. La arista lateral de un prisma regular mide 16 cm, si la base del hexágono regular mide de lado 11,76 cm. Calcule el área total y el volumen del prisma.

12. La arista lateral de una pirámide regular mide 8 cm, si la base del hexágono regular mide de lado 4 cm. Calcule el área lateral y el volumen de la pirámide.

13. Se inscribe un cilindro circular recto dentro de una esfera de radio 8 cm, como se muestra en la figura.



Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Es una Variable Cualitativa Ordinal:

- A. Sexo (M, F).
- B. N° de muelas cariadas.
- C. Temperatura corporal.
- D. Bebe (no, poco, mucho).

2. Es una Variable Cuantitativa Continua:

- A. Sexo (M, F).
- B. N° de muelas cariadas.
- C. Temperatura corporal.
- D. Raza (blanca, negra, amarilla).

3. Es una Variable Cualitativa Dicotómica:

- A. Sexo (M, F).
- B. Bebe (no, poco, mucho).
- C. Temperatura corporal.
- D. Raza (blanca, negra, amarilla).

4. Es una Variable Cuantitativa Discreta:

- A. Sexo (M, F).
- B. N° de muelas cariadas.
- C. Temperatura corporal.
- D. Raza (blanca, negra, amarilla).

5. El histograma se usa para representar variables:

- A. Cualitativas.
- B. Cuantitativas Discretas.
- C. Cuantitativas continuas.
- D. Cualitativas continuas.

6. El Diagrama de Barras se usa para representar variables:

- A. Cualitativas.      B. Cuantitativas discretas.
- C. Cualquiera.      D. Cualitativas continuas.

7. Es una medida de centralización:

- A. Rango.      B. Varianza.
- C. Mediana.      D. Desviación Estándar.

8. Es un índice de dispersión:

- A. Media Aritmética.      B. Moda.
- C. Desviación Estándar.      D. Mediana.

9. La mediana es una medida de tendencia central que se usa cuando:

- A. Los datos son impares.
- B. La muestra es asimétrica.
- C. La muestra es heterogénea.
- D. La muestra es simétrica.

10. Una de las siguientes distribuciones de probabilidad corresponde a una Variable aleatoria continua:

- A. Poisson.      B. Normal.
- C. Binomial.      D. Geométrica.

11.Cuál de las siguientes Distribuciones de probabilidad no corresponde a una Variable Aleatoria Discreta.

- A. Poisson.      B. T. de Student.
- C. Binomial.      D. Geométrica.

# Propósito de la unidad

## Bloque de estadística y probabilidad.

La finalidad de esta unidad es, que el estudiante utilice apropiadamente los términos población y muestra, identifiquen plenamente los elementos de estadística descriptiva y estadística inductiva para lo cual se ampliarán los conocimientos relacionados con frecuencia absoluta y frecuencia relativa de un evento determinado, así como también el estudiante tendrá la capacidad de interpretar objetivamente un diagrama de barras previamente elaborado, de la misma manera que después de la elaboración del diagrama de barras el estudiante pueda presentar un análisis adecuado y pertinente del mismo. Se analizarán tem--as de medidas de tendencia central y medidas de dispersión evidenciando lo que realiza la estadística como rama de las matemáticas aplicadas, sin embargo, el conjunto de técnicas que tienen aplicación en las más diversas disciplinas las relacionaremos a través de ejemplos y ejercicios con variedad de problemas. Al aplicar métodos de conteo (permutaciones sin repetición) en el cálculo de probabilidades y calcular el factorial de un número natural en el cálculo de probabilidades estaremos desarrollando una importante destreza con criterio de desempeño propuesta en el currículo nacional.

Para finalizar se revisará la teoría de Combinatoria, parte importante de las Matemáticas que estudia las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto, formándolas y calculando su número. A través de ejemplos y problemas se analizarán las formas de realizar estas agrupaciones, según se repitan los elementos o no, según se puedan tomar todos los elementos de que disponemos o

no y si influye o no el orden de colocación de los elementos. El desarrollo de la combinatoria está fuertemente ligado con su aplicación en la teoría de la probabilidad, pero también es importante en otras ciencias como la informática, por ejemplo en la teoría de la codificación y en el análisis de algoritmos.

## Evaluaciones

### Diagnóstica

Esta evaluación busca demostrar si los estudiantes están en condiciones de comenzar a estudiar un determinado tema o unidad, la situación personal del estudiante en una determinada etapa del curso, ya sea familiar, física o incluso emocional. Y lo más importante, muestra en qué nivel los estudiantes lograron los objetivos y logros propuestos. La evaluación diagnóstica es una evaluación de carácter formativo.

### Formativa

Esta evaluación tiene como objetivo mostrar al docente y al estudiante qué progresos tuvo este último. También, señalar qué fracasos hubo durante los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje y, por último, analizar las conductas del estudiante a lo largo del proceso de aprendizaje, además ver hasta qué punto fueron alcanzados los objetivos y logros, esta se presenta a la mitad de la unidad.

### Sumativa

En esta evaluación se valoran los comportamientos finales de los estudiantes apuntando el final de un

determinado proceso, permiten verificar si se han alcanzado o no las metas propuestas y hacer una reseña de los contenidos tratados a lo largo de un curso o unidad. Finalmente, sirven para integrar en un juicio de valor todo aquello que se ha dicho sobre un estudiante a lo largo del curso o unidad, es el resultado de todos los datos disponibles, ya sean pruebas, lecciones, tareas, observaciones, etc. Como conclusión es importante anotar que la única diferencia entre una evaluación de carácter formativo y una evaluación de carácter sumativo es el propósito. En este sentido, la evaluación sumativa siempre será cuantitativa; mientras que la formativa, puede ser cuantitativa o cualitativa.

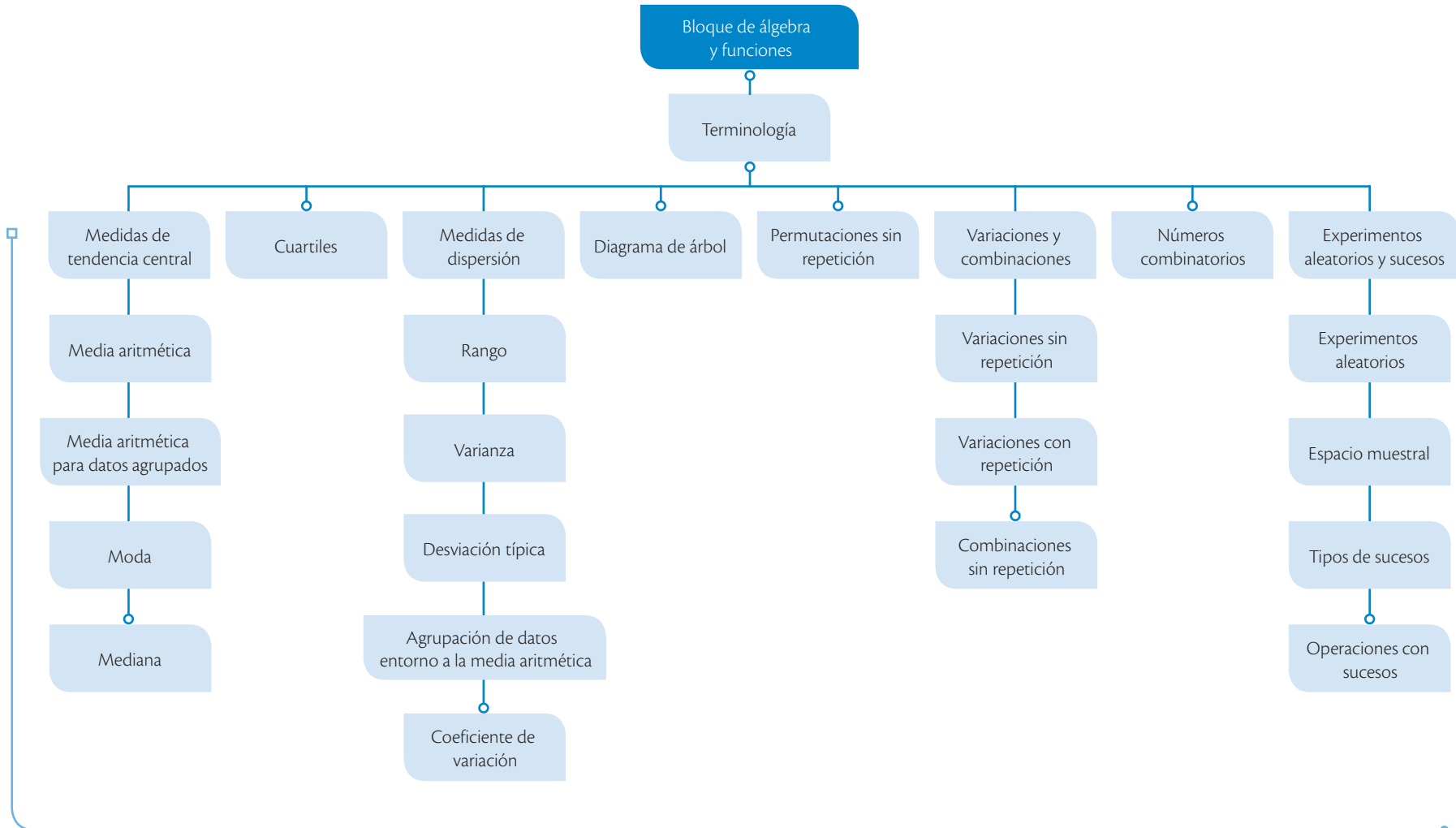
## Respuestas

### Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	
A	A	A	A	A	
B	B	B	B	B	
C	C	C	C	C	
D	D	D	D	D	
6	7	8	9	10	11
A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D

# Esquema conceptual

## Conocimientos de la unidad



## Cultura del Buen Vivir

### ■ Valor: La equidad

Entre las características de la equidad se encuentran la justicia y la igualdad de oportunidades para todos los seres humanos, más allá de su género o su condición social.

### ■ Compromiso a lograr

La equidad es la cualidad que mueve a dar a cada uno lo que merece sin exceder o disminuir. Es tratar a todas las personas por igual, respetando y teniendo en cuenta sus diferencias. En nuestra vida práctica y cotidiana podemos verlo y aplicarlo, como por ejemplo:

- Cuando hombres y mujeres reciben las mismas oportunidades para trabajo, estudios.
- Cuando no hay discriminación entre hombres blancos y negros.
- Cuando la ley protege sin que importe la religión.
- Cuando tanto el hombre y la mujer ayudan a las tareas de la casa.

Las empresas por lo regular pagan un mayor sueldo a los empleados que son graduados de las universidades, tratando de ser equitativo con el esfuerzo intelectual que han hecho por su desarrollo y el desarrollo empresarial y social.

Por lo tanto, estamos obligados a plantearnos los objetivos que debemos conseguir para avanzar hacia una sociedad más justa y equitativa en la que los seres humanos tengan igualdad en derechos y oportunidades.

# Planificación microcurricular

## Planificación de la unidad didáctica

### Unidad 2:

Objetivos generales del área	Objetivos del área por subnivel
OG.M.2 – OG.M.3. – OG.M.4. – OG.M.5 – OG.M.5	O.M.4.7.
Objetivos de subnivel	Valores
OI.4.5. – OI.4.8.	La equidad I.2 – I.4 – S.4
Criterios de evaluación	Indicadores de evaluación
CE.M.4.8.	I.M.4.8.1. – I.M.4.8.2.

### Objetivos de la unidad

- 1. Deducir las características de una población objetivo mediante la organización, el análisis e interpretación de datos para la toma de decisiones.
- 2. Desarrollar modelos teóricos para dar una guía de acción en situaciones prácticas que envuelven incertidumbre.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
Estadística y probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.</li> <li>• Definir niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón.</li> <li>• Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas.</li> <li>• Determinar las medidas de posición: cuartiles y percentiles para resolver problemas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Organizar con los estudiantes pequeñas investigaciones para recolectar datos sobre mediciones de longitudes y tiempos, el consumo de luz, de agua, de teléfono, pagos mensuales de tarjetas de crédito, etc.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza información cuantificable del contexto social, utiliza variables, calcula e interpreta medidas de tendencia central (media, mediana y moda), de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) y de posición (cuartiles) analiza críticamente información a través de tablas o gráficos, resuelve problemas en forma individual.</li> </ul>	

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación:
<p><b>Estadística y probabilidad</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calcular e interpretar las medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación típica) de un conjunto de datos en la solución de problemas.</li> <li>• Elaborar diagramas de árbol de un conjunto de datos para la solución de problemas.</li> <li>• Aplicar métodos de conteo (permutaciones sin repetición) en el cálculo de probabilidades.</li> <li>• Aplicar métodos de conteo (variaciones, combinaciones) en el cálculo de probabilidades.</li> <li>• Calcular el factorial de un número natural y el coeficiente binomial en el cálculo de probabilidades.</li> <li>• Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guiar la construcción de la tabla de frecuencias.</li> <li>• Guiar en cálculo de medidas de tendencia central, de posición, de dispersión.</li> <li>• Analizar e interpretar medidas de tendencia central, de posición, de dispersión.</li> <li>• Realizar otros ejercicios similares.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calcula probabilidades de eventos aleatorios empleando combinaciones y permutaciones y el cálculo del factorial de un número</li> </ul>	<p><b>Actividad</b> colaborativas y talleres propuestos en el libro de trabajo. / Tabla de cotejo.</p> <p><b>Técnica:</b> Investigación</p> <p><b>Instrumento:</b> Fichas de observación, Registro de datos, Facturas mensuales de servicios básicos y otros. Libro del estudiante en páginas Practica + con ejercicios.</p>

**Recursos:**

Texto guía, cuaderno de trabajo, materiales elaborados por el docente, medios visuales y material concreto.

**Bibliografía:**

SWOKOWSKI – COLE, Algebra, editorial THOMSSON LEARNING, México D.F. 2011

GALINDO Edwin, Matemáticas Superiores, Prociencia Editores, Ecuador 2010 - BARNETT Raymond, URIBE Julio, Algebra y Geometría, Tomo I y II, Editorial McGRAW-Hill, Bogotá 1994

## Ampliación conceptual

**Estadística:** Es la ciencia que tiene por objeto el estudio de los métodos y procedimientos para recoger datos, clasificarlos, analizarlos, tomar decisiones y sacar conclusiones científicas a partir de dichos datos.

**Población estadística:** Conjunto de todos los elementos que cumplen una determinada característica. Los elementos de la población se llaman individuos o unidades estadísticas.

**Muestra:** Cualquier subconjunto de la población.

**Caracteres estadísticos:** Es una propiedad que permite clasificar a los individuos de una población.

**Caracteres estadísticos cuantitativos:** Son aquellos que se pueden medir.

**Variable estadística:** Se llama al conjunto de valores que puede tomar un carácter estadístico cuantitativo.

**Variable estadística discreta:** Una variable es discreta cuando puede tomar un número finito de valores o infinito numerable.

**Variable estadística continua:** Una variable es continua cuando puede tomar todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Seleccione artículos de periódico o revista donde se traten temas de análisis estadístico y que incluyan la terminología apropiada.
- Haga que los estudiantes lean y seleccionen las palabras nuevas.
- Solicite investigar el significado de las palabras nuevas y proponer oraciones con esas palabras.

## 1 Terminología estadística

### Explora

Se quiere hacer un estudio estadístico encuestando a los 240 estudiantes de décimo grado de un colegio. Para ello, se les preguntó a 40 estudiantes al azar lo siguiente:



- País de origen
  - Número de hermanos
  - Distancia, en kilómetros, de su casa al colegio
- Identifica los elementos estadísticos que intervienen en este estudio.

### Ten en cuenta

La medición de las variables puede realizarse por medio de cuatro escalas de medición. Dos de las escalas miden variables categóricas y las otras dos miden variables numéricas (Therese L. Baker, 1997). Los niveles de medición son las **escalas nominal, ordinal, de intervalo y de razón**. Se utilizan para ayudar en la clasificación de las variables, el diseño de las preguntas para medir variables, e incluso indican el tipo de análisis estadístico apropiado para el tratamiento de los datos.

### Ten en cuenta

En un estudio estadístico, los elementos o individuos de la muestra deben elegirse de forma **aleatoria**, es decir:

- Deben tener la misma probabilidad de ser elegidos.
- Cada tipo de elementos debe estar presente en la muestra y en la población en la misma proporción; por ejemplo, el número de hombres y de mujeres.

De acuerdo con los datos del Explora, los 240 estudiantes de décimo constituyen la **población estadística**, los 40 estudiantes elegidos para realizar la encuesta forman un subconjunto de la población que se denomina **muestra** estadística y los aspectos *país de origen, número de hermanos y distancia, en kilómetros, de su casa al colegio* corresponden a los **caracteres** o a las **variables estadísticas** estudiadas.

- El país de origen es una **variable estadística cualitativa** por ser una cualidad no medible que permite clasificar a los individuos.
- El número de hermanos es una **variable estadística cuantitativa**, ya que se trata de una magnitud medible.
- La distancia, en kilómetros, de su casa al colegio es una **variable estadística continua**, ya que puede tomar todos los valores posibles en un intervalo.

Una **variable estadística** es el conjunto de valores que toma un carácter estadístico cuantitativo. Puede ser de dos tipos:

- Discreta**, cuando toma solamente valores aislados que se expresan mediante números naturales.
- Continua**, cuando toma todos los valores posibles de un intervalo.

### Ejemplo 1

En otro estudio, se analizan en la población de estudiantes del colegio: la estatura, la edad, el deporte que practica, la comida favorita, la cantidad de años en la institución, el peso y la profesión de los padres. Estos caracteres estadísticos pueden clasificarse como en la Tabla 1.

<b>Caracteres cualitativos</b>	deporte que practica, comida favorita y profesión de los padres
<b>Caracteres cuantitativos</b>	estatura, edad en años, cantidad de años en la institución y el peso

Tabla 1

La edad en años puede tomar, por ejemplo, los valores 12, 13, 14, etc. Como esta variable estadística solo puede tomar valores aislados que se expresan mediante números naturales, es una variable estadística discreta.

La estatura toma, por ejemplo, valores como: 1,28 cm, 1,56 cm, 1,36 cm, etc. Como esta variable puede tomar todos los valores de un intervalo, es una variable estadística continua.

### Actividad resuelta

Razonamiento

- Clasifica los siguientes caracteres estadísticos.
  - Número de personas que trabajan para defender los derechos humanos.
  - Actividad a la que dedican el tiempo libre los jóvenes de 14 a 16 años.
  - Volumen de agua contenida en los embalses de una provincia del país.

#### Solución:

- Variable estadística discreta
- Carácter estadístico cualitativo
- Variable estadística continua

Bloque de Estadística y probabilidad

**Destreza con criterios de desempeño:** Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.  
Definir niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

- 2 Indica si las siguientes variables son cualitativas o cuantitativas. Clasifica las variables cuantitativas según sean discretas o continuas.
- Número de faltas de asistencia de los estudiantes de décimo en un mes.
  - Número de horas de productividad entre los trabajadores de una oficina.
  - Número de celulares que tienen los miembros de las familias de un edificio.
  - El color de pelo de los niños que se presentan a una audición musical.
  - El número de señales de pare que hay en poblaciones con menos de quinientos habitantes.
  - La cantidad de tornillos defectuosos en una hora de producción.
  - El número de reactivos contestados correctamente en una prueba estandarizada.
  - El tiempo necesario para contestar una llamada telefónica en un centro de llamadas.
  - Número de canastas en un partido de baloncesto.
  - Canal de televisión preferido por los habitantes de un conjunto residencial.

Comunicación

- 3 Lee y resuelve.
- Supón que una persona te pide que le expliques la diferencia entre los términos "muestra" y "población".
    - ¿Qué información debes incluir en tu respuesta?
    - ¿Qué razones le darías sobre por qué debe tomarse una muestra en vez de encuestar a todos los elementos de la población?

Modelación

- 4 Entrevista a diez estudiantes universitarios y recolecta datos para las siguientes tres variables:
- X: número de materias en las que está inscrito  
Y: costo total de los libros de texto semestrales  
Z: método de pago para cancelar el valor del semestre
- ¿Cuál es la población?
  - ¿Es la población infinita o finita?
  - ¿Cuál es la muestra?
  - Clasifica las respuestas para cada una de las tres variables según sean cuantitativas o cualitativas.

Resolución de problemas

- 5 En una empresa en la que se fabrican azulejos se quiere llevar a cabo un control de calidad de sus productos. Los responsables del estudio piden a un empleado que seleccione las muestras de azulejos, quien, al hacerlo, no elige los esperados.



En el control de calidad no se detectan piezas imperfectas y, sin embargo, la fábrica recibe más devoluciones de las esperadas. ¿Por qué crees que sucedió esto?

- 6 Para estimar la estatura media de los estudiantes de un colegio se selecciona al primer estudiante de la lista de cada uno de los cursos de la institución, se miden y se obtiene la media de estas medidas.
- ¿Cuál es la población?
  - ¿Cuál es la muestra?
  - ¿Está la muestra bien seleccionada?

- 7 En una empresa de transporte público se quiere saber la opinión de los ciudadanos acerca del servicio que ofrece. Para ello, unos encuestadores realizan una serie de entrevistas a los viajeros que acceden a este servicio en tres estaciones.



- ¿Cuál es la población?
  - ¿Cuál es la muestra?
  - Describe la variable implicada.
- 8 En la década de 1930, en una ciudad se hizo una encuesta telefónica para pronosticar el ganador de las siguientes elecciones presidenciales. El pronóstico fue que ganaría el candidato A, pero en realidad ganó el candidato B.
- ¿Crees que la muestra elegida fue representativa? ¿Por qué?
  - ¿Cómo se debió seleccionar la muestra de manera que los datos fueran confiables?

Razonamiento

- Cuantitativa discreta
- Cuantitativa continua
- Cuantitativa discreta
- Cualitativa
- Cuantitativa discreta
- Cuantitativa discreta
- Cuantitativa discreta
- Cuantitativa continua
- Cuantitativa discreta
- Cualitativa

Comunicación

- Respuesta abierta

Modelación

- Respuesta abierta que depende de los datos recogidos.

Resolución de problemas

- Respuesta abierta
- Los estudiantes de un colegio
  - Primer estudiante de la lista de cada curso
  - No
- Usuarios de una ciudad
  - Viajeros de tres estaciones
  - Satisfacción del servicio público
- No
  - Respuesta abierta

## Ampliación conceptual

En estadística las medidas de tendencia central son valores que se ubican al centro de un conjunto de datos ordenados según su magnitud. Son: la media aritmética, la mediana, la moda y al rango medio que generalmente son conocidos como estadígrafos.

La media aritmética es la medida de posición utilizada con más frecuencia. Si se tienen  $n$  valores de observaciones, la media aritmética es la suma de todos y cada uno de los valores dividida entre el total de valores.

Cuando los datos son simples se calcula así:

$$x = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{N}$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{N}$$

Donde  $x_n, x_i$  es cada dato y  $N$  el número total de datos. Cuando los datos vienen agrupados, se encuentra primero la marca de clase que es el punto medio del intervalo, luego se multiplica por la frecuencia absoluta.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Seleccionar a diez estudiantes para que indiquen la cantidad de dinero que poseen en ese momento y pregunte cómo saber cuál es el valor promedio.
- Guiar en el cálculo e interpretación de la media aritmética con los diez datos dados.
- Medir en parejas su estatura en metros y construir la tabla de frecuencias agrupando los datos en clases.
- Guiar en el cálculo e interpretación de la media aritmética con datos agrupados en clases.

## 2 Medidas de tendencia central

### Explora

En la Tabla 1, se registró el número de llamadas diarias recibidas en cierta estación de bomberos durante la primera semana del año.

Día	Número de llamadas ( $x_i$ )
Lunes	12
Martes	16
Miércoles	31
Jueves	25
Viernes	34
Sábado	21
Domingo	19
	158

Tabla 1

- ¿Cuál fue el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana en la estación?

Velocidad (km/h)	Número de vehículos ( $f_i$ )
[100, 110)	15
[110, 120)	35
[120, 130)	25
[130, 140)	10

Tabla 2

### Ten en cuenta

La velocidad máxima permitida a la que pueden ir los vehículos livianos en una carretera, es de 100 km/h.

Velocidad (km/h)	Marca de clase ( $x_i$ )	Número de vehículos ( $f_i$ )
[100, 110)	105	15
[110, 120)	115	35
[120, 130)	125	25
[130, 140)	135	10

Tabla 3

### 2.1 Media aritmética

Para calcular el promedio o la media aritmética  $\bar{x}$ , de las llamadas recibidas en la estación de bomberos durante esa semana, se suman los datos y el resultado se divide por la cantidad total,  $N$ , de datos. Es decir:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{158}{7} = 22,6.$$

Por lo tanto, el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana fue, aproximadamente, 22,6 llamadas.

La **media aritmética**,  $\bar{x}$ , de una variable es el cociente entre la suma de todos los valores  $x_i$  de la misma y la cantidad total  $N$  de estos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

#### Ejemplo 1

Las notas de un estudiante de octavo semestre de economía son:

$$4,5 \quad 3,8 \quad 2,7 \quad 4,1.$$

El promedio de estas notas se halla sumando los cuatro valores y dividiendo este resultado entre la cantidad de datos. Esto es:

$$\bar{x} = \frac{4,5 + 3,8 + 2,7 + 4,1}{4} = \frac{15,1}{4} = 3,775$$

### 2.2 Media aritmética para datos agrupados

Para calcular la media aritmética de un conjunto de datos agrupados en clases, se determina el cociente de la suma de los productos de cada marca de clase  $x_i$  y su correspondiente frecuencia  $f_i$  dividido entre el total de los datos,  $N$ .

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

#### Ejemplo 2

En un puesto de control de una autopista, se registraron las velocidades de algunos vehículos que transitaron durante cierto día de la semana. Observa la Tabla 2



Para determinar el promedio de las velocidades:

- Primero, se calculan las marcas de clase o los puntos medios de los intervalos de clase.
- Luego, como se muestra en la Tabla 3, se multiplican por su respectiva frecuencia y se divide la suma de estos resultados entre el total de los datos.

$$\bar{x} = \frac{105 \cdot 15 + 115 \cdot 35 + 125 \cdot 25 + 135 \cdot 10}{15 + 35 + 25 + 10} = \frac{10.075}{85} = 118,5 \text{ km/h}$$

Bloque de Estadística y probabilidad

**Destreza con criterios de desempeño:** Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

2.3 Moda

La **moda** ( $Mo$ ) de una variable estadística es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

Si los datos están agrupados en clases, se toma como valor aproximado de la moda la **marca de la clase modal**.

Una distribución puede tener una moda (**unimodal**), dos modas (**bimodal**), tres modas (**trimodal**), etc. Si todos los valores se repiten el mismo número de veces, se considera que la distribución no tiene moda.

**Ejemplo 3**

Tomás encuestó a sus compañeros de clase para determinar el tiempo, en minutos, que dedican a estudiar en casa y registró los datos en la Tabla 4.

Se observa que la clase con mayor frecuencia es [35, 45). Esta se denomina **clase modal** y significa que entre los compañeros de Tomás son más los que dedican entre 35 y 45 minutos a estudiar en casa.

**CULTURA** del Buen Vivir

**La equidad**

Tres amigas deciden ahorrar dinero para gastarlo a final de año en un viaje a Machala. Los aportes de cada una según sus posibilidades fueron: \$540, \$670 y \$437.

- Si se reúne todo el dinero, ¿cuál es el promedio de dinero que le corresponde a cada una? ¿Crees que esta situación es un ejemplo de equidad? Justifícala.

Tiempo (mn)	Número de estudiantes
[15, 25)	3
[25, 35)	8
[35, 45)	10
[45, 55)	8
[55, 65)	8
[65, 75)	3

Tabla 4

2.4 Mediana

La **mediana** ( $Me$ ) de una variable estadística es el valor de la variable tal que el número de valores menores que él es igual al número de valores mayores que él.

La mediana depende del orden de los datos y no de su valor.

**Actividad resuelta**

Comunicación

- 1 Calcula la mediana de la distribución de velocidades de la Tabla 5.

**Solución:**

En primer lugar, se agrega, en la tabla de distribución, una columna  $F_i$  con las frecuencias absolutas acumuladas (Tabla 6) y se calcula la mitad de los datos:

$$\frac{101}{2} = 50,5 \text{ vehículos}$$

Velocidad (km/h)	$x_i$	Número de vehículos $f_i$	Frecuencia absoluta acumulada $F_i$
[90, 100)	95	16	16
[100, 110)	105	15	31 < 50,5
[110, 120)	115	35	66 > 50,5
[120, 130)	125	25	91
[130, 140)	135	10	101
		101	

Tabla 6

**Velocidades de los vehículos que transitan en una autopista**

Velocidad (km/h)	$x_i$	Número de vehículos $f_i$
[90, 100)	95	16
[100, 110)	105	15
[110, 120)	115	35
[120, 130)	125	25
[130, 140)	135	10
		101

Tabla 5

La mediana coincide con la marca de clase de la clase mediana que, en este caso, es [110, 120), porque allí  $F_i > 50,5$ . Es decir,

$$Me = \frac{110 + 120}{2} = 115 \text{ km/h.}$$

APLICA © EDICIONES SM

**Ampliación conceptual**

La **Moda** en un conjunto de datos, es el valor que aparece con mayor frecuencia.

La **Mediana**, es el valor que ocupa la posición central en un conjunto de datos, los cuales deben estar ordenados.

Una manera de calcular la **moda con los datos agrupados en clases** es aplicando:

$$Mo = L_i + \frac{f_{i+1}}{f_{i-1} + f_{i+1}} \cdot a_i$$

Donde:

$L_i$  es el límite inferior de la clase modal.

$f_i$  es la frecuencia absoluta de la clase modal.

$f_{i-1}$  es la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal.

$f_{i+1}$  es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal.

$a_i$  es la amplitud de la clase.

Para la mediana con datos agrupados en clases, una manera de calcularla es aplicando:

$$Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - f_i - 1}{f_i} \cdot a_i$$

Donde:

$L_i$  es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana.

$N/2$  es la semisuma de las frecuencias absolutas.

$F_{i-1}$  es la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana.

$f_i$  es la frecuencia absoluta de la clase mediana.

$a_i$  es la amplitud de la clase.

# Libro del alumno

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Seleccionar a quince estudiantes para que indiquen la cantidad de hermanos que poseen y escriban el dato en el pizarrón.
- Guiar en el cálculo e interpretación de la moda y la mediana con los quince datos dados.
- Medir en parejas su contorno de cintura en metros y construir la tabla de frecuencias agrupando los datos en clases.
- Guiar en el cálculo e interpretación de la moda y mediana con datos agrupados en clases.

### Ejercitación

2.

a.  $\bar{x} = 3,33$ ;  $Mo = 2$ ;  $Me = 3$

### Comunicación

3.  $\bar{x} = 6,93$ ;  $Mo = 7$ ;  $Me = 7$

4.  $\bar{x} = 4,17$ ;  $Mo = 5$ ;  $Me = 4$

5. a.  $\bar{x} = 1,63$ ;  $Mo = 0$ ;  $Me = 1$

b.  $\bar{x} = 3,41$ ;  $Mo = 3,5$

Bloque Estadística y probabilidad

## 2 Medidas de tendencia central

### Matemáticas

#### Halla las medidas de tendencia central de un conjunto de datos con GeoGebra.

En GeoGebra pueden calcularse las medidas de tendencia central de un conjunto de datos cuantitativos escribiendo en la caja de CAS (Cálculo Simbólico) las palabras "Mediana", "Moda", "Media" junto con el conjunto de números separados por comas y dentro de corchetes.

- Observa cómo se hallan las medidas de tendencia central de este conjunto de datos:

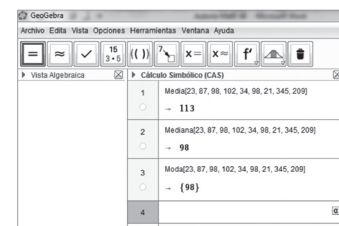
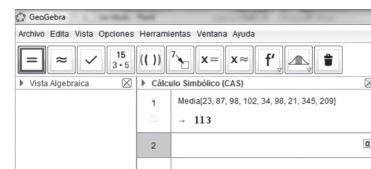
{23, 87, 98, 102, 34, 98, 21, 345, 209}

- Para obtener la media se escribe en la barra de entrada o en CAS:

Media[23, 87, 98, 102, 34, 98, 21, 345, 209].

- Luego, se da enter en el teclado y el resultado aparece, como se muestra en esta imagen.

- Para hallar la mediana y la moda, se realizan pasos similares. Los resultados de este ejemplo en particular aparecerían en pantalla como se muestra en la imagen de la derecha.



### Desarrolla tus destrezas

#### Ejercitación

- Encuentra la media, la mediana y la moda para el conjunto de datos.  
1, 3, 1, 4, 7, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 6

#### Comunicación

- Halla las medidas de tendencia central de los siguientes datos que corresponden al número de horas que durmieron quince personas la noche anterior.

5	6	6	8	7
7	9	5	4	8
11	6	7	8	7

Tabla 7

- Calcula la media, la mediana y la moda de la distribución estadística presentada en la Tabla 7.

$x_i$	2	3	4	5	6
$f_i$	11	17	23	24	15

Tabla 7

- Lee y resuelve.

- La cantidad de faltas de asistencia de los estudiantes de un curso a lo largo de un mes se consignaron en la Tabla 8.

Número de faltas	0	1	2	3	4	5
Número de estudiantes	10	7	6	2	1	4

Tabla 8

Encuentra las medidas de tendencia central de los datos de la tabla.

- En la Tabla 9, se registraron las calificaciones obtenidas por 35 estudiantes de noveno grado en una prueba de matemáticas.

Puntaje	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)
Número de estudiantes	2	1	6	15	11

Tabla 9

Calcula la media, la moda y la mediana de los datos.

APLICA © EDICIONES SM

Bloque de Estadística y probabilidad

**Destreza con criterios de desempeño:** Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas con el uso de la tecnología.

- 6 Corrige el error en el siguiente planteamiento.
- Una persona del club que tiene 91 miembros se pasa al club que tiene 71 miembros. Un estudiante afirma que cambiarán todas las medidas de tendencia central.
- 7 Explica en qué casos coinciden la moda y la mediana.
- 8 Responde estas preguntas.
- ¿Es posible que la media no coincida con ningún valor de la variable? ¿Esto es posible con la moda?
  - ¿Por qué en la Tabla 10 la mediana resulta poco significativa?

$x_i$	3	12	2 000
$f_i$	50	1	50

Tabla 10

- Marco tiene un conjunto de datos con los siguientes valores: 92, 80, 88, 95 y  $x$ . Si el valor de la mediana de este conjunto es 88, ¿qué debe ser verdadero acerca de  $x$ ? Explica tu respuesta.

Resolución de problemas

- 9 Al lanzar un dado 60 veces se registraron los siguientes resultados de menor a mayor.
- 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
- 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2
- 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
- 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5
- 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6
- 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
- ¿Cuál es el resultado obtenido con mayor frecuencia?
  - ¿Cuál es el promedio de los resultados?
  - Si se lanza una vez más el dado, ¿cuál es el resultado más probable?
- 10 En una encuesta, se les preguntó a 16 personas acerca de su estado civil. Las respuestas fueron:
- |             |         |         |        |
|-------------|---------|---------|--------|
| unión libre | casado  | soltero | casado |
| soltero     | casado  | soltero | casado |
| unión libre | soltero | casado  | casado |
| unión libre | casado  | soltero | casado |
- ¿Qué valor representa la moda de esa distribución?

- 11 En una encuesta sobre movilidad, se preguntó a 1 000 conductores acerca del número de multas recibidas que ha sido mayor o igual que 0 y menor o igual que 5. Al organizar los datos, un número desapareció, por lo que se dispone de la siguiente información:

Número de conductores		260	150	190	100	90
Número de multas	0	1	2	3	4	5

Tabla 11

- ¿Cuál es el dato central de la distribución?
  - ¿Cuál es la moda de los datos?
  - ¿Cuál es el promedio de multas recibidas por los conductores encuestados?
- 12 Se registró el número de horas que 20 trabajadores dejaron de asistir a la oficina por problemas de salud el año pasado. Los datos obtenidos fueron estos:
- |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 0  | 3  | 4  | 8  | 10 |
| 12 | 12 | 15 | 15 | 17 |
| 19 | 21 | 21 | 23 | 25 |
| 26 | 32 | 33 | 40 | 60 |
- ¿Cuál es el número de horas de absentismo laboral que ocurrió con mayor frecuencia?
  - ¿Cuál fue el promedio de horas no trabajadas en este grupo de personas?
- 13 Sofía obtuvo 153, 145, 148 y 166 puntos en cuatro juegos de bolos.
- ¿Cuál es el puntaje promedio de Sofía?
  - ¿Cuál de las medidas debería usar Sofía para convencer a sus padres de que tiene suficiente destreza para entrar a una liga de bolos? Explica tu respuesta.
  - Sofía juega un juego más. Da un ejemplo de un puntaje que convencería a Sofía de usar una medida de tendencia central diferente para persuadir a sus padres. Explica tu respuesta.

6. Cambian algunas medidas de tendencia central

7. Cuando la distribución es simétrica

- 8.
- La media puede no coincidir con ningún valor de la variable; sin embargo, la moda siempre estará asociada a un valor concreto de la distribución.
  - Porque los datos están muy dispersos.
  - $x \leq 88$

Resolución de problemas

- 9.
- 6
  - $\bar{x} = 3,62$
  - 6
10. El estado civil casado.
- 11.
- 2
  - 1
  - $\bar{x} = 2,01$
- 12.
- 12 horas, 15 horas y 21 horas.
  - $\bar{x} = 19,8$  horas
- 13.
- $\bar{x} = 153$  puntos
  - La media aritmética
  - No es posible.

## Ampliación conceptual

Los cuartiles son los tres valores de la variable que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales.

Hay tres cuartiles denotados usualmente como  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ . El segundo cuartil ( $Q_2$ ) es precisamente la mediana. El primer cuartil, ( $Q_1$ ) es el valor en el cual o por debajo del cual queda un cuarto (25%) de todos los valores de la sucesión (ordenada); el tercer cuartil, ( $Q_3$ ) es el valor en el cual o por debajo del cual quedan las tres cuartas partes (75%) de los datos.

### Cálculo de cuartiles para datos agrupados

Se busca la clase donde se encuentra  $\frac{k \cdot n}{4} \cdot k = 1, 2, 3$  en la tabla de las frecuencias acumuladas, luego se aplica:

$$Q_k = L_i + \frac{\frac{k \cdot n}{4} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$$

Donde

$L_i$  es el límite inferior de la clase donde se encuentra el cuartil.

$N$  es la suma de las frecuencias absolutas.

$F_{i-1}$  es la frecuencia acumulada anterior a la clase del cuartil.

$f_i$  es la frecuencia absoluta

$a_i$  es la amplitud de la clase.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Organizar una pequeña investigación para recabar datos numéricos válidos para medidas de posición.
- Organizar tablas con los datos recopilados.
- Guiar en el cálculo, ubicación e interpretación de cuartiles.

## 3 Cuartiles

### Explora

Se realizó un cuestionario de 80 preguntas a 60 personas y se obtuvieron los resultados de la Tabla 1.

Preguntas correctas	$f_i$
[20, 30)	8
[30, 40)	12
[40, 50)	16
[50, 60)	20
[60, 70)	4

Tabla 1

- ¿Determina el primer y tercer cuartiles de la distribución de las calificaciones?

$x_i$	$f_i$
3	9
4	12
5	11
6	8
	40

Tabla 3

En ocasiones es conveniente distribuir los datos estadísticos en cuatro partes iguales. Para ello se calculan tres valores que se llaman **cuartiles** y se representan por  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ . El segundo cuartil coincide con la mediana.

En este caso, para hallar  $Q_1$  y  $Q_3$ , se completan los datos, como en la Tabla 2, con las marcas de clase y las frecuencias absolutas acumuladas.

Preguntas correctas	$x_i$	$f_i$	$F_i$
[20, 30)	25	8	8
[30, 40)	35	12	20 > 15
[40, 50)	45	16	36
[50, 60)	55	20	56 > 45
[60, 70)	65	4	60

Tabla 2

$Q_1$ : La clase que contiene el primer cuartil es [30, 40), ya que su frecuencia acumulada excede por primera vez la cuarta parte de los datos,  $\frac{60}{4} = 15$ . Así, el primer cuartil será la marca de la clase, es decir,  $Q_1 = 35$ .

$Q_3$ : La clase que contiene el tercer cuartil es [50, 60), ya que su frecuencia acumulada es la primera que excede las tres cuartas partes de los datos,  $\frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{180}{4} = 45$ . Por lo tanto, el tercer cuartil será la marca de la clase, es decir,  $Q_3 = 55$ .

El **primer cuartil**,  $Q_1$ , deja a su izquierda la cuarta parte de la distribución.

El **segundo cuartil**,  $Q_2$ , deja a su izquierda la mitad de la distribución; por lo tanto, coincide con la mediana,  $Q_2 = Me$ .

El **tercer cuartil**,  $Q_3$ , deja a su izquierda las tres cuartas partes de la distribución.

### Actividad resuelta

#### Ejercitación

- En la Tabla 3, se registró el número de flores en 40 plantas de un vivero.
  - ¿Cuál es el primer cuartil de la distribución? ¿Cómo se interpreta?
  - ¿Cuál es el tercer cuartil? ¿Cómo se interpreta?



#### Solución:

Se completa la información, como en la Tabla 4, con las frecuencias absolutas acumuladas para identificar cuál de ellas deja a su izquierda la cuarta parte de los datos y cuál deja a su izquierda las tres cuartas partes de los datos.

$x_i$	$f_i$	$F_i$
3	9	9
4	12	21 > 10
5	11	32 > 30
6	8	40
	40	

Tabla 4

- De acuerdo con la información, el primer cuartil es 4. Esto significa que menos de la cuarta parte de las flores tiene hasta cuatro pétalos.
- El tercer cuartil corresponde a 5. Lo cual se interpreta como que menos de las tres cuartas partes de las flores tiene hasta cinco pétalos.

Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Determinar las medidas de posición: cuartiles y percentiles para resolver problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Encuentra los cuartiles  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  para los siguientes conjuntos de datos.
  - a. 7, 6, 4, 8, 3, 2, 5, 3, 9, 2, 2, 1, 4, 7, 12, 5, 9, 6, 3, 5
  - b. 64, 65, 68, 67, 68, 67, 72, 74, 80, 74, 68, 74, 68, 72, 68, 65, 72, 67, 68, 85
- 3 Calcula la mediana,  $Q_1$  y  $Q_3$  para cada distribución.
  - a.

$x_i$	$f_i$	$F_i$
[50, 60)	8	8
[60, 70)	10	18
[70, 80)	16	34
[80, 90)	14	48
[90, 100)	10	58
[100, 110)	5	63
[110, 120)	2	65

Tabla 5

b.

$x_i$	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
$f_i$	12	16	17	11

Tabla 6

Comunicación

- 4 Lee y resuelve.
  - En la Tabla 7 se registró el número de horas semanales que dedican al estudio los 30 estudiantes de noveno.

Número de horas	Número de estudiantes
[0, 4)	8
[4, 8)	10
[8, 12)	8
[12, 16)	4

Tabla 7

Halla la media, la moda, la mediana y los cuartiles  $Q_1$  y  $Q_3$  para esta distribución.

Modelación

- 5 Lee la información. Luego, realiza lo que se indica.
  - Los percentiles dividen los datos en 100 grupos con igual cantidad de datos. Esta medida da los valores correspondientes al 1%, 2%, 3%... y 99% de los datos. Observa cómo se calcula el percentil 40 ( $P_{40}$ ) de los datos de la distribución presentada en la Tabla 8.

Edades	$x_i$	$f_i$	$F_i$
[10, 20)	15	4	4
[20, 30)	25	10	14
[30, 40)	25	12	26 > 20
[40, 50)	45	14	40
[50, 60)	55	8	48
[60, 70)	65	2	50

Tabla 8

- Primero, se identifica la clase donde se encuentra el percentil buscado:

$$\frac{kN}{100}, \text{ con } k = 1, 2, 3, \dots, 99 \text{ y } N \text{ el total de datos}$$

$$\frac{40 \cdot 50}{100} = 20.$$

- Para calcular el percentil se utiliza esta fórmula:

$$P_k = L_i + \frac{\frac{k \cdot N}{100} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

$L_i$ : límite inferior de la clase donde se encuentra el percentil

$F_{i-1}$ : frecuencia acumulada anterior a la clase del percentil

$a$ : amplitud de la clase

Por lo tanto:

$$P_{40} = 30 + \frac{20 - 14}{12} \cdot 10 = 35.$$

- a. Halla  $P_{35}$ ,  $P_{79}$  y  $P_{50}$  de la distribución anterior.
- b. Explica por qué el percentil 50 coincide con la mediana de la distribución.

Resolución de problemas



- 6 A continuación se presentan las producciones de lúpulo, en libras, de una finca.

3,9 3,4 5,1 2,7 4,4 7,0 5,6 2,6 4,8  
5,6 7,0 4,8 5,0 6,8 4,8 3,7 5,8 3,6

- a. Encuentra  $Q_1$  y  $Q_3$  de los datos.
- b. Encuentra  $P_{45}$  y  $P_{70}$ .

Ejercitación

2.

- a.  $Q_1 = 3, Q_2 = 5, Q_3 = 7$
- b.  $Q_1 = 67, Q_2 = 68, Q_3 = 73,5$

3.

- a.  $Me = 75, Q_1 = 65, Q_3 = 95$
- b.  $Me = 15, Q_1 = 15, Q_3 = 25$

Comunicación

4.  $\bar{x} = 7,07; Mo = 6; Me = 6; Q_1 = 2; Q_3 = 10$

Modelación

5.

- a.  $P_{35} = 32,92; P_{79} = 49,64; P_{50} = 39,17$
- b. Respuesta abierta

Resolución de problemas

6.

- a.  $Q_1 = 3,625; Q_3 = 5,6$
- b.  $P_{45} = 4,8; P_{70} = 5,4$

UNIDAD  
**6**

# Evaluación formativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Los siguientes son los puntajes de un grupo de adolescentes en un test de Agudeza Visual: 25, 12, 15, 23, 25, 39, 13, 31, 19, 16.

Calcule la media aritmética, la mediana y la moda, registre los cálculos y respuesta en el cuadro que se presenta a continuación:

	Cálculos	Respuesta
Media aritmética		$\bar{x}$
Mediana		Me =
Moda		Mod =

2. El director del Colegio lo ha seleccionado para organizar los deportes de su clase. Usted desea investigar sobre el caso. ¿Cuál es la población? ¿Cuál es una muestra?

3. Con los datos que se propone a continuación; 22, 24, 28, 34, 30, 26, 17, 17, 18, 24, 30, 29, 28, 21, 19, 26, 25, 22, 23, 29, 20, 31, 24, 25, 20, 20, 28, 30, 27, 24, 26, 28, 21, 22, 28, 24, 28, 27, 26, 24, 28, 35, 30, 20, 19, 15, 17, 24, 24, 26, 16, 19, 22, 28, 26, 26, 27, 28, 24, 21, 25, 25, 22, 19, 21, 28, 22, 26, 22, 25, los mismos que corresponden a las edades de los jugadores del último torneo local de fútbol, realicemos lo siguiente:

A. Elaboremos una tabla de intervalos con frecuencias.

- B. Construyamos las columnas de frecuencias relativas y porcentajes.

- C. Determinemos el porcentaje de jugadores que tienen una edad comprendida entre 24 y 26 años.

4. En la siguiente tabla se propone las calificaciones en matemáticas de los estudiantes de décimo año de educación básica. Complete el cuadro y calculemos la media aritmética, determine la mediana y moda aritmética.

x	f	f · x
13	51	
14	76	
15	85	
16	80	
17	61	
18	43	
19	26	
20	15	
Total		

1. Los siguientes son los puntajes de un grupo de adolescentes en un test de Agudeza Visual: 25, 12, 15, 23, 25, 39, 13, 31, 19, 16.

Calcule la media aritmética, la mediana y la moda, registre los cálculos y respuesta en el cuadro que se presenta a continuación:

	Cálculos	Respuesta
Media aritmética		$\bar{x} = 21,8$
Mediana		Me = 21
Moda		Mod = 24

2. El director del Colegio lo ha seleccionado para organizar los deportes de su clase. Usted desea investigar sobre el caso. ¿Cuál es la población? ¿Cuál es una muestra?

La población es el conjunto de todos los estudiantes de su clase. Una muestra la constituyen, por ejemplo, los primeros 10 estudiantes que aparecen en la lista de clase.

3. Con los datos que se propone a continuación; 22, 24, 28, 34, 30, 26, 17, 17, 18, 24, 30, 29, 28, 21, 19, 26, 25, 22, 23, 29, 20, 31, 24, 25, 20, 20, 28, 30, 27, 24, 26, 28, 21, 22, 28, 24, 28, 27, 26, 24, 28, 35, 30, 20, 19, 15, 17, 24, 24, 26, 16, 19, 22, 28, 26, 26, 27, 28, 24, 21, 25, 25, 22, 19, 21, 28, 22, 26, 22, 25, los mismos que corresponden a las edades de los jugadores del último torneo local de fútbol, realicemos lo siguiente:
- Elaboremos una tabla de intervalos con frecuencias.
  - Construyamos las columnas de frecuencias relativas y porcentajes.
  - Determinemos el porcentaje de jugadores que tienen una edad comprendida entre 24 y 26 años.

Edad	f	fr	%
15 – 17	5	0,07	7
18 – 20	9	0,13	13
21 – 23	12	0,17	17
24 – 26	22	0,32	32
27 – 29	15	0,21	21
30 – 32	5	0,07	7
33 – 35	2	0,03	3
Total	70	1,00	100

- C. El porcentaje de jugadores que tienen una edad comprendida entre 24 y 26 años es 31 %

4. En la siguiente tabla se propone las calificaciones en matemáticas de los estudiantes de décimo año de educación básica. Completemos el cuadro y calculemos la media aritmética, determinar la mediana y moda aritmética.

x	f	f · x
13	51	663
14	76	1 064
15	85	1 275
16	80	1 280
17	61	1 037
18	43	774
19	26	494
20	15	300
Total	437	6 887

Media aritmética = 15,76; Mediana = 16; Moda = 15

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Organizar datos no agrupados (máximo 20) y datos agrupados (máximo 50) en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada, para analizar el significado de los datos.	1, 2, 3 y 4			
Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.	1, 2, 3 y 4			
Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas.	1, 3, y 4			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

## Ampliación conceptual

Se llaman también medidas de variabilidad, pues muestran la variabilidad de una distribución, indicando por medio de un número si las diferentes puntuaciones de una variable están muy alejadas de la media. Cuanto mayor sea ese valor, mayor será la variabilidad, y cuanto menor sea, más homogénea será a la media. De esta manera se sabe si todos los casos son parecidos o varían mucho entre ellos.

Existen diversas medidas de dispersión, entre las más utilizadas tenemos:

**Rango o recorrido.** Mide la amplitud de los valores de la muestra y se calcula por diferencia entre el valor más elevado y el valor más bajo.  $\text{Rango} = (\text{Máx} - \text{Mín})$

**Desviación media.** Es la media de los valores absolutos de las diferencias entre la media aritmética y los diferentes datos. Sirve para calcular cuánto en promedio se desvían los datos de la media aritmética.

**Varianza.** Mide la dispersión de los valores respecto a un valor central (media), es decir, es el cuadrado de las desviaciones.

La varianza siempre será mayor que cero. Mientras más se aproxima a cero, más concentrados están los valores de la serie alrededor de la media. Por el contrario, mientras mayor sea la varianza, más dispersos están.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Plantee datos de rendimiento del curso en una materia y calcule las medidas de dispersión.

## 4 Medidas de dispersión

### Explora

Las calificaciones de un grupo de diez estudiantes en un examen de estadística son las siguientes:



56	58	67	69	75
77	77	82	84	95

- ¿Cuál es el rango de estos datos?

### Ten en cuenta

Cuando se calcula la varianza para datos no agrupados, se usa la fórmula:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

### 4.1 Rango

La media, la mediana y la moda de un conjunto de datos, revelan parte de la información necesaria para analizarlos. Para comprender mejor el comportamiento de los datos, se puede determinar su dispersión o variabilidad. Las principales medidas de dispersión son el rango, la varianza y la desviación típica.

El **rango** es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de los datos.

En este caso, como los datos están ordenados de manera ascendente, se identifica fácilmente que el menor valor es 56 y el mayor, 95.

Por lo tanto, el rango de las notas es:

$$\text{Rango} = 95 - 56 = 39.$$

El **rango** de una distribución es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la variable estadística. También se llama **recorrido**.

#### Ejemplo 1

En la Tabla 1, se representa el número de libros que se venden cada día en una librería a lo largo de un mes.

Número de libros	12	17	21	27	35	37	49
$f_i$	5	3	6	8	4	3	1

Tabla 1

La cantidad de ejemplares vendidos varía desde los 12 hasta los 49, por lo que se dice que el rango de esta distribución es:

$$\text{Rango} = 49 - 12 = 37 \text{ libros.}$$

### 4.2 Varianza

Antes de estudiar el concepto de varianza, es necesario definir la **desviación respecto a la media**.

Se conoce como **desviación respecto a la media**,  $d_i$ , a la diferencia entre cada valor de la variable estadística,  $x_i$ , y la media aritmética,  $\bar{x}$ . Es decir:

$$d_i = x_i - \bar{x}.$$

#### Ejemplo 2

La media aritmética de los datos de la Tabla 1 es  $\bar{x} = 25,1$  y las desviaciones respecto a la media se muestran en la Tabla 2.

Número de libros ( $x_i$ )	12	17	21	27	35	37	49
$d_i = x_i - \bar{x}$	-13,1	-8,1	-4,1	1,9	9,9	11,9	23,9

Tabla 2

La **varianza**  $s^2$  de una variable estadística  $x$  es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. Para datos agrupados es:

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Bloque de Estadística y probabilidad

**Destreza con criterios de desempeño:** Calcular e interpretar las medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación típica) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

**Ejemplo 3**

La varianza de los datos consignados en la Tabla 1 es:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{(-13)^2 \cdot 5 + (-8)^2 \cdot 3 + (-4)^2 \cdot 6 + (1,9)^2 \cdot 8 + (9,9)^2 \cdot 4 + (11,9)^2 \cdot 3 + (23,9)^2 \cdot 1}{5 + 3 + 6 + 8 + 4 + 3 + 1}$$

$$= \frac{2572}{30} = 85,76$$

**Ten en cuenta**

Una expresión más sencilla para calcular la varianza es:

$$\frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2$$

**4.3 Desviación típica**

La **desviación típica s** es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

**Ejemplo 4**

Las edades de los participantes de un concurso de literatura de un colegio se muestran en la Tabla 3. Para calcular la desviación típica de los datos, primero se calcula la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{13 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 15 \cdot 7 + 16 \cdot 10 + 17 \cdot 11 + 18 \cdot 8 + 19 \cdot 2}{45} = \frac{729}{45} = 16,2 \text{ años}$$

Luego, se completan los datos así, como en la Tabla 4:

1. En la tercera columna se calculan las desviaciones respecto a la media.
2. En la cuarta columna se calculan los cuadrados de los valores de las desviaciones respecto a la media.
3. En la quinta columna se halla el producto de los resultados de la cuarta columna con su respectiva frecuencia.

Edad $x_i$	$f_i$
13	3
14	4
15	7
16	10
17	11
18	8
19	2
	45

Tabla 3

Edad $x_i$	$f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
13	3	$13 - 16,2 = -3,2$	10,24	30,72
14	4	$14 - 16,2 = -2,2$	4,84	19,36
15	7	$15 - 16,2 = -1,2$	1,44	10,08
16	10	$16 - 16,2 = -0,2$	0,04	0,4
17	11	$17 - 16,2 = 0,8$	0,64	7,04
18	8	$18 - 16,2 = 1,8$	3,24	25,92
19	2	$19 - 16,2 = 2,8$	7,84	15,68
	45			

Tabla 4

Ahora, se halla la varianza:

$$s^2 = \frac{30,72 + 19,36 + 10,08 + 0,4 + 7,04 + 25,92 + 15,68}{45} = \frac{109,2}{45} = 2,42$$

Y, por último, se calcula la desviación típica:  $s = \sqrt{2,42} = 1,56$ .

**Ejemplo 5**

Para hallar la desviación típica de un conjunto de datos cuya varianza es 172,7, basta con calcular:

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{172,7} = 13,1$$

**Razonamiento matemático**

**¿Para qué sirve la desviación típica?**

A dos grupos de personas se les encomienda realizar una encuesta sobre la misma variable. En el momento de analizar qué grupo de datos es el más confiable, se calcula la desviación típica y el valor menor es el que indica que grupo de datos representa mejor a la población encuestada.

- Investiga estudios estadísticos donde la desviación típica haya permitido analizar un conjunto de datos. Por ejemplo, en un censo poblacional.

**Ampliación conceptual**

La varianza a veces no se interpreta claramente, pues se mide en unidades cuadráticas. Por esta razón se define otra medida de dispersión, que es la desviación típica, o desviación estándar, que se halla como la raíz cuadrada positiva de la varianza. La desviación estándar permite establecer dos nuevos límites alrededor de dicha línea central, para saber cuándo un elemento es demasiado pequeño o grande. Esta medida viene representada en la mayoría de los casos por  $s$ , dado que es su inicial de su nominación en inglés.

Con datos no agrupados

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Con datos agrupados

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N}}$$

La desviación típica, al igual que la media y la varianza, es un índice muy sensible a las puntuaciones extremas.

En los casos que no se pueda hallar la media tampoco será posible hallar la desviación típica.

Cuanta más pequeña sea la desviación típica mayor será la concentración de datos alrededor de la media.

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Proponer realicen mediciones en milímetros, de la altura de perros de una misma edad pero de diferentes razas, considerada hasta los hombros.
- Guiar la organización de la tabla de frecuencias, cálculo de la media, varianza y desviación estándar, así como también el establecimiento de conclusiones.
- Plantear y resolver otros ejercicios.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Realizar un diagrama de las medidas de dispersión con sus fórmulas de cálculo.
- Comprobar que en distribuciones con una moda y simétricas se cumple que:
  - En el intervalo  $(x - 2s, x + 2s)$  se encuentra el 68 % de los datos.
  - En el intervalo  $(x - 2s, x + 2s)$  se encuentra el 95 % de los datos.
  - En el intervalo  $(x - 3s, x + 3s)$  se encuentra el 99 % de los datos.
- Explicar cómo encontrar y la utilidad del coeficiente de variación.
- Desarrollar un ejercicio en el que se calcule e interprete el CV.

## Actividades colaborativas

- Organizar a los estudiantes en grupos de trabajo asignándoles diferentes temáticas, como por ejemplo:
  - Estatura en centímetros de 20 estudiantes.
  - Miembros de la familia de 25 estudiantes.
  - Notas del primer parcial de Matemática de los estudiantes del curso.
  - Notas del primer parcial de Lengua y Literatura de los estudiantes del curso.
  - Consumo de luz en kw/h de un mes de 20 familias de estudiantes del curso.
  - Ingresos económicos en dólares, en las familias de 30 estudiantes.
  - Consumo de agua en  $m^3$  durante un mes, de las familias de los estudiantes del curso.
- Recolectar datos sobre la temática asignada a cada grupo.
- Organizar la tabla de frecuencias.
- Encontrar las medidas de dispersión e interpretar resultados.
- Presentar en plenaria el trabajo realizado por cada grupo.

## 4

### Medidas de dispersión

#### Ten en cuenta

Un polígono de frecuencias se forma uniendo, con segmentos, los puntos medios de las barras de un histograma (que utiliza columnas verticales para mostrar frecuencias).

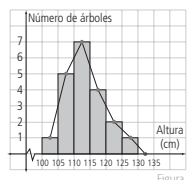


Figura 1

	$\bar{x}$	s
Sara	8,5	1,3
Lucía	7,5	1,2

Tabla 5

#### Ten en cuenta

Las medidas de dispersión muestran la variabilidad de una distribución indicando por medio de un número si las diferentes puntuaciones de una variable están muy alejadas de la media. Cuanto mayor sea ese valor, mayor será la variabilidad, y cuanto menor sea, más homogénea será a la media.

#### 4.4 Agrupación de datos en torno a la media aritmética

En distribuciones con una moda y simétricas se cumple que:

- En el intervalo  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$  se encuentra el 68 % de los datos.
- En el intervalo  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$  se encuentra el 95 % de los datos.
- En el intervalo  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$  se encuentra el 99 % de los datos.

#### Ejemplo 6

Al medir las alturas, en centímetros, de 20 árboles se obtuvieron los datos presentados en la siguiente lista:

101 111 108 114 129 118 111 107 119 114  
120 111 107 108 119 114 118 111 120 108

Representando el polígono de frecuencias de la Figura 1, se comprueba que la distribución es unimodal. Se calcula la media y la desviación típica:

$$\bar{x} = 114 \text{ cm} \qquad s = 7 \text{ cm.}$$

Luego, se halla el porcentaje de árboles con alturas en estos intervalos:

- $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (107, 121)$ . Hay 14 árboles, el 70 % del total.
- $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (100, 128)$ . Hay 19 árboles, el 95 % del total.
- $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (93, 135)$ . Hay 20 árboles, el 100 % del total.

#### 4.5 Coeficiente de variación

El coeficiente de variación CV sirve para comparar la dispersión de distribuciones que tienen diferentes medias y distintas desviaciones típicas.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

#### Actividades resueltas

##### Resolución de problemas

- En la Tabla 5, se muestran la media y la desviación típica de las notas de Sara y Lucía. Calcula el coeficiente de variación de las calificaciones de cada una e interpreta los resultados.

##### Solución:

$$CV_{\text{Sara}} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,3}{8,5} = 0,15 \qquad CV_{\text{Lucía}} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,2}{7,5} = 0,16$$

Aunque la desviación típica de Sara es mayor, las calificaciones de Lucía son más dispersas pues es mayor el coeficiente de variación.

- Los promedios de unidades de sombreros vendidas al mes en dos compañías A y B son 4 400 y 4 280, respectivamente. Si  $s_A = 620$  y  $s_B = 620$ , ¿cuál de las compañías tuvo mayor variabilidad en las ventas?

##### Solución:

$$CV_A = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{620}{4400} = 0,1409 \qquad CV_B = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{620}{4280} = 0,1449$$

Por lo tanto, la mayor variabilidad se presentó en la compañía B.

Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de dispersión de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 3 Halla el porcentaje de datos incluidos en los intervalos  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ ,  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$  y  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$  para la distribución de la Tabla 6.

$x_i$	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
$f_i$	5	12	20	11	6

Tabla 6

Razonamiento

- 4 Ten en cuenta la información y resuelve.
- Los porcentajes de uso del cinturón de seguridad en dos ciudades A y B durante cuatro días se muestran en la Tabla 7.

A	87	78	67	82
B	60	95	92	47

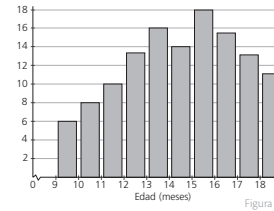
Tabla 7

Calcula el coeficiente de variación en cada ciudad e interpreta el resultado.

Resolución de problemas

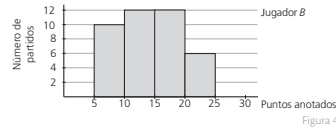
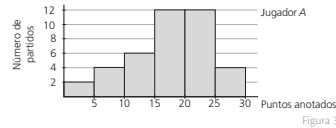
- 5 En un colegio hay la siguiente cantidad de estudiantes:
- En grado sexto hay EGB 112 estudiantes.
  - En grado séptimo EGB 123 estudiantes.
  - En grado octavo EGB 130 estudiantes.
  - En grado noveno EGB 110 estudiantes.
  - En grado décimo EGB hay 150 estudiantes.
  - En grado primero BGU hay 146 estudiantes.
- Elabora una tabla que contenga los anteriores datos.
  - Halla el rango.
  - Calcula la varianza y la desviación típica.

- 6 Se realizó un estudio sobre los meses de edad de un grupo de 124 bebés en el momento en que comenzaron a caminar. Los resultados están expresados en el histograma de la Figura 2.



- Elabora una tabla que contenga la información representada en el histograma.
- Halla el rango.
- Calcula la varianza y la desviación típica.

- 7 En los histogramas de las Figuras 3 y 4, se muestran los puntos anotados por dos jugadores de baloncesto a lo largo de un campeonato.



- ¿Cuál de ellos alcanza mejor la media anotadora?
- ¿Quién es más regular en su posición?

- 8 En la Tabla 8, se registró el número de goles que hicieron dos equipos de fútbol en ocho partidos del campeonato de esta temporada.

Equipo 1	25	24	27	24	26	25	27	24
Equipo 2	28	30	21	22	27	20	28	30

Tabla 8

Calcula el número medio de goles de cada uno de los equipos. ¿Cuál de ellos es más regular en su desempeño?

Comunicación

3.  $\bar{x} = 35,185; s = 11,242$

$(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (23,943; 46,427)$ , representa el 63%  
 $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (12,911; 57,459)$ , representa el 94,4%

$(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (1,774; 68,3596)$ , representa el 100%

Razonamiento

4.  $CV_A = 0,094$        $CV_B = 0,28$

Resolución de problemas

5. a.

Grado	Cantidad de estudiantes
Sexto	112
Séptimo	123
Octavo	130
Noveno	110
Décimo	150
Primero	146

b. 40 estudiantes       $c.s^2 = 283,1; s = 16,83$

6. a.

Edad	Cantidad
(9, 11)	14
(11, 13)	23
(13, 15)	30
(15, 17)	33
(17, 19)	24

b. 10 meses       $c.s^2 = 6,5; s = 2,5$

7. a. Jugador A

b. Jugador B

8.  $\bar{x}_A = 25,24; \bar{x}_B = 25,75$ . El equipo A.

## Ampliación conceptual

Es una representación gráfica de los posibles resultados de un experimento. Consta de una serie de pasos, donde cada uno de estos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo. Se utiliza en los problemas de conteo y probabilidad.

Para construir el diagrama se parte poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. Cada una de estas ramas se conoce como rama de primera generación.

En el final de cada rama de primera generación se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas conocidas como ramas de segunda generación, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final).

Para calcular la probabilidad se multiplica las probabilidades si se trata de ramas contiguas y se suman las mismas si se trata de ramas separadas que emergen de un mismo punto.

## Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Plantear el ejercicio: Una universidad está formada por tres facultades:

- La 1ª con el 50% de estudiantes.
- La 2ª con el 25% de estudiantes.
- La 3ª con el 25% de estudiantes.

Las mujeres están repartidas uniformemente, siendo un 60% del total en cada facultad. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una estudiante de la primera facultad?

### 5

## Diagrama de árbol

### Explora

La dueña de un almacén de ropa deportiva encargó sudaderas de color blanco y negro en tallas pequeña, mediana, grande y extragrande.



• ¿Cuántos modelos de sudaderas recibirá cuando llegue el pedido?

Para determinar cuántos modelos de sudaderas recibirá la dueña del almacén, se representan los colores por B y N y las tallas por P, M, G y SG, y se construye un diagrama de árbol como el de la Figura 1.



Figura 1

El diagrama de árbol, conocido también como el principio general de recuento, consiste en que si un primer experimento puede hacerse de  $m$  formas diferentes y un segundo experimento puede hacerse de  $n$  formas diferentes, entonces los dos experimentos juntos pueden hacerse de  $m \cdot n$  formas diferentes.

### Actividades resueltas

#### Resolución de problemas

1 Un determinado automóvil se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina; en cinco colores: blanco, rojo, azul, verde y negro, y con tres acabados: básico, semilujo y lujo. ¿Cuántos modelos diferentes se construyen?

#### Solución:

Se representan los motores por D y G; los colores por B, R, A, V y N, y los acabados por Ba, SL y L.

Al formar el diagrama de árbol de la Figura 2, se observa que se construyen:  $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$  modelos diferentes.

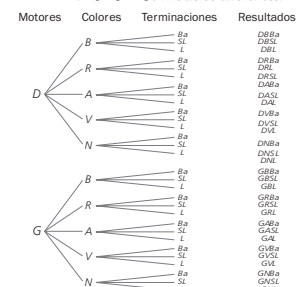


Figura 2

2 ¿Cuántos resultados diferentes se obtendrán si se lanzan tres dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6?

#### Solución:

Como para cada dado hay seis posibles valores, el espacio muestral tendrá:  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$  resultados diferentes.

Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Elaborar diagramas de árbol de un conjunto de datos para la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3. Elabora un diagrama de árbol para determinar lo que se indica en cada caso.
- El número de maneras de combinar tres colores de medias con dos colores de zapatos.
  - Formas de seleccionar un menú, teniendo cuatro opciones de ensalada, tres de carnes, cinco de jugos y dos de postre.
  - Opciones para formar parejas de baile con cinco hombres y siete mujeres.
  - Formas de mezclar tres frutas con dos tipos de líquidos distintos.

Resolución de problemas

4. En el experimento de lanzar dos monedas y notar si se obtiene cara o sello en cada una, ¿cuáles son los elementos del espacio muestral?
5. En una heladería se venden conos de tres sabores: vainilla, fresa y mango; y se les pueden adicionar salsa de mora, crema de leche o leche condensada.



Dibuja un diagrama de árbol. ¿Cuántos productos diferentes pueden escogerse?

6. Se lanzan al aire dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado de las caras superiores. Forma un diagrama de árbol. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?
7. El código de un candado consta de dos letras (A y B) y de dos números (1 y 2). Realiza el diagrama de árbol y calcula el número de códigos posibles.
8. Con las letras de la palabra "ROMA" se forman todas las palabras posibles de cuatro letras, tengan o no tengan sentido, sin repetir ninguna. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse?
9. De una urna que contiene una bola negra y otra roja, se extrae una bola y a la vez se lanza un dado cúbico y una moneda. Calcula el número de resultados posibles con un diagrama de árbol.

10. Se dispone de los colores rojo, verde, amarillo y negro para formar todas las banderas posibles con tres franjas verticales. Dibuja un diagrama de árbol que represente todas las banderas resultantes de tal manera que no se repitan colores en la misma bandera.
11. Los partidos de semifinales de una competencia de baloncesto son entre el equipo A, el equipo B, el equipo C y el equipo D.



Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a las posibles finales.

12. En una organización se quiere elegir una nueva junta directiva. Para presidente hay tres candidatos: Julián, Gloria y Pablo; para secretario hay dos: Sara y Andrés, y para tesorero hay dos: Marco y Sofía. Representa en un diagrama de árbol todas las posibilidades de elección.
13. Una caja contiene tres bolas: una roja, una azul y una blanca. Dos de ellas se extraen con reemplazamiento, es decir, una vez se ha elegido una bola, se anota su color y luego vuelve a introducirse en la caja. Las bolas se revuelven antes de extraer una segunda bola y observar su color. ¿Cuáles son los posibles resultados?
14. Se lanzan dos dados (uno blanco y uno negro), uno a la vez, y se observa el número de puntos que se obtiene en cada lanzamiento. Elabora un diagrama de árbol donde se muestren las distintas combinaciones que pueden obtenerse.
15. Considera números de cinco cifras y responde las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos son capicúas?
- ¿Cuántos son impares?
- ¿Cuántos tienen las cinco cifras distintas?
- ¿Cuántos son pares, capicúas y mayores que 50 000?

Ejercitación

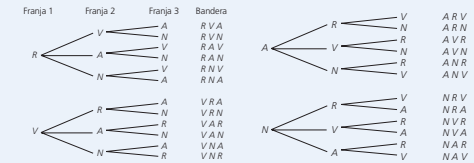
3. a. 6 b. 120 c. 35 d. 6

Verificar validez de los diagramas de árbol.

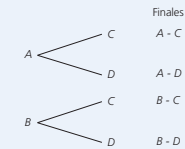
Resolución de problemas

4.  $E = \{(CC), (CS), (SC), (SS)\}$
5. 9 productos diferentes
6. 36 resultados
7. 4 códigos
8. 24
9. 24 resultados

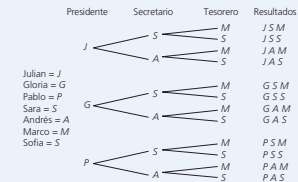
10.



11.



12.



13. {RR, RA, RB, AR, AA, AB, BR, BA, BB}

14. 36 combinaciones

15. a. 900 b. 45 000 c. 27 216 d. 200

## Ampliación conceptual

Se llaman también permutaciones ordinarias de  $n$  elementos (de orden  $n$ ) y son los distintos grupos de  $n$  elementos distintos que se pueden formar, de manera que dos grupos se diferencian únicamente en el orden de colocación. Se representa por  $P_n$ .

Para construir las permutaciones sin repetición de un conjunto de  $n$  elementos, se tiene que formar grupos de  $n$  elementos sin que se puedan repetir. Así:

- Si el conjunto tiene un elemento.  $A = \{1\}$ . Únicamente existe una permutación:  $1$ .  $P_1 = 1$
- Si el conjunto tiene dos elementos.  $A = \{1,2\}$ . Las permutaciones son:  $12$  y  $21$ .  $P_2 = 2$ .
- Si el conjunto tiene tres elementos.  $A = \{1,2,3\}$ . Las permutaciones son:  $123$ ,  $132$ ,  $213$ ,  $231$ ,  $312$  y  $321$ .  $P_3 = 6$ .
- Si el conjunto tiene cuatro elementos.  $A = \{1,2,3,4\}$ . Las permutaciones son:  $1234$ ,  $1243$ ,  $1324$ ,  $1342$ ,  $1423$ ,  $1432$ ,  $2134$ ,  $2143$ ,  $2314$ ,  $2341$ ,  $2413$ ,  $2431$ ,  $3124$ ,  $3142$ ,  $3214$ ,  $3241$ ,  $3412$ ,  $3421$ ,  $4123$ ,  $4132$ ,  $4213$ ,  $4231$ ,  $4312$ ,  $4321$ .  $P_4 = 24$ .
- Generalizando, el número de permutaciones ordinarias de  $n$  elementos se calcula con la expresión:  $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

A este número se le llama factorial de  $n$  y se representa por  $n!$ , esto es:  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Además: Si  $n = 1$ , se define  $1! = 1$

Si  $n = 0$  se define  $0! = 1$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Encontrar todas las permutaciones de conjuntos propuestos por estudiantes.
- Comprobar aplicando la fórmula, el número de permutaciones.

## 6 Permutaciones sin repetición

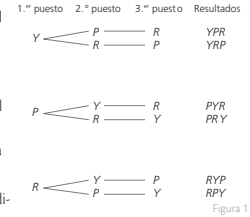
Yadira, Pamela y Raquel participan en una competencia de nado sincronizado en la categoría individual.



• ¿De cuántas maneras pueden clasificarse para recibir las medallas de oro, plata y bronce?

Para determinar de cuántas formas pueden clasificarse las tres participantes para recibir las medallas de oro, plata y bronce, se hace el siguiente análisis.

- Se representa a cada participante por la inicial de su nombre y se forma el diagrama de árbol de la Figura 1.
- Para el primer puesto, hay tres nadadoras.
- Una vez asignado el primer lugar, para el segundo puesto, restan dos candidatas.
- Para la última medalla, solo queda una candidata posible.



Así pues, el número de clasificaciones diferentes es  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ .

A cada una de las ordenaciones dadas por las ramas del diagrama de árbol se les llama permutaciones de tres elementos.

Las **permutaciones sin repetición** de  $n$  elementos son los distintos grupos que se pueden formar de manera que:

- En cada grupo estén los  $n$  elementos.
- Un grupo se diferencie de otro únicamente en el orden de colocación de sus elementos.

El número de permutaciones sin repetición de  $n$  elementos se representa por  $P_n$  y es igual a  $P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

El número  $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$  se llama **factorial de  $n$**  y se simboliza por  $n!$ , siendo  $n$  un número natural.

Los factoriales de 0 y de 1 se definen así:  $0! = 1! = 1$ .

### Actividades resueltas

Ejercitación

- Realiza estas operaciones  $\frac{5!}{3!}$  y  $\frac{12!}{9!3!}$ .

• **Solución:**

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{6} \cdot 11 \cdot 10 = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

**Resolución de problemas**

- En una competencia de 1500 m participan ocho atletas.
  - ¿De cuántas formas diferentes podrán llegar a la meta suponiendo que el empate no es posible?
- ¿Cuántas posibles rutas puede planificar un turista para visitar cinco ciudades distintas sin repetir ninguna?

• **Solución:**

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320 \text{ formas distintas}$$

• **Solución:**

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ rutas distintas}$$

Bloque de Estadística y probabilidad

Destrezas con criterios de desempeño: • Aplicar métodos de conteo (permutaciones sin repetición) en el cálculo de probabilidades.  
• Calcular el factorial de un número natural en el cálculo de probabilidades.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

4. Halla las distintas permutaciones sin repetición que pueden formarse en cada caso.
- a. Números de cinco cifras diferentes que pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5.
  - b. Número de formas distintas en que pueden sentarse ocho personas en una fila de asientos.
  - c. Número de formas distintas en que pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda.
  - d. Número de ordenaciones distintas que pueden hacerse con las letras de la palabra "libro" y que empiecen por vocal.
  - e. Números de cinco cifras distintas que pueden formarse con las cifras impares.
  - f. Número de formas en que pueden ubicarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta a la portería.

Razonamiento

5. Analiza y responde.
- a. Con las letras de la palabra "PERA", ¿cuántos grupos diferentes de cuatro letras puedes escribir sin que se repita ninguna? ¿Y cuántos si la primera es la letra P?
  - b. Con las letras a, b, c, d, e y f, ¿cuántos grupos diferentes de seis letras pueden formarse sin que se repitan?
  - c. Con las letras de la palabra "ECUADOR", ¿cuántos grupos diferentes de siete letras pueden formarse?
  - d. En un juego de azar se eligen seis números del 1 al 49, incluyendo estos dos. ¿Cuántas jugadas distintas pueden efectuarse?
  - e. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse las letras de la palabra "LIBRO"?

Resolución de problemas

6. Sandra pone, cada día, libros de consulta en su estantería al llegar a casa. Allí están los seis libros que utiliza con mayor frecuencia. ¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?
7. Con las letras de la palabra "AMIGO",
- a. ¿cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse?
  - b. ¿cuántas empiezan por A? ¿Cuántas empiezan con "AMI"?

8. En un colegio, las seis aulas de un pasillo están destinadas a los seis grupos de décimo grado.



¿De cuántas formas pueden distribuirse esos seis grupos en este pasillo?

9. Se tienen seis tarros de pintura de distintos colores y se quiere pintar cada cara de un cubo de un color distinto. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerse?

10. En un banquete de bodas, hay mesas redondas con capacidad para ocho personas.

- a. ¿De cuántas formas podrán sentarse en una de las mesas?
- b. ¿Cuántas distribuciones diferentes habrá en una mesa en la que dos personas quieren estar juntas?

11. A una reunión de alcaldes, acudieron doce mandatarios locales.



- a. A la hora de tomar una foto conmemorativa se ubicaron en fila. ¿De cuántas formas distintas pudieron ubicarse?
- b. A la hora de comer se sentaron en una mesa circular. ¿De cuántas maneras distintas pudieron ubicarse?

12. En el banquete que sigue a una boda, diez personas se sientan en la mesa principal, incluidos los novios. Si la mesa es lineal, ¿de cuántas formas distintas pueden ubicarse con la condición de que los novios no se separen? ¿Y si la mesa es circular, con la misma condición?

Ejercitación

- 4.
- a. 120    b. 40 320    c. 5040
  - d. 48    e. 120    f. 3 628 800

Razonamiento

- 5.
- a. 24 y 6    b. 720 formas distintas
  - c. 5 040    d. 13 983 816
  - e. 120 formas distintas

Resolución de problemas

6. 720 ordenaciones
- 7.
- a. 120 ordenaciones
  - b. 24 ordenaciones; 2 ordenaciones
8. 36 formas
9. 30 formas distintas
- 10.
- a. 5 040 formas diferentes
  - b. 1 440 distribuciones diferentes
- 11.
- a. 479 001 600 formas diferentes.
  - b. 399 16 800 distribuciones diferentes
12. 725 760 y 80 640 formas diferentes, respectivamente.

## Ampliación conceptual

También se conoce como variaciones ordinarias de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  (de orden  $n$ ) y son los distintos grupos de  $n$  elementos distintos que se pueden formar con los  $m$  elementos que tenemos, de manera que dos grupos se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación. Se representa por  $V_{m,n}$  ( $n \leq m$ ).

Por ejemplo para construir todas las posibles variaciones sin repetición del conjunto  $A = \{1,2,3,4\}$  se procede así:

De un elemento. Únicamente podremos hacer cuatro grupos: 1, 2, 3, 4.  $V_{4,1} = 4$

De dos elementos. Se obtienen: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.  $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

De tres elementos. Se obtienen: 123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.  $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

De cuatro elementos. Se obtienen: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.  $V_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Plantear el problema: A un concurso literario se han presentado 10 candidatos con sus novelas. El cuadro de honor lo forman el ganador, el finalista y un accésit. ¿Cuántos cuadros de honor se pueden formar?
- Construir las variaciones posibles, con los estudiantes.
- Comprobar el número de variaciones desarrolladas, con la fórmula.

## 7 Variaciones y combinaciones

### Explora

Se organizó un torneo benéfico con cuatro equipos profesionales de fútbol.



- Calcula de cuántas formas distintas pueden otorgarse los títulos de campeón y subcampeón.

### Ten en cuenta

Con un diagrama de árbol puede determinarse el número de maneras en que puede suceder una experiencia u ocurrir algún evento.

### 7.1 Variaciones sin repetición

Para calcular de cuántas formas distintas pueden otorgarse los títulos de campeón y subcampeón en este torneo, se representa a cada equipo con una letra: A, B, C y D; y se elabora el diagrama de árbol de la Figura 1.

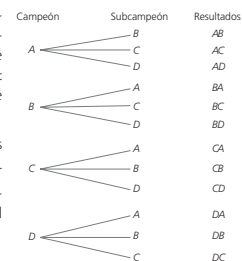


Figura 1

- Cualquiera de los cuatro equipos puede obtener el título de campeón.
- Una vez concedido dicho título, quedan tres candidatos posibles para el de subcampeón.

Por lo tanto, hay  $4 \cdot 3 = 12$  formas diferentes de adjudicar los títulos.

A las distintas ordenaciones se les llama **variaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos**.

Las variaciones sin repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  ( $n \leq m$ ) son los distintos grupos que pueden formarse con los  $m$  elementos, de manera que:

- En cada grupo haya  $n$  elementos diferentes.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de variaciones sin repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  se representa por  $V_{m,n}$  y es igual a:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

### Ejemplo 1

Observa algunas aplicaciones de las variaciones sin repetición.

- En un colegio se organiza un concurso de resolución de problemas entre 150 estudiantes de décimo año. Se entregarán paquetes de libros de diferentes cantidades a los cuatro estudiantes mejor clasificados.

Como se trata de averiguar las variaciones de 150 elementos tomados de 4 en 4, entonces se aplica la fórmula estudiada, así:

$$V_{150,4} = \frac{150!}{(150-4)!} = 150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 = 486\,246\,600$$

- Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 pueden formarse 360 variaciones sin repetición de números de cuatro cifras porque:

$$V_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

- Para determinar cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los números 0, 1, 2, 3, 4 y 5 ( $V_{5,3}$ ), deben descartarse los números de tres cifras que empiezan por 0 ( $V_{5,2}$ ). Es decir, pueden formarse:

$$V_{5,3} - V_{5,2} = (6 \cdot 5 \cdot 4) - (5 \cdot 4) = 120 - 20 = 100 \text{ números distintos}$$

Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar métodos de conteo (variaciones, combinaciones) en el cálculo de probabilidades.

**7.2 Variaciones con repetición**

Las variaciones con repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  son los distintos grupos que pueden formarse con los  $m$  elementos, de manera que:

- En cada grupo haya  $n$  elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de variaciones con repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  se representa por  $VR_{m,n}$  y es igual a:

$$VR_{m,n} = m^n.$$

**Ejemplo 2**

Se lanzan tres monedas distintas al aire: una de 1 ctv, otra de 10 cts. y otra de 50 cts. Luego, se anota el resultado de las caras superiores. Se representa por C si aparece cara y por X si sale sello en cada una de las monedas, y se hace un diagrama de árbol como el de la Figura 2

- Para la moneda de 1 ctv. pueden obtenerse dos resultados distintos.
- Para la de 10 cts. pueden conseguirse dos resultados diferentes.
- Y para la de 50 cts. también puede haber dos resultados distintos.

Por lo tanto, pueden obtenerse:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8 \text{ resultados diferentes}$$

Las distintas ordenaciones que acaban de hallarse se llaman **variaciones con repetición de dos elementos tomados de tres en tres**.

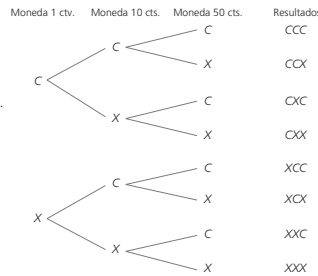


Figura 2

**Ten en cuenta**

La diferencia entre las variaciones sin repetición y las variaciones con repetición consiste en que en las primeras, cada grupo tiene elementos diferentes, mientras que en las segundas, cada grupo puede tener elementos diferentes o repetidos.

**Ejemplo 3**

Para averiguar cuántos números distintos de cuatro cifras pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, se tiene en cuenta que los grupos que pueden obtenerse son:

$VR_{10,4}$  pero hay que descontar los que empiezan por 0, es decir,  $VR_{10,3}$

Luego, los números diferentes de cuatro cifras que pueden formarse son:

$$VR_{10,4} - VR_{10,3} = 10^4 - 10^3 = 9000$$

**7.3 Combinaciones sin repetición**

Las combinaciones sin repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  ( $n \leq m$ ) son los distintos grupos que pueden formarse con los  $m$  elementos, de manera que:

- En cada grupo haya  $n$  elementos diferentes.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento, pero no en el orden de ubicación.

El número de combinaciones sin repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  se representa por  $C_{m,n}$  y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

APLICA © EDICIONES SM

**Ampliación conceptual**

Las variaciones con repetición de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  son los distintos grupos formados por  $n$  elementos de manera que:

- No entran todos los elementos si  $m > n$ . Sí pueden entrar todos los elementos si  $m \leq n$
- Sí importa el orden.
- Sí se repiten los elementos.

Para calcular el número de variaciones se utiliza la expresión  $VR_m^n = m^n$

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Plantear el problema: ¿Cuántos números de tres cifras podré formar con los dígitos 1, 2, 3?
- Construir las variaciones posibles con repetición, con participación de los estudiantes, primero de un dígito, luego de dos dígitos y finalmente de tres dígitos. Ayúdese del siguiente cuadro:

Tipo de variación con repetición	Números
<b>VR1/3</b> Con un dígito o unitarias: Se escriben los elementos del conjunto.	1, 2, 3
<b>VR3/2</b> Con dos dígitos o binarias: Se escriben en una columna las variaciones unitarias con repetición y se le añaden a la derecha todos y cada uno de los elementos del conjunto.	11 12 13 21 22 23 31 32 33
<b>VR3/3</b> Con tres dígitos o ternarias: Se escriben en una columna las variaciones binarias con repetición y se le añaden a la derecha todos y cada uno de los elementos del conjunto.	111 112 113 121 122 123 131 132 133 211 212 213 221 222 223 231 232 233 311 312 313 321 322 323 331 332 333

## Ampliación conceptual

Se llaman también combinaciones ordinarias de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  (de orden  $n$ ) y son los distintos grupos de  $n$  elementos distintos que se pueden formar con los  $m$  elementos que se tiene, de manera que dos grupos se diferencian en algún elemento y no en el orden de colocación. Se representa por  $C_{m,n}$ . ( $n \leq m$ ).

Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  entonces todas las combinaciones posibles sin repetición son:

De un elemento. Únicamente podremos hacer cuatro grupos: 1, 2, 3, 4.

De dos elementos. Añadimos a los grupos anteriores sólo los elementos posteriores. Se obtienen: 12, 13, 14, 23, 24, 34.

De tres elementos. Se pueden construir a partir de las anteriores añadiendo a cada combinación de orden dos los elementos posteriores al segundo. Se obtienen: 123, 124, 134, 234.

De cuatro elementos. Se pueden obtener a partir de las de orden tres, añadiendo a cada una de ellas los elementos posteriores al tercer elemento. Se obtiene: 1234.

El número de combinaciones posibles se calcula mediante:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n^n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Plantear el problema: Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 ¿cuántos productos diferentes puede conseguir si las toma de 2 en dos y cuáles son los factores?
- Construir las combinaciones posibles, con los estudiantes.
- Comprobar el número de combinaciones desarrolladas, con la fórmula.

## 7

## Variaciones y combinaciones

### Actividades resueltas

#### Resolución de problemas

- Las tarjetas de crédito tienen, aparte de los datos del titular, 16 dígitos.
  - ¿Cuántas tarjetas de crédito diferentes pueden hacerse?

#### Solución:

Para determinar cuántas tarjetas de crédito diferentes pueden hacerse, se debe calcular cuántas codificaciones diferentes de 16 cifras pueden formarse con los 10 dígitos.

Es decir, debe determinarse el valor de  $VR_{10,16}$  así:

$$VR_{10,16} = 10^{16}$$

Pueden hacerse un total de  $10^{16}$  tarjetas de crédito diferentes, es decir, 10 000 billones de tarjetas.

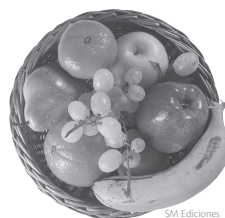
- Juan quiere preparar jugos combinados con dos frutas diferentes. Tiene
  - manzanas, naranjas, peras y uvas. ¿Cuántos sabores puede conseguir?

#### Solución:

Cada una de las cuatro variedades de fruta puede combinarse con las tres restantes, por lo que habrá, en principio,  $4 \cdot 3 = 12$  sabores; pero de ellos solo puede considerarse la mitad, ya que el jugo de manzana y naranja es el mismo que el de naranja y manzana (no importa el orden en que se mezclen las frutas).

Este razonamiento es equivalente a  $C_{4,2} = \frac{V_{4,2}}{P_2^2}$ , por lo cual:

$$C_{4,2} = \frac{V_{4,2}}{P_2^2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ sabores.}$$



SM Ediciones

## MatemáticaS

### Halla variaciones sin repetición en GeoGebra

En GeoGebra puede calcularse el número de variaciones sin repetición de un experimento conociendo los  $p$  elementos tomados de un conjunto de  $n$ , escribiendo en la caja de CAS (Cálculo Simbólico) las palabras "nPr" junto con los dos números dentro de corchetes separados por una coma.

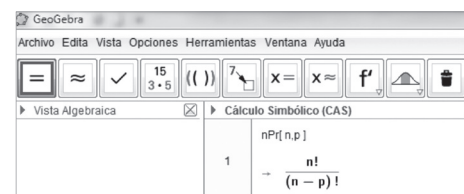
- Observa cómo se halla el número de variaciones sin repetición de  $p$  elementos tomados de un conjunto de  $n$  elementos.

- Se escribe en la barra de entrada o en CAS:

$$nPr[p,n].$$

- Luego, se da enter en el teclado y el resultado aparece como se muestra en la imagen de la derecha.

- Halla el número de variaciones sin repetición de siete elementos tomados de un conjunto de cinco.



APLICA © EDICIONES SM

Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar métodos de conteo (variaciones, combinaciones) en el cálculo de probabilidades.

Desarrolla tus destrezas

Resolución de problemas

- 3 En una carrera participan 16 caballos y solo se adjudican tres premios.



Suponiendo que no pueden llegar a la meta al mismo tiempo, ¿de cuántas maneras pueden otorgarse los diferentes premios?

- 4 Una asociación ecológica está conformada por 30 socios fundadores. Si tienen que elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero, ¿de cuántas formas diferentes pueden cubrirse esos cargos?

- 5 ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los dígitos impares? ¿Y con los pares?

- 6 Una ruta de bus intercantonal recorre diez poblaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendrán que imprimirse teniendo en cuenta que en cada billete figura, en primer lugar, la localidad de origen, seguida de la localidad de destino y, por último, dice si el billete es solo de ida o de ida y vuelta?

- 7 Para un nuevo club deportivo, quiere diseñarse una bandera tricolor, con tres colores distintos, que conste de tres franjas verticales. Si para crearla se dispone de diez colores distintos, ¿cuántas banderas diferentes pueden hacerse?

- 8 Se lanzan dos dados cúbicos de diferentes colores con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse? ¿Y si son tres dados?

- 9 Las matrículas de los vehículos en cierto país están representadas por cuatro números seguidos de tres letras, tomadas de entre 20 consonantes. ¿Cuántos automóviles podrán matricularse con este sistema?

- 10 Se puede entrar y salir de un polideportivo por cinco puertas diferentes. ¿De cuántas maneras puede una sola persona acceder y salir del mismo?

- 11 En una revista, cada semana tienen una sección donde se analizan los signos del zodiaco. A cada uno de los doce signos se le asigna un número entero entre 0 y 5 en las categorías de salud, dinero, amor, amistades y familia. ¿Cuántos horóscopos distintos puede hacer la revista cada semana?

- 12 Los números de los billetes de cierta lotería tienen cinco cifras que pueden repetirse. Si, por error, un día se les olvida incluir el número 0 entre las cinco bolas, ¿cuántos posibles números habrá como candidatos al premio?

- 13 Al girar una ruleta puede salir como resultado cualquier número natural comprendido entre 0 y 36, incluidos estos dos números.



Si se gira la ruleta tres veces, ¿cuántos resultados pueden obtenerse?

- 14 Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ¿cuántos productos distintos pueden obtenerse al multiplicar cuatro de ellos que sean diferentes? ¿Y si se multiplican cinco diferentes?

- 15 Diez pueblos se encuentran comunicados mediante caminos, de forma que hay uno que une entre sí cada par de pueblos. ¿Cuántos caminos diferentes hay?

- 16 Con diez puntos del espacio, de los que tres no están nunca alineados, ¿cuántos triángulos distintos pueden formarse?

- 17 Una empresa ofrece cinco plazas vacantes. Tres de ellas corresponden a mujeres y dos a hombres. Se presentaron quince hombres y doce mujeres.

- a. ¿De cuántas formas distintas podrán cubrirse las vacantes, considerando que todas tienen igual salario?
- b. ¿De cuántas formas distintas podrán cubrirse las vacantes si las plazas de las mujeres tienen todas distinto salario?

APLICA © EDICIONES SM

Resolución de problemas

3. 3 360 formas distintas
4. 657 720 formas diferentes
5. 60 y 48 números diferentes, respectivamente.
6. 180 billetes distintos
7. 720 banderas distintas.
8. 36 y 216 resultados diferentes, respectivamente.
9. 80 000 000 matrículas diferentes
10. 25 formas distintas
11. 93 312 horóscopos diferentes
12. 59 049 números distintos
13. 50 653 resultados diferentes
14. 126 productos diferentes en cada caso.
15. 190
16. 120 triángulos diferentes
17. a. 23 100 formas diferentes  
b. 138 600 formas diferentes

UNIDAD  
**6**

# Evaluación formativa

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Hallar el rango, de las edades de los padres de familia de décimo año de básica.  
29 35 48 64 37 45 33 29 55 33 36 48 61 54 50 40 37 44 56 46 51 43 59 48 38.

2. Hallar la media aritmética y la desviación estándar en las dos distribuciones dadas, luego interprete los resultados.

Calificaciones en Matemática décimo "A"	Calificaciones en Matemática décimo "B"
08 14 19 17 18 10 20	17 16 14 16 13 14 16
Media aritmética =	Media aritmética =
Desviación estándar =	Desviación estándar =

3. Completar la siguiente tabla de frecuencias y halle la desviación estándar de las edades de los estudiantes de un colegio.

x	f	f · x		
19	22		361	
18	76		324	
17	120		289	
16	148		256	
15	166		225	
14	150		196	
13	161		169	
12	175		144	
11	30		121	
Total				

4. Se lanza una moneda de cincuenta centavos, si sale cara (C) se lanza un dado y si sale 50 (N) se lanza la moneda nuevamente. Hallar mediante un diagrama de árbol cuáles opciones diferentes pueden ocurrir.

5. ¿De cuántas formas pueden sentarse 5 estudiantes en una fila de pupitres en una sala de clases?

6. Con las cifras 1, 2 y 3. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden escribir? ¿De estos números cuántos son pares?

1. Hallar el rango, de las edades de los padres de familia de décimo año de básica.  
29 35 48 64 37 45 33 29 55 33 36 48 61 54 50 40 37 44 56 46 51 43 59 48 38.

R. 35

2. Hallar la media aritmética y la desviación estándar en las dos distribuciones dadas, luego interprete los resultados.

Calificaciones en Matemática décimo "A"	Calificaciones en Matemática décimo "B"
08 14 19 17 18 10 20	17 16 14 16 13 14 16
Media aritmética = 15,14	Media aritmética = 15,14
Desviación estándar = 4,3	Desviación estándar = 1,39

Interpretación: La desviación estándar (4,3) obtenida en las calificaciones de décimo "A" es superior a la desviación estándar (1,39) obtenida en las calificaciones de décimo "B" por lo que se puede afirmar que en décimo las calificaciones se encuentran más dispersas. 3. Completar la siguiente tabla de frecuencias y halle la desviación estándar de las edades de los estudiantes de un colegio.

x	f	f · x	x <sup>2</sup>	f · x <sup>2</sup>
19	22	418	361	7 942
18	76	1 368	324	24 624
17	120	2 040	289	34 680
16	148	2 368	256	37 888
15	166	2 490	225	37 350
14	150	2 100	196	29 400
13	161	2 093	169	27 209
12	175	2 100	144	25 200
11	30	330	121	3 630
Total	1048	15 307		227 923

Desviación estándar = 2,08

4. Se lanza una moneda de cincuenta centavos, si sale cara (C) se lanza un dado y si sale 50 (N) se lanza la moneda nuevamente. Hallar mediante un diagrama de árbol cuáles opciones diferentes pueden ocurrir.

R. (C,1)(C,2) (C,3) (C,4) (C,5) (C,6) (N,C) (N,N)

5. ¿De cuántas formas pueden sentarse 5 estudiantes en una fila de pupitres en una sala de clases?

R. Se pueden sentar de 120 formas diferentes

6. Con las cifras 1, 2 y 3. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden escribir? ¿De estos números cuántos son pares?

$$VR_{3,5} = 3^5 = 243$$

$$VR_{3,4} = 3^4 = 81$$

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Calcular e interpretar las medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación típica) de un conjunto de datos en la solución de problemas.	1, 2, 3			
Elaborar diagramas de árbol de un conjunto de datos para la solución de problemas.	4			
Aplicar métodos de conteo (permutaciones sin repetición) en el cálculo de probabilidades. Pregunta	5			
Calcular el factorial de un número natural en el cálculo de probabilidades.	5, 6			
Aplicar métodos de conteo (variaciones, combinaciones) en el cálculo de probabilidades	6			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

## Ampliación conceptual

El número combinatorio o coeficiente binómico se define como el valor numérico de las combinaciones ordinarias (sin repetición) de un conjunto de  $m$  elementos tomados en grupos de  $n$ , siendo  $m$  y  $n$  dos números enteros y positivos. Matemáticamente, un número combinatorio se expresa como:

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Los números combinatorios se leen « $m$  sobre  $n$ »

### Propiedades de los números combinatorios

Primera propiedad de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

Segunda propiedad de los números combinatorios.

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Plantear el problema: En un torneo de tenis en el que participan 12 jugadores se pueden clasificar 3 jugadores para la final. ¿Cuántos grupos distintos de finalistas se pueden formar?
- Construir las combinaciones posibles, con participación de los estudiantes.
- Comprobar el número combinatorio desarrollado, con la aplicación de la fórmula.
- Comprobar las propiedades de los números combinatorios.
- Encontrar estos números combinatorios y verificar que corresponden al triángulo de Pascal.

8

## Números combinatorios

Cuando se expresa  $C_{mn}$  en forma factorial, se obtiene lo siguiente:

$$C_{mn} = \frac{V_{mn}}{P_n} = \frac{m!m-1!\dots(m-n+1)!}{n!} = \frac{m!m-1!\dots(m-n+1)!(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

El número  $C_{mn}$  se llama **número combinatorio**, se representa por  $\binom{m}{n}$  y se lee « $m$  sobre  $n$ ».

$$c_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Blaise Pascal diseñó una disposición triangular para los números combinatorios, como la que se observa en la Figura 1, en la cual cada número se obtiene sumando los dos ubicados en la parte superior, a excepción de los extremos, que son iguales a la unidad.

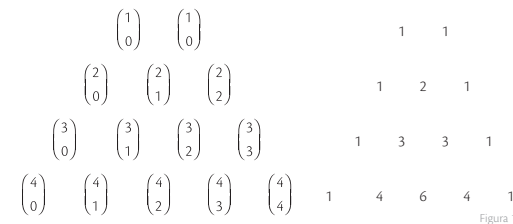


Figura 1

Este triángulo se conoce como **triángulo de Pascal**.

Los números combinatorios del triángulo de Pascal cumplen las propiedades que se mencionan a continuación:

- Todas las filas empiezan y acaban en 1:  $\binom{m}{0} = 1$  y  $\binom{m}{m} = 1$ .
- Todas las filas son simétricas:  $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ .
- Cada número se obtiene sumando los dos que tiene encima, excepto los extremos:  $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$ .

### Actividad resuelta

Razonamiento

- Calcula el valor de:  $\binom{35}{0}$ ,  $\binom{35}{35}$ ,  $\binom{35}{31}$ ,  $\binom{35}{4}$  y  $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$ .

Solución:

$$\binom{35}{0} = 1; \binom{35}{35} = 1; \binom{35}{31} = \frac{35!}{31!4!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31!}{31!4!} = 52\,360$$

$$\binom{35}{4} = \binom{35}{35-4} = \binom{35}{31} = 52\,360; \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

### Ten en cuenta



El matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662) contribuyó al desarrollo del cálculo y de la teoría de la probabilidad.

Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el factorial de un número natural y el coeficiente binomial en el cálculo de probabilidades.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina el valor de estos números combinatorios.

- a.  $\binom{6}{3}$
- b.  $\binom{7}{7}$
- c.  $\binom{9}{4}$
- d.  $\binom{7}{2}$
- e.  $\binom{8}{4}$
- f.  $\binom{10000}{9999}$
- g.  $\binom{5252}{5252}$
- h.  $\binom{8000}{0}$
- i.  $\binom{10^{10}}{1}$

Comunicación

3 Calcula el valor de  $\binom{15}{8} + \binom{15}{9}$  de dos formas distintas: con la fórmula de obtención de los números combinatorios y con las propiedades de dichos números.

4 Halla el valor de las siguientes expresiones.

- a.  $\binom{15}{7} + \binom{15}{8}$
- b.  $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} - \binom{9}{4}$
- c.  $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

5 Determina el valor de x en cada igualdad.

- a.  $\binom{52}{6} = \binom{52}{x}$
- b.  $\binom{x}{14} = \binom{x}{32}$
- c.  $\binom{14}{6} = \binom{14}{x}$
- d.  $\binom{16}{2x} = \binom{16}{x+1}$

6 Completa en tu cuaderno los recuadros con el número combinatorio correspondiente.

- a.  $\binom{8}{5} + \square = \binom{9}{6}$
- b.  $\square + \binom{11}{9} = \binom{12}{9}$

7 Determina en qué fila del triángulo de Pascal debe ir la siguiente fila.

1    6    15    20    15    6    1

8 Indica qué otro número combinatorio de la misma fila del triángulo de Pascal vale lo mismo que:

- a.  $\binom{15}{0}$
- b.  $\binom{15}{2}$

Modelación

9 Suma todos los términos de cada fila del triángulo de Pascal y averigua qué tipo de sucesión forman los resultados. Calcula el término general.

10 Lee y resuelve.

El desarrollo de la potencia  $(a + b)^n$  se calcula según la siguiente expresión que se conoce como **binomio de Newton**.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

Por ejemplo:

$$(2x + 3y)^3 = \binom{3}{0} (2x)^3 + \binom{3}{1} (2x)^2 (3y) + \binom{3}{2} 2x(3y)^2 + \binom{3}{3} (3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

a. Calcula el sexto término del desarrollo del binomio  $(2x + 5y)^{10}$ .

b. Determina el cuarto término del desarrollo del binomio  $(3a^2 - 2b^2)^5$ .

c. Desarrolla estas potencias:

$$(a^2 + 2b)^3 \qquad (a^2 - 2b)^5$$

$$(3x - 2y)^4 \qquad (3x - 2y)^6$$

Resolución de problemas

11 Sin realizar el desarrollo, halla:

- a. El término situado en el quinto lugar en el desarrollo del binomio  $(x + 4y)^{16}$ .
- b. El término ubicado en la octava posición en el desarrollo del binomio  $(a - 3b)^{14}$ .

12 En el desarrollo del binomio  $\left(5x - \frac{y}{4}\right)^9$ :

- a. Encuentra el coeficiente del monomio  $x^6y^7$ .
- b. Halla el coeficiente del monomio  $x^5y^4$ .
- c. Determina los coeficientes de los monomios que solo tienen x o y.

Ejercitación

- 2. a.20 b. 1 c. 126
- d.21 e. 70f. 10000
- g. 1 h. 1 i.  $10^{10}$

Comunicación

3. 11440

4. a. 12 870 b.0 c.15

5. a.  $x = 6$  b.  $x = 46$   
c.  $x = 8$  d.  $x = 1$  o  $x = 5$

6. a.  $\binom{8}{6}$  b.  $\binom{11}{8}$

7. Es la fila número 6.

8. a.  $\binom{15}{15}$  b.  $\binom{15}{13}$

Modelación

9.  $s_n = 2^n$

10. a.  $25\,200\,000x^5y^5$  b.  $8b^6$

$$c. (a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

$$\bullet (a - 2b)^5 = a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$$

$$\bullet (3x - 2y)^4 = 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$$

$$\bullet (3x - 2y)^6 = 729x^6 - 291x^5y + 4860x^4y^2 - 4320x^3y^3 + 2160x^2y^4 - 576xy^5 + 64y^6$$

Resolución de problemas

11. a.  $465920x^{12}y^4$  b.  $-7\,505\,784a^7b^7$

12. a.  $\frac{-225}{4096}$  b.  $\frac{196875}{128}$  c.  $1\,953\,125$  y  $\frac{-1}{262\,144}$

## Recomendaciones para desarrollar la lección

- Verificar que conocen los estudiantes sobre los experimentos aleatorios y determinantes.
- Presentar un listado de experimentos para que identifiquen los estudiantes si son aleatorios o determinantes con el razonamiento respectivo. Por ejemplo:
  - Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo.
  - Pesar un litro de aceite.
  - Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.
  - Elegir sin mirar una ficha de dominó.
  - Averiguar el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.
  - Sacar una bola de una bolsa con 4 bolas rojas.
  - Sacar una bola de una bolsa con 1 bola roja, 1 verde, 1 azul y 1 blanca.
  - Lanzar al aire una moneda y observar el tiempo que tarda en llegar al suelo.
- Encontrar el espacio muestral de los experimentos aleatorios seleccionados, con participación de los estudiantes.

## Actividades colaborativas

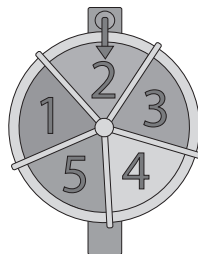
- Organizar a los estudiantes en grupos de trabajo.
- Asignar al azar uno de los siguientes experimentos:
  - Lanzamiento de tres monedas.
  - Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
  - Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
  - El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos.
- Analizar si son experimentos aleatorios o no. En caso de ser aleatorios especificar el espacio muestral.

9

## Experimentos aleatorios. Sucesos

### Explora

Se hace girar una ruleta con los números del 1 al 5 y se anota el número obtenido.



- ¿Puede predecirse el resultado que se consigue cada vez que se lleva a cabo este experimento?

### Ten en cuenta

Los sucesos pueden representarse mediante un diagrama de Venn. En la Figura 1, se representan dos sucesos contrarios.



Figura 1

### 9.1 Experimentos aleatorios

En este caso, la respuesta es no. Por muchas veces que se repita el experimento, jamás podrá predecirse el resultado. Se trata de un **experimento aleatorio**.

Por el contrario, los experimentos cuyo resultado es predecible, como anotar a qué hora sale el sol cada mañana, se denominan **experimentos deterministas**.

Un **experimento aleatorio** es una acción o un ensayo en el que no puede predecirse el resultado que va a obtenerse antes de realizarlo.

#### Ejemplo 1

Se consideran los siguientes experimentos:

- Lanzar un dado.
- Extraer una carta de una baraja española.
- Averiguar qué número está pensando una persona.
- Determinar la relación entre el perímetro y el diámetro de una serie de circunferencias.
- Averiguar cuál es el próximo día que habrá luna llena.
- Medir la aceleración de un objeto que se deja caer al vacío.

En los tres primeros experimentos, por muchas veces que se repita la experiencia, no puede conocerse el resultado. Por lo tanto, son experimentos aleatorios.

En los tres últimos experimentos, puede conocerse el resultado antes de realizarlos. De modo que son experimentos deterministas.

### 9.2 Espacio muestral

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se denota con  $E$ .

#### Ejemplo 2

- En el experimento aleatorio de lanzar dos monedas al aire y anotar sus resultados, tal que  $C$  es cara y  $S$  es sello, el espacio muestral es:

$$E = \{CC, CS, SC, SS\}.$$

- El espacio muestral en el experimento de lanzar un dado y anotar los puntos obtenidos es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

### 9.3 Tipos de sucesos

Un **suceso aleatorio** es un subconjunto del espacio muestral. Los tipos de sucesos son: **elemental**, **compuesto**, **seguro**, **imposible** y **contrario**.

- Suceso elemental** es el que tiene un solo resultado.
- Suceso compuesto** es el formado por más de un resultado.
- Suceso seguro** es el que siempre se realiza. Se designa por  $E$ .
- Suceso imposible** es el que nunca se realiza. Se designa por  $\emptyset$ .
- Suceso contrario** del suceso  $A$  ( $\bar{A}$ ) es el que se realiza cuando no ocurre el de  $A$ .

Bloque de Estadística y probabilidad

**Destreza con criterios de desempeño:** Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

**Ejemplo 3**

Si nuevamente se considera el experimento de girar la ruleta con los números del 1 al 5 y anotar el número obtenido, se halla que:

- El espacio muestral es  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- Cualquier subconjunto del espacio muestral como, por ejemplo,  $\{2\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$  o el propio  $E$  es un suceso aleatorio.
- El suceso A: "Salir el 1" =  $\{1\}$  o el B: "Salir el 4" =  $\{4\}$  son sucesos elementales por estar compuestos de un solo resultado.
- El suceso C: "Salir un número impar" =  $\{1, 3, 5\}$  o el D = "Salir un número inferior a 5" =  $\{1, 2, 3, 4\}$  son sucesos compuestos por estar formados por más de un resultado.
- El suceso  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  es un suceso seguro, ya que al girar la ruleta es indudable que se obtendrá uno de esos números.
- El suceso F: "Salir un número negativo" es un suceso imposible, porque al girar la ruleta no es posible que se consiga un número negativo.
- El suceso "Salir un número par" =  $\{2, 4\}$  es un suceso contrario de C y se representa por  $\bar{C}$ .

**9.4 Operaciones con sucesos**

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso unión de A y B** el que se realiza cuando se lleva a cabo al menos uno de los sucesos A o B. Se designa por  **$A \cup B$** .

El suceso  $A \cup B$  está formado por todos los puntos muestrales que pertenecen a alguno de los dos sucesos A y B.

**Ejemplo 4**

Se lanza un dado cúbico con sus caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado. Luego, se consideran los sucesos:

A: "Salir un número impar"  $\Rightarrow A = \{1, 3, 5\}$

B: "Salir un número primo"  $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

El suceso unión de A y B, o sea, "Salir un número impar" o "Salir un número primo" ocurrirá cuando se lleve a cabo el suceso A o el suceso B. Por lo tanto:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso intersección de A y B** el que se produce cuando se llevan a cabo simultáneamente los sucesos A y B. Se designa por  **$A \cap B$** .

El suceso  $A \cap B$  está formado por todos los puntos muestrales comunes a los dos sucesos A y B.

**Ejemplo 5**

Continuando con el experimento y los sucesos del ejemplo anterior, se considera ahora el suceso D: "Salir un número impar y salir un número primo". Este suceso se producirá si se realizan a la vez los sucesos A y B. Por lo tanto:

$$A \cap B = \{3, 5\}.$$

**Ten en cuenta**

El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se llama espacio de sucesos. Se designa por S.

**Razonamiento matemático**

**Sucesos aleatorios**

En una ciudad se ha instalado un semáforo en un cruce que da paso a la derecha, a la izquierda y hacia delante.

Si llegan dos automóviles al cruce, responde:



- ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
- ¿Cuáles son los elementos del suceso: "uno de los dos automóviles girará"?
- ¿Cuáles son los elementos del suceso: "los dos automóviles siguen la misma ruta"?

**Ampliación conceptual**

Un suceso A esta incluido ( contenido ) en otro suceso B si todo suceso elemental de A pertenece también a B. Se representa.  $A \subset B$

Dos sucesos A y B son iguales si están formados por los mismos sucesos elementales. Se representa  $A = B$ .

**Unión**

Si tenemos dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos **suceso unión** de A y B al suceso que se realiza cuando lo hacen A o B. Se representa  $A \cup B$ .

**Intersección**

Si tenemos dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos **suceso intersección** de A y B al suceso que se realiza cuando lo hacen A y B. Se representa  $A \cap B$ . Cuando  $A \cap B = \emptyset$ , decimos que los sucesos A y B son incompatibles. Cuando no sucede esto, decimos que A y B son compatibles.

**Sucesos contrarios**

Cuando la unión de dos sucesos es el espacio muestral y la intersección de los mismos conjuntos da el conjunto imposible, decimos que ambos sucesos son complementarios o contrarios.

Para un suceso cualquiera A de un experimento aleatorio, llamamos suceso contrario del suceso A al suceso que se verifica cuando no se verifica A, y recíprocamente. Se representa:  $\bar{A}$

**Recomendaciones para desarrollar la lección**

- Formar grupos de trabajos con los estudiantes.
- Asignar un experimento aleatorio para que encuentren el espacio muestral y planteen cinco sucesos.
- Resolver las operaciones con los sucesos planteados en cada grupo.
- Presentar los trabajos en reunión plenaria y hacer correctivos si amerita.

## Comunicación

3. a. Aleatorio,  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b. No es aleatorio

4. a.  $E = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$

b.  $E = \{\text{peón blanco, peón negro, torre blanca, torre negra, caballo blanco, caballo negro, alfil blanco, alfil negro, reina blanca, reina negra, rey blanco, rey negro}\}$ .

c.  $E = \{(CCC), (CCX), (CXC), (XCC), (CXX), (XCX), (XXC), (XXX)\}$

d.  $E = \{200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 220, 222, 224, 226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 248, 250, 252\}$

e.  $E = \{AA, AM, AV, MM, MV, VV\}$

f. Se obtienen 36 elementos del espacio muestral. Verificar elementos.

5. a.  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$

$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\bar{B} = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

## 9

### Experimentos aleatorios. Sucesos

Si  $A$  y  $B$  son sucesos del mismo experimento aleatorio, se tiene que:

- Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A$  y  $B$  son **incompatibles**.
- Si  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces  $A$  y  $B$  son **compatibles**.

#### Ejemplo 6

Si se consideran ahora los sucesos:

$A$ : "Salir un número impar" =  $\{1, 3, 5\}$

$X$ : "Salir un múltiplo de 4" =  $\{4\}$

Es evidente que  $A \cap X = \emptyset$ , es decir, el suceso es imposible. Por lo tanto, los sucesos  $A$  y  $B$  son incompatibles.

#### Actividades resueltas

Ejercitación

1 Halla la unión e intersección de los sucesos indicados.

- a.  $A = \{2, 4, 7\}$  y  $B = \{3, 7, 9, 12\}$
- b.  $C = \{5, 6, 7\}$  y  $D = \{1, 3, 9, 11\}$

**Solución:**

a.  $A \cup B = \{2, 3, 4, 7, 9, 12\}$

$A \cap B = \{7\}$

b.  $C \cup D = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11\}$

$C \cap D = \emptyset$

**Resolución de problemas**

2 Se lanza un dado dodecaédrico, como el de la Figura 2, y se anota el resultado de la cara superior. Se consideran los siguientes sucesos:

$A =$  "Salir un número múltiplo de 4" =  $\{4, 8, 12\}$

$B =$  "Salir un número menor que 5" =  $\{1, 2, 3, 4\}$

$C =$  "Salir un número múltiplo de 5" =  $\{5, 10\}$

Forma los sucesos:

a.  $D =$  "Salir un número múltiplo de 4 o menor que 5"

b.  $F =$  "Salir un número múltiplo de 4 y menor que 5"

c.  $G =$  "Salir un número múltiplo de 4 y de 5"

**Solución:**

a. El suceso  $D =$  "Salir un número múltiplo de 4 o menor que 5" es:

$$D = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 12\}.$$

b. El suceso  $F =$  "Salir un número múltiplo de 4 y menor que 5" es:

$$F = A \cap B = \{4\}.$$

c. El suceso  $G =$  "Salir un número múltiplo de 4 y de 5" es:

$$G = A \cap C = \emptyset.$$

Los sucesos  $D, F$  y  $G$  se representaron mediante diagramas de Venn en las Figuras 3, 4 y 5, respectivamente.



Figura 2

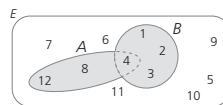


Figura 3

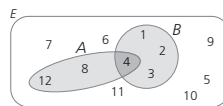


Figura 4

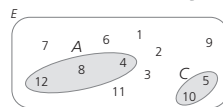


Figura 5

Bloque de Estadística y probabilidad


**Destreza con criterios de desempeño:** Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- Indica si los siguientes experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, describe el espacio muestral.
  - Hacer girar la flecha de una ruleta dividida en seis sectores numerados de 1 a 6.
  - Extraer una bola de la urna que contiene seis amarillas, dos azules, cuatro verdes y seis negras.
- Describe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.
  - Sacar de una caja una ficha de dominó teniendo en cuenta que solo contiene aquellas cuya suma de puntos es inferior a 5.
  - Extraer de una caja una de las piezas de ajedrez.
  - Lanzar tres monedas.
  - Escoger un número par entre los números 200 a 253.
  - Tomar dos bolas de una bolsa que contiene tres bolas azules, dos moradas y cuatro verdes.
  - Lanzar dos dados al mismo tiempo.
- Analiza las situaciones y luego, realiza lo que se indica en cada caso.
  - Se hace girar la ruleta (del 1 al 36) y se anota el resultado obtenido. Se consideran los siguientes sucesos: A: "Salir número par" B: "Salir divisor de 12" C: "Salir número menor que 10" D: "Salir número mayor que 10" Forma los sucesos A, B, C y D y sus contrarios.
  - Se lanza un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el número de puntos obtenidos.
    - ¿Es aleatorio este experimento?
    - Determina el espacio muestral.
    - Forma los sucesos contrarios de:
  $A = \{2, 4\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$  y  $C = \{3\}$ .
  - En una urna hay siete bolas numeradas del 1 al 7. Se extrae una bola al azar y se anota su número.
    - Explica si el experimento es aleatorio.
    - Determina el espacio muestral.
    - Forma dos sucesos compuestos y sus contrarios.

Resolución de problemas

- Una urna contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar y se anota su número. Considera  $A = \{2, 3, 5\}$ ,  $B = \{3, 8\}$  y  $C = \{1, 2, 5, 7\}$ . Halla los siguientes sucesos.
  - $A \cup B$
  - $A \cup C$
  - $B \cup C$
  - $A \cap B$
  - $A \cap C$
  - $B \cap C$
- Se realiza el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.
 
  - Escribe un ejemplo de dos sucesos que sean contrarios. ¿Son incompatibles?
  - Muestra dos sucesos que sean incompatibles. ¿Son contrarios?
- Se lanza un dado con diez caras numeradas del 1 al 10 y se consideran los sucesos A: "Salir un número par" y B: "Salir un número múltiplo de 4". Encuentra  $\bar{A}$ ,  $A \cup B$  y  $\bar{A} \cup B$ . ¿Son incompatibles los sucesos A y B? Justifica tu respuesta.
- Al tomar una carta de una baraja de naipes se consideran los sucesos A: "Sacar un número"; B: "Sacar una figura"; y C: "Sacar un as". Halla los sucesos  $A \cup B$  y  $A \cup C$  y  $B \cup C$ . ¿Son compatibles B y C? ¿Por qué?
- Se extrae una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se consideran los siguientes sucesos.
  - A: "Salir un múltiplo de 3"
  - B: "Salir un múltiplo de 5"
  - C: "Salir un número par"
 Halla  $A \cup B$  y  $A \cup C$  y  $B \cup C$ . ¿Son compatibles B y C? ¿Por qué?
- Se considera un experimento aleatorio que consiste en sacar tres tornillos de una caja, que pueden estar en buen estado o defectuosos. Forma el espacio muestral y los sucesos A: "El último tornillo es defectuoso" y B: "Al menos dos tornillos son defectuosos".

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\bar{C} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

$$D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

$$\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

b. Sí es aleatorio

$$\bullet E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\bullet \bar{A} = \{1, 3, 5, 6\}; \bar{B} = \{2, 4, 6\}; \bar{C} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

c. Sí es aleatorio

$$\bullet E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\bullet A = \{1, 3\} \quad \bar{A} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{4, 5, 7\} \quad \bar{B} = \{1, 2, 3, 6\}$$

Resolución de problemas

6. a.  $A \cup B = \{2, 3, 5, 8\}$     b.  $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

c.  $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$     d.  $A \cap B = \{3\}$

e.  $A \cap C = \{2, 5\}$     f.  $B \cap C = \emptyset$

7. a. Dos sucesos contrarios son incompatibles.

b. Dos sucesos incompatibles no necesariamente son contrarios.

8.  $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ;  $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ;

$$\bar{A} \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

Los sucesos A y B no son incompatibles, pues

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

9. Sea  $O =$  oros,  $C =$  copas,  $E =$  espadas y  $B =$  bastos.

$$A \cup B = \{1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, 8B, 9B, 10B, 11B, 12B, 10C, 10E, 10O, 11C, 11E, 11O, 12C, 12E, 12O\}$$

$$A \cup C = \{1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, 8B, 9B, 10B, 11B, 12B, 1C, 1E, 1O\}$$

$$B \cup C = \{1B, 1C, 1E, 1O, 10B, 10C, 10E, 10O, 11B, 11C, 11E, 11O, 12B, 12C, 12E, 12O\}$$

Los sucesos B y C son incompatibles, pues  $B \cap C = \emptyset$ .

10.  $A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20\}$

$$A \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$$

$$B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$$

Los sucesos B y C son incompatibles, pues  $B \cap C = \emptyset$ .

11 Sean los

sucesos  $D =$  "el tornillo es defectuoso" y  $B =$  "el tornillo es bueno" ( $\bar{B} = D$ )

$$E = \{(BBB), (BBD), (BDB), (DBB), (DDB), (DBD), (BDD), (DDD)\}$$

$$A = \{(BBD), (DBD), (BDD), (DDD)\}$$

$$B = \{(DDB), (DBD), (BDD), (DDD)\}$$

# Ejercicios resueltos

## Ejercicios del libro Pág. 99 ejercicio 5

1. En un colegio hay la siguiente cantidad de estudiantes:

- En grado sexto hay EGB 112 estudiantes.
- En grado séptimo EGB 123 estudiantes.
- En grado octavo EGB 130 estudiantes.
- En grado noveno EGB 110 estudiantes.
- En grado décimo EGB hay 150 estudiantes.
- En grado primero BGU hay 146 estudiantes.

a. Elabora una tabla que contenga los anteriores datos.

b. Halla el rango.

c. Calcula la varianza y la desviación típica.

**Para resolver este problema sigo el siguiente proceso:**

- Leo detenidamente el problema hasta comprenderlo perfectamente.
- Elaboro la tabla de frecuencias según los datos del problema.

Grado	No de estudiantes	F	Desviación ( $x_i - \bar{x}$ )	( $x_i - \bar{x}$ ) <sup>2</sup>
Sexto	112	112	- 16,5	272,25
Séptimo	123	235	- 5,5	30,25
Octavo	130	365	1,5	2,25
Noveno	110	475	- 18,5	342,25
Décimo	150	625	21,5	462,25
1ero BGU	146	771	17,5	306,25
Total	771			1 415,5

- Reflexiono si en el problema trabajaremos con datos agrupados o no agrupados, en este caso no son agrupados.
- Identifico la acción que me permita solucionar el problema, misma que contesta la primera pregunta, en este caso:
- Se necesita saber el mayor dato y el menor para poder hallar el rango.
- $Rango = 150 - 110 = 40$
- Para calcular la varianza se requiere el valor de la media aritmética con la cual podemos hallar la desviación de cada dato que registramos en la tabla de frecuencias.
- $x = 771 / 6 = 128,5$  este valor se restará de cada dato  $x_i$  obteniendo  $x_i - \bar{x}$ . Hallamos el cuadrado de cada desviación, sumamos y dividimos para el número de datos hallando la varianza.
- $\alpha^2 = 1 415,5 / 771 = 1,84$
- Procedemos hallar la desviación típica para lo cual encontramos la raíz cuadrada de la varianza.  $\alpha = 1,36$
- Anotamos la respuestas contestando la preguntas del problema:
- **R. El rango es 40, la varianza es 1,84 y la desviación típica es 1,36.**

## Ejercicios del libro Pág. 201 ejercicio 5

2. En una heladería se venden conos de tres sabores: vainilla, fresa y mango; y se les pueden adicionar salsa de mora, crema de leche o leche condensada.

Dibuja un diagrama de árbol. ¿Cuántos productos diferentes pueden escogerse?

**Para resolver este problema uso el siguiente proceso:**

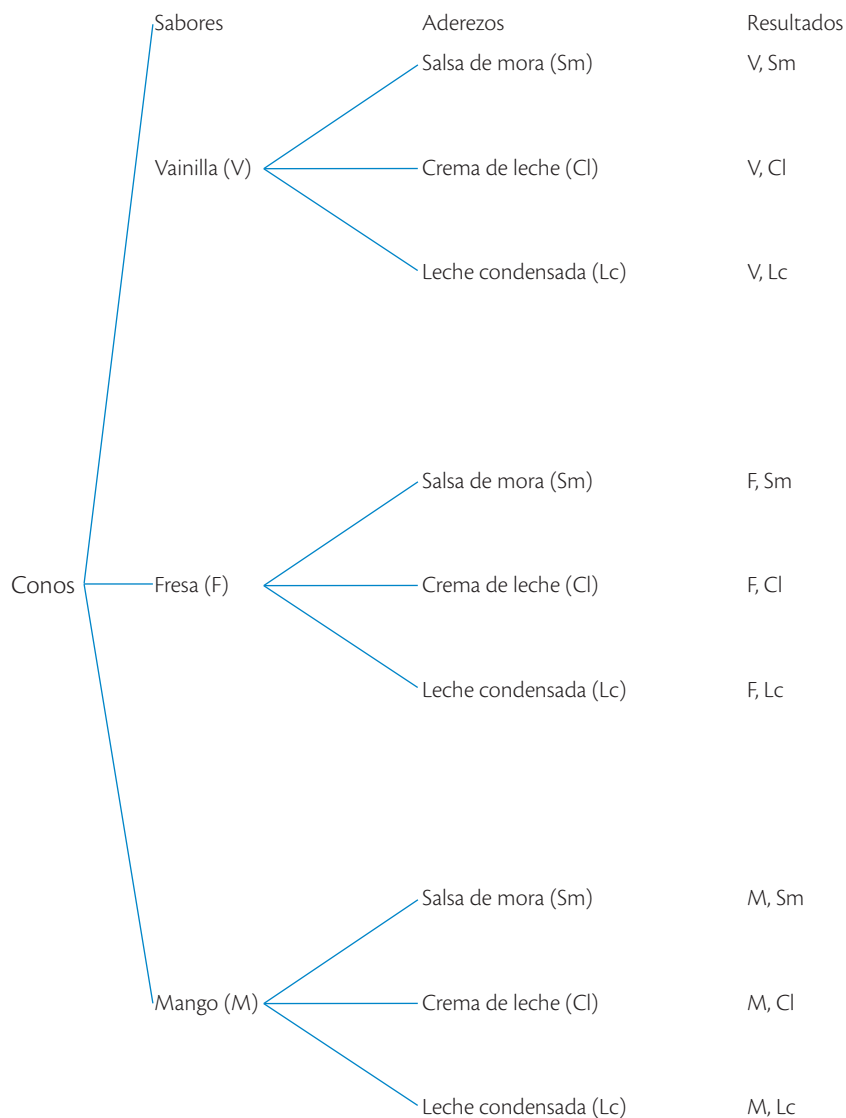
- Leo las veces necesarias el problema hasta interiorizarlo completamente.
- Identifico la acción que me permita solucionar el problema, misma que me permita contestar la pregunta, en este caso: Dibujar un diagrama de árbol.
- Escribo la respuesta contestando la pregunta del problema:

# Ejercicios resueltos

## Ejercicios del libro Pág. 203 ejercicio 6

3. Sandra pone, cada día, libros de consulta en su estantería al llegar a casa. Allí están los seis libros que utiliza con mayor frecuencia. ¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?

- Para resolver este problema uso el siguiente proceso:
- Leo varias veces el problema hasta interiorizarlo completamente.
- Registro los datos que intervienen en el problema, en este caso el número de libros que utiliza con mayor frecuencia.
- Identifico la operación que me permita hallar la respuesta, misma que conteste a la pregunta del problema. En este caso se trata de una permutación por lo cual determino la fórmula con la cual resuelvo el problema.  $Pe = n!$
- Reemplazo el dato obteniendo  $Pe = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- Escribo la respuesta contestando la pregunta del problema:
- R. El número de ordenaciones distintas son 720



R. Se pueden escoger 9 productos diferentes.

UNIDAD  
**6**

# Evaluación sumativa

Nombre:.....

Grado:..... Fecha:.....

 1. Hallar el valor de  $V_{6,2}$ 

Fórmula:

Cálculos:

Respuesta:

 2. Hallar el valor de  $VR_{6,2}$ 

Fórmula:

Cálculos:

Respuesta:

 3. Hallar el valor de  $P_4$ 

Fórmula:

Cálculos:

Respuesta:

 4. Hallar el valor de  $C_{6,2}$ 

Fórmula:

Cálculos:

Respuesta:

5. Hallar el valor de  $\left(\frac{11}{3}\right) + \left(\frac{11}{x}\right) = \left(\frac{12}{3}\right)$

6. Hallar el valor de  $\left(\frac{39}{5+2x}\right) = \left(\frac{39}{2x-2}\right)$

7. Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

A. Lanzar tres monedas. Llamar cara (C) y cruz (X)

B. Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.

C. Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas (B) y tres negras (N).

8. Del ejercicio anterior 7b, determinar los siguientes sucesos:

A. Salir múltiplo de 5.

B. Salir número primo.

C. Salir mayor o igual que 12.

# Prueba quimestral

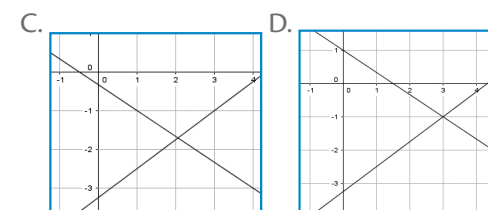
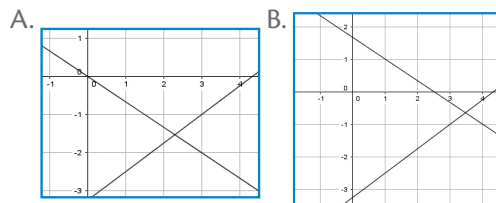


Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

- El valor exacto al resolver la operación:  
 $0,5 + \sqrt{27} + \sqrt{12} - \frac{3}{7} - 2\sqrt{2}$   
 A.  $\frac{9}{8} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$   
 B.  $\frac{8}{63} + 27\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$   
 C.  $\frac{8}{7} + 15\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$   
 D.  $\frac{8}{63} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
- Identifica cuál de los siguientes números se encuentra escrito en notación científica:  
 A.  $0,12 \times 10^3$                       B.  $12 \times 10^2$   
 C.  $1\ 200$                               D.  $1,2 \times 10^3$
- Determina cuál de las siguientes relaciones determina una función.  
 A.  $\{(2, 3); (-2, 4); (3, -5); (2, 2)\}$   
 B.  $\{(1, 3); (-2, 4); (3, -5); (2, 2)\}$   
 C.  $\{(2, 3); (-2, 3); (3, 3); (-3, 3)\}$   
 D.  $\{(0, 3); (-2, 4); (3, -5); (0, 2)\}$
- Identifica la pendiente de la siguiente recta:  
 $2(2y - 3x) + 5x - 2 = 4(2x + 3y)$   
 A.  $m = -\frac{9}{8}$   
 B.  $m = -\frac{1}{4}$   
 C.  $m = -2$   
 D.  $m = -3$

- Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2; -5) B (1, 3).  
 A.  $y = 8x - 11$                       B.  $y = -8x - 11$   
 C.  $y = -8x + 11$                       D.  $y = 8x + 11$
- Los tres puntos dados A(1, 1) B(7, 1) C(3, 3) ¿forman un triángulo rectángulo? Justifica tu respuesta.  
 A. No forman un triángulo rectángulo, el producto de las pendientes de las rectas que conforman cada ángulo no es menos uno.  
 B. No forman un triángulo rectángulo, el producto de las pendientes de las rectas que conforman cada ángulo no menos uno.  
 C. Sí forman un triángulo rectángulo, el producto de las pendientes de las rectas que conforman cada ángulo no es menos uno.  
 D. Sí forman un triángulo rectángulo, el producto de las pendientes de las rectas que conforman cada ángulo no menos uno.
- Dado el sistema  $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = 3 \end{cases}$  gráficalo y señala la solución.



- Resuelve el sistema lineal por el método de sustitución  $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = 3 \end{cases}$  y señala el enunciado correcto.  
 A. El sistema tiene infinitas soluciones.  
 B. El sistema no tiene solución.  
 C. El sistema tiene solución única.  
 D. La solución es  $x = 2, y = 0$ .
- Aplica el método de Gauss para resolver el sistema  $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 0,5x + 2,5y = 1 \end{cases}$  y considera las afirmaciones siguiente:  
 A. La solución está dado por el par (5, 2).  
 B. El sistema no tiene solución.  
 C. El sistema tiene infinitas soluciones.  
 D. La solución está dado por el par (1, -2).

10. Utiliza la regla de Cramer para resolver  $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = 3 \end{cases}$  y determina la representación correcta para calcular las variables.

A.  $x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 8; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 2$

B.  $x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 5; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 4$

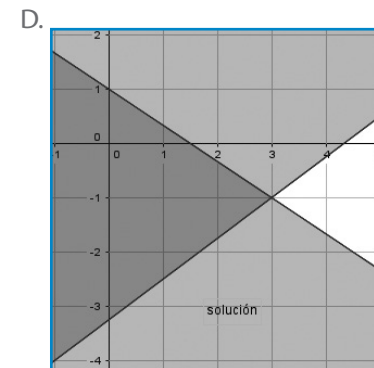
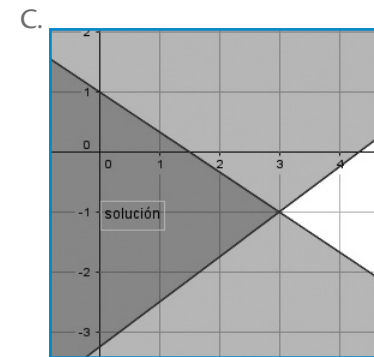
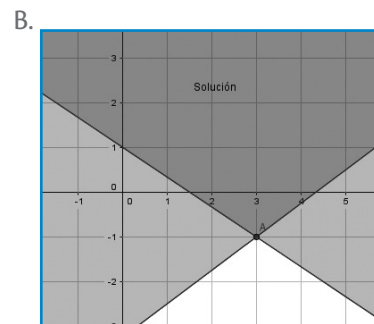
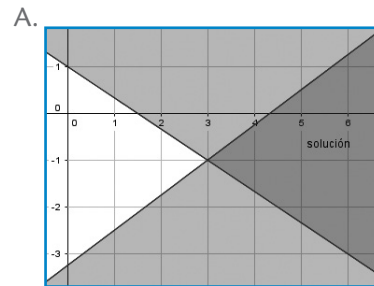
C.  $x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 3; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 2$

D.  $x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 3; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = 1$

11. El marcador de un partido de fútbol entre Liga y Nacional es sorprendente. Si le quitas un gol a Nacional y le pones a liga, quedan empates; si le quitas a Liga un gol y le pones a Nacional, este le gana por el doble, ¿cuál es el marcador sorprendente?

- A. Liga 7; Nacional 8
- B. Liga 3; Nacional 5
- C. Liga 9; Nacional 7
- D. Liga 7; Nacional 5

12. Encuentra el conjunto solución del sistema de inecuaciones  $\begin{cases} 3x - 4y \leq 13 \\ 3y + 2x \geq 3 \end{cases}$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

# Prueba quimestral

## 2

Nombre: .....

Grado: ..... Fecha: .....

1. Resuelve factorizando la ecuación  
 $2m^2 + 10m = 48$

- A.  $m_1 = -8; m_2 = 3$   
 B.  $m_1 = -8; m_2 = -3$   
 C.  $m_1 = 8; m_2 = 3$   
 D.  $m_1 = 8; m_2 = -3$

2. Resuelve completando el trinomio cuadrado perfecto  $m^2 + 5m = -6$

- A.  $m_1 = 2; m_2 = -3$   
 B.  $m_1 = -2; m_2 = 3$   
 C.  $m_1 = 2; m_2 = 3$   
 D.  $m_1 = -2; m_2 = -3$

3. Aplica la fórmula general para resolver  $m^2 + m = -3$  y analiza las raíces.

A.  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3}}{2 \cdot 1}$

el discriminante es positivo y tiene dos soluciones en los reales.

B.  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 + 4 \cdot 1 \cdot -3}}{2 \cdot 1}$

el discriminante es negativo y no tiene solución en los reales.

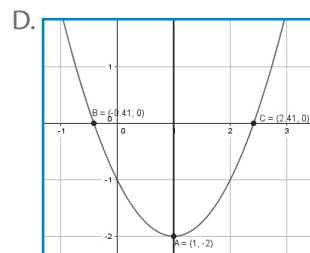
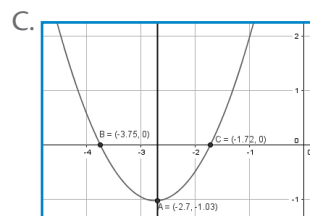
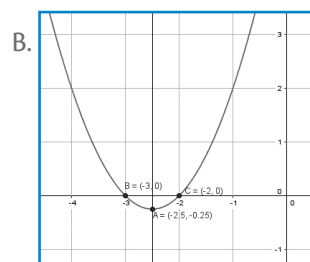
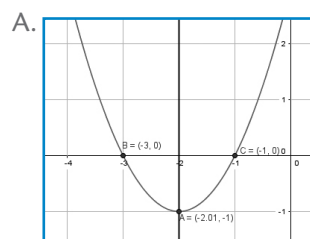
C.  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

el discriminante es negativo y no tiene solución en los reales.

D.  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

el discriminante es positivo y tiene dos solución en los reales.

4. Realiza un bosquejo (vértice, cortes y eje de simetría) de la función  $y = x^2 + 5x + 6$ .



5. Para un triángulo rectángulo en  $C = 90^\circ$ ,  $c = 5$ ,  $b = 3$  y  $a = 4$ . Expresa las razones trigonométricas del ángulo A.

A.  $\text{sen } A = \frac{5}{4}; \text{cos } A = \frac{3}{5}; \text{tan } A = \frac{4}{3};$

$\text{cot } A = \frac{3}{4}; \text{sec } A = \frac{5}{3}; \text{csc } A = \frac{4}{5}$

B.  $\text{sen } A = \frac{4}{4}; \text{cos } A = \frac{3}{5}; \text{tan } A = \frac{4}{3};$

$\text{cot } A = \frac{3}{4}; \text{sec } A = \frac{5}{3}; \text{csc } A = \frac{5}{3}$

C.  $\text{sen } A = \frac{5}{4}; \text{cos } A = \frac{5}{3}; \text{tan } A = \frac{3}{5};$

$\text{cot } A = \frac{3}{4}; \text{sec } A = \frac{5}{3}; \text{csc } A = \frac{5}{4}$

D.  $\text{sen } A = \frac{4}{5}; \text{cos } A = \frac{3}{5}; \text{tan } A = \frac{4}{3};$

$\text{cot } A = \frac{3}{4}; \text{sec } A = \frac{5}{3}; \text{csc } A = \frac{5}{4}$

6. Encuentra los valores exactos de las razones trigonométricas de un ángulo de  $150^\circ$

A.  $\text{sen } 150 = \frac{1}{2}; \text{cos } 150 = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{tan } 150 =$

$\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \text{cot } 150 = -\sqrt{3}; \text{sec } 150 =$

$-\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \text{csc } 150 = 2$

B.  $\text{sen } 150 = \frac{1}{2}; \text{cos } 150 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{tan } 150 =$

$\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \text{cot } 150 = -\sqrt{3}; \text{sec } 150 =$

$-\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \text{csc } 150 = 2$

C.  $\sin 150 = \frac{1}{2}$ ;  $\cos 150 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ;  $\tan 150 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$   
 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $\cot 150 = -\sqrt{3}$ ;  $\sec 150 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  $\csc 150 = 2$

D.  $\sin 150 = 2$ ;  $\cos 150 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ;  $\tan 150 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$   
 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $\cot 150 = -\sqrt{3}$ ;  $\sec 150 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  $\csc 150 = 1$

7. Resuelve el triángulo rectángulo en  $C = 90^\circ$ ,  $c = 10$  y  $b = 6$
- A.  $a = 8$ ;  $A = 56,13^\circ$ ;  $B = 30,87^\circ$   
 B.  $a = 8$ ;  $A = 53,13^\circ$ ;  $B = 36,87^\circ$   
 C.  $a = 8$ ;  $A = 58,13^\circ$ ;  $B = 31,87^\circ$   
 D.  $a = 8$ ;  $A = 52,13^\circ$ ;  $B = 37,87^\circ$
8. Determina el valor de la apotema de un pentágono cuyo lado es de 6cm.
- A. El apotema es de 6,13 cm  
 B. El apotema es de 3,13 cm  
 C. El apotema es de 5,13 cm  
 D. El apotema es de 4,13 cm

9. Calcula las medidas de tendencia central del siguiente grupo de datos: 6; 8; 8; 6; 4; 2; 8; 9.
- A. Media: 6,375; Moda: 8; Mediana: 7  
 B. Media: 6,375; Moda: 6; Mediana: 3  
 C. Media: 6,375; Moda: 6; Mediana: 4  
 D. Media: 6,375; Moda: 8; Mediana: 5
10. Calcula la varianza y la desviación típica de los datos del ejercicio anterior.
- A. Varianza: 3; Desviación típica: 1,73  
 B. Varianza: 4; Desviación típica: 2  
 C. Varianza: 2,23; Desviación típica: 1,49  
 D. Varianza: 4,98; Desviación típica: 2,23

11. En un restaurante preparan para el almuerzo sopa de fideo y sopa de legumbres; pollo, pescado y cerdo para el segundo; jugo de tomate y limonada; sandía, gelatina y pastel de postre, ¿cuántas opciones de almuerzo ofrece el restaurante si debe tener sopa, segundo, jugo y postre?
- A. 72 opciones de almuerzo  
 B. 36 opciones de almuerzo  
 C. 40 opciones de almuerzo  
 D. 20 opciones de almuerzo
12. En un curso hay 6 candidatos para la directiva, ¿cuántas posibilidades de formar la directiva hay, si debe conformarse con tres estudiantes?
- A. Hay 20 posibilidades  
 B. Hay 40 posibilidades  
 C. Hay 36 posibilidades  
 D. Hay 28 posibilidades

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

### 1- Unidad

#### Evaluación de la unidad

- Decimal periódico puro
  - Decimal infinito no periódico
  - Decimal periódico mixto
  - Decimal finito
- 1,6 Decimal finito
  - $\overline{1,461538}$  Decimal periódico puro
  - $0,91\overline{6}$  Decimal periódico mixto
  - 3,0 Decimal finito
- $\frac{\pi}{4} < 0,8$
  - $\sqrt{361} = 19$
  - $\sqrt{3} > 1,73$
  - $-\sqrt{5} < -2,24$
  - $9 > \sqrt{80}$
  - $-\sqrt{7} < -\frac{13}{5}$
  - $\frac{49}{20} = 2,45$
  - $-\frac{5}{9} = -\frac{10}{18}$
- a. V; b. V; c. F; d. V; e. V; f. V
- Siempre se cumple ya que  $ab + ac$  es la distributiva con respecto a la suma, por lo tanto  $\frac{a(b+c)}{a} = \frac{a}{a} \cdot (b+c) = 1 \cdot (b+c)$
- $(-\infty, -3)$
  - $[-8, \infty)$
  - $(-\infty, 10]$
  - $(-\infty, -6]$
- La expresión se cumple para  $\{a, b\} \in \mathbb{R}$
- b

- § 382918
- $9,4608 \times 10^{12}m$
- a
- a
- $3,3\pi \left( \sqrt{3x} + \frac{x}{4} \right)$
- d
- Las expresiones son equivalentes.

### 2- Unidad

#### Evaluación de la unidad

- b
- $y = 3x + 1$
- Respuesta abierta
- a. No    b. \$ 54000
- Decreciente
  - Vertical
  - Horizontal
  - Creciente
- $a. y = 5 - \frac{1}{2}x + 3$
- a. V    b. F    c. V    d. F    e. F
- $2c - 2; b - 3; c - 1; d - 4$

- a y c son impares. b es par.

### 3- Unidad

#### Evaluación de la unidad

- Falso
  - Falso
  - Falso
  - Verdadero
  - Verdadero
- b
- $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - y + 2 = 0 \\ \frac{1}{3}x - y - 1 = 0 \end{cases}$  solución (3,6; 0,2)
- Las medidas de los ángulos son 1608 y 208
- Tiene 41 carritos y 39 motos.
- $c = 0; a = 2b.$
- 49 y 21 años.
- El número que cumple las condiciones es el 48.
- a, b, d y f
- Verdadero
  - Falso
  - Falso
  - Verdadero
  - Verdadero
- $x = 7$  y  $y = 10$
- El sistema tiene infinitas soluciones si c o f son diferentes de cero. No tiene solución si  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ .
- Se encontrarán a 24 km de A y a 30 Km de B y habrán transcurrido 2,07 horas.
- Invirtió \$ 7 000 000.

- $x = 6; y = 5$

$$16. \begin{cases} y + x > 1 \\ y - x < -1 \\ x < 3 \end{cases}$$

### 4- Unidad

#### Evaluación de la unidad

- a. F; b. F; c. V; d. V; e. F
- c.  $3. k \in \left(-\infty, \frac{9}{8}\right)$
- No, ya que la gráfica no representa una función
- $x = 10$  cm
- $25y - 18$
- b, e, f.
- a. V; b. F; c. F; d. V; e. F
- No, son excluyentes, o son reales o son complejas.
- $k = -\frac{3}{4}$
- $y = x^2 - 12x + 32$
- 18 cm, 25 cm y 32 cm
- 90 cm y 120 cm
- 2,5 cm
- Aproximadamente 28,84 m.

## Solucionario

## Evaluaciones de las unidades

## 5- Unidad

## Evaluación de la unidad

1. a. 125,218      b. 1248  
 c.  $\frac{25\pi}{36}$       d. 125,58  
 e. 1258 39

2.  $90^\circ$ ;  $58,35^\circ$  y  $31,65^\circ$ .

3. El triángulo a.

4.  $A = 41,52 \text{ m}^2$

5.  $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

6.

$\cos\beta$	$\tan\beta$	$\cos(180 - \beta)$
0,82	0,69	-0,82

7. 41,81 km

8. No es posible.

9. a. V; b.F; c.F; d. F; e.V

10. La altura es 3,79 m y el ángulo es de  $71,63^\circ$ .

11.  $1\ 196,55 \text{ cm}^2$

12.  $V = 412,5 \text{ cm}^3$

13.  $V = \frac{64x(1 - \pi)}{3}$

## 6- Unidad

## Evaluación de la unidad

1. a. Cualitativa      b. Cualitativa  
 c. Cualitativa      d. Cuantitativa  
 e. Cuantitativa

2. a. V;   b. F;   c.; V

3.  $Q_1 = 41,5$ ;  $Q_2 = 46$ ;  $Q_3 = 51,5$

4. b. 28,3

5. 32 eventos posibles

6. 20 eventos

7. 720 eventos

8. c. 56

9. c. 297

10. a. Elemental      b. Imposible

c. Seguro      d. Compuesto

e. Aleatorio

11. b.

### 1 Unidad

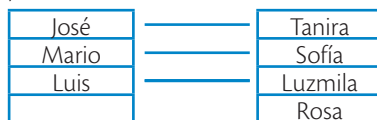
#### Evaluación sumativa

- C. expresión fraccionaria
- B. irreducible
- A. siempre se podrá encontrar entre dos números otro número racional.
- A.  $\frac{12}{20}$ ; B.  $\frac{21}{35}$ ; C.  $\frac{27}{45}$ ; D.  $\frac{24}{40}$
- A. >; B. <; C. >; D. <
- A.  $\frac{1}{4}$ ; B.  $\frac{157}{125}$ ; C.  $\frac{804}{99}$ ; D.  $\frac{2}{990}$
- 5 19 140
- $\sqrt[4]{2}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\pi$
- Intervalo: (-6, 2)
- A. ≠ porque, debe sumar y su exponente es cero; B. =; C. =; D. ≠ porque, la potenciación no es distributiva con respecto a la suma o resta.
- B.  $1,5 \cdot 10^2$
- B.  $\frac{10}{3}$
- C.  $\sqrt{3}$
- $\frac{\sqrt{2x-x}}{2-x}$

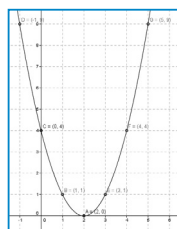
### 2 Unidad

#### Evaluación sumativa

- Hay varias respuestas, a continuación se presenta una alternativa:

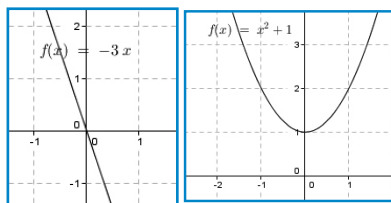


- 



Si  $x > 0$ , la función es creciente  
Si  $x < 0$ , la función es decreciente

- 



- Semejanzas:** Las gráficas de las dos funciones son una línea recta. Las dos funciones cortan en un punto al eje y.

**Diferencias:** Solo una de ellas pasa por el origen. Cuando la pendiente es cero, la función lineal se convierte en el eje de las x, mientras que la función afín puede ser cualquier horizontal.

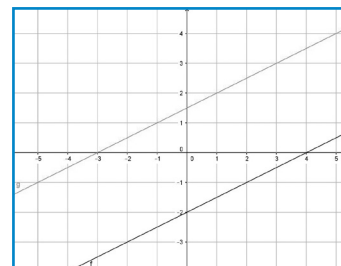
- Y =  $\frac{2}{3}x$

- Varias respuestas, la ecuación depende del otro punto que se fije. Por ejemplo para el punto (0,2) la ecuación es  $y=2$
- Varias respuestas. Sí se trata de un cuadrado porque al multiplicar la pendiente de la recta que pasa por BC con la pendiente de la recta que pasa por AB es -1.
- Varias respuestas  
Ecuación de la recta que pasa por AB  $y=x+2$   
Ecuación de la recta que pasa por DC  $y=x-2$   
Son paralelas, porque tienen la misma pendiente  $m=$
- Sí se cortan las dos rectas, porque tienen distinta pendiente y en estos casos, siempre se cortan las rectas.

### 3 Unidad

#### Evaluación sumativa

- 



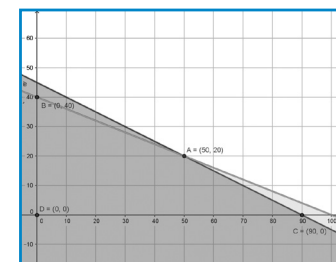
No hay solución porque es un sistema incompatible.

- Infinitas soluciones
- $x=3, y=1$

- No hay solución
- 1 892 bombillas buenas y 208 defectuosas
- $x=3, y=4$
- $x=11/3, y=-3/9$
- $x=12, y=-2$
- $x \in \left\{ \frac{5}{2}, +\infty \right\}$
- $x \in \left\{ -3, \frac{5}{2} \right\}$
- El sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 90 \\ 2x + 5y \leq 200 \end{cases}$$

donde  $x$  es el número de silla, y es número de mesas. Su gráfica es:



Los vértices de la región factible en el primer cuadrante son:

A = (50, 20); B = (0, 40); C = (90, 0) D = (0, 0)

A diario se producen 50 sillas y 20 mesas.

# Solucionario

## Evaluaciones sumativas

### 4- Unidad

#### Evaluación sumativa

- El dominio son todos los reales,  
El recorrido es  $y \geq 39/8$  (el recorrido es mayor que la segunda componente del vértice)  
Monotonía, es decreciente para  $y \leq -3/4$  y es creciente para  $y \geq -3/4.4$

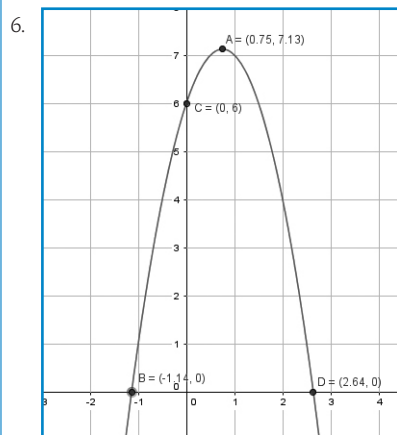
2.  $0 = x^2 - 3x - 108$

$0 = (x - 12)(x + 9)$

$x = 12 \text{ o } x = -9$

3.  $x = \frac{5}{4} \pm \frac{11}{2}$   
 $3 \pm \sqrt{41}$

- d. La función  $f(x)=x^{-4}$  es una función simétrica con respecto al eje y.



### 5- Unidad

#### Evaluación sumativa

1. a.  $30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

b.  $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

c.  $60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

2.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3. 1C, 2A, 3D, 4B

4. 120 m

$31/7$

5.  $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$

6.  $x^1 = 60^\circ + 180k, x^2 = 120^\circ + 180k$

7.  $38,04 \text{ cm}^2$

8.  $1\,092,57 \text{ cm}^2$

9.  $150 \text{ cm}^2$

10.  $= \frac{49}{2} (\pi - 1) \text{ cm}^2$

11.  $A_T = 1\,848,68 \text{ cm}^2; v = 5\,757,76 \text{ cm}^3$

12.  $A^t = 24 \sqrt{15} \text{ cm}^2; v = 96 \text{ cm}^3$

13.  $\frac{2\,048 \sqrt{5\pi}}{25} \text{ cm}^3$

7. a.  $E = \{ (C,C,C), (C,C,X), (C,X,C), (X,C,C), (C,X,X), (X,C,X), (X,X,C), (X,X,X) \}$

b.  $E = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$

c.  $E = \{BB, BN, NN\}$

8. a.  $\{5,10,15\}$

b.  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

c.  $\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

### 6- Unidad

#### Evaluación sumativa

1.  $v_{6,2=30}$

2.  $VR_{6,2=36}$

3.  $P_{4=24}$

4.  $C_{6,2=15}$

5.  $x = 2$

6.  $x = 9$

### 1- Quimestral

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

### 2- Quimestral

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

### Unidad 1

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	(A)	A	A	(A)	(A)	A	A	(A)	A	A	A	(A)
(B)	B	B	(B)	B	B	(B)	B	B	(B)	B	B	B	B	B	B
C	(C)	C	C	C	(C)	C	C	C	C	C	C	(C)	C	(C)	C
D	D	(D)	D	D	D	D	D	D	D	(D)	D	D	(D)	D	D

### Unidad 2

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(A)	A	A	A	A	A	(A)	A	(A)	A	A	(A)
B	B	(B)	B	B	B	B	B	B	(B)	B	B
C	(C)	C	C	C	(C)	C	C	C	C	(C)	C
D	D	D	(D)	(D)	D	D	(D)	D	D	D	D

### Unidad 3

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	(A)	A	(A)	A	(A)	A	(A)	A	(A)	A	(A)	(A)	(A)
(B)	B	(B)	B	B	B	(B)	B	(B)	B	B	B	(B)	B	B	B
C	(C)	C	C	(C)	C	C	C	C	C	(C)	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

### Unidad 4

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	(A)	A	A	A	A	A	(A)	A	(A)	(A)	A	A	A
B	(B)	B	B	B	(B)	B	B	B	B	B	B	B	B	B	(B)
C	C	(C)	C	C	C	C	C	(C)	C	(C)	C	C	C	(C)	C
(D)	D	D	D	(D)	D	(D)	(D)	D	D	D	D	D	(D)	D	D

### Unidad 5

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(A)	A	A	A	A	A	A	(A)	(A)	A	A	(A)	A	A	A	(A)
B	B	B	(B)	B	B	B	B	B	B	(B)	B	B	B	B	B
C	(C)	C	C	(C)	(C)	(C)	C	C	C	C	C	(C)	(C)	C	C
D	D	(D)	D	D	D	D	D	D	(D)	D	D	D	D	(D)	D

### Unidad 6

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	(A)	A	A	A	(A)	A	A	A	A	A	A	A	(A)	A
(B)	B	B	B	B	B	B	(B)	B	B	(B)	B	(B)	(B)	B	B
C	C	C	(C)	(C)	C	C	C	C	(C)	C	C	C	C	C	(C)
D	(D)	D	D	D	(D)	D	D	(D)	D	D	(D)	D	D	D	D

## Solucionario

## Evaluación final

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

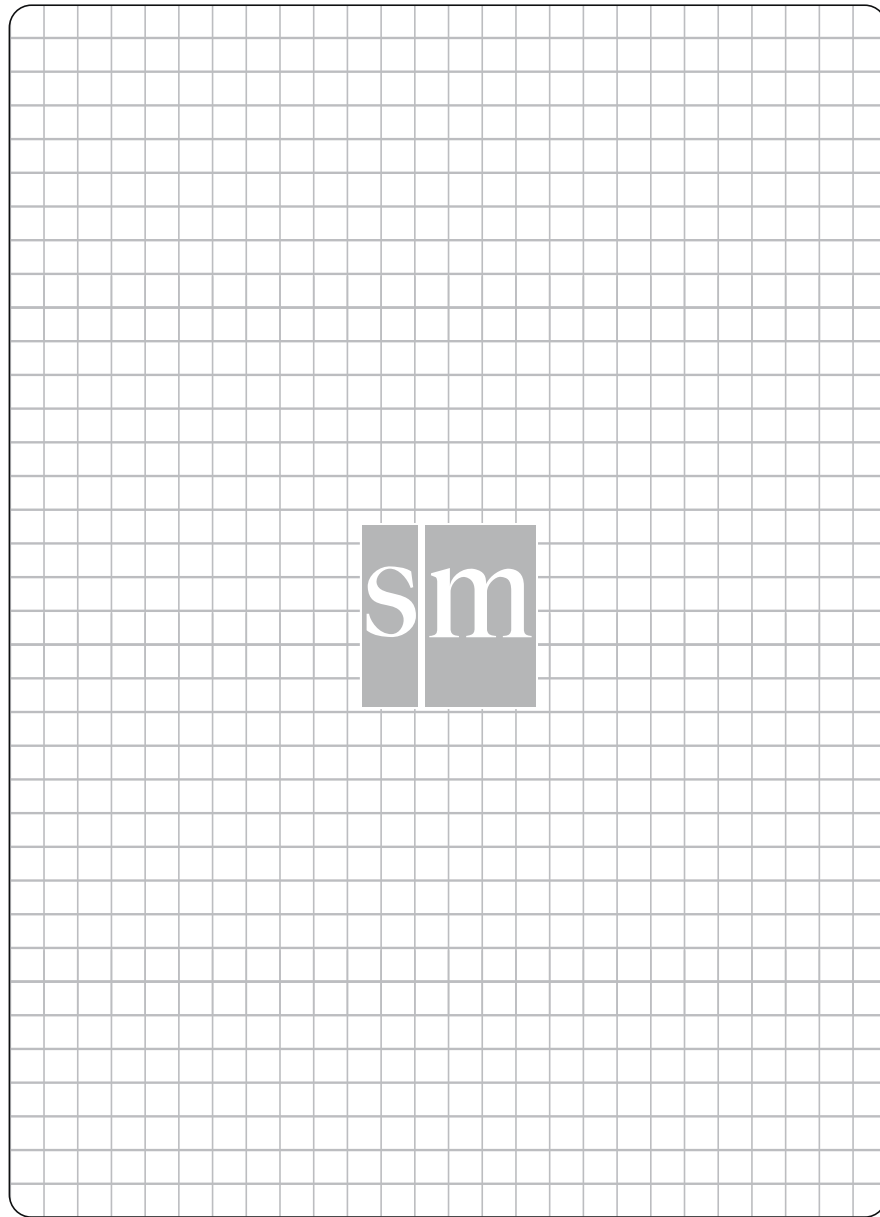
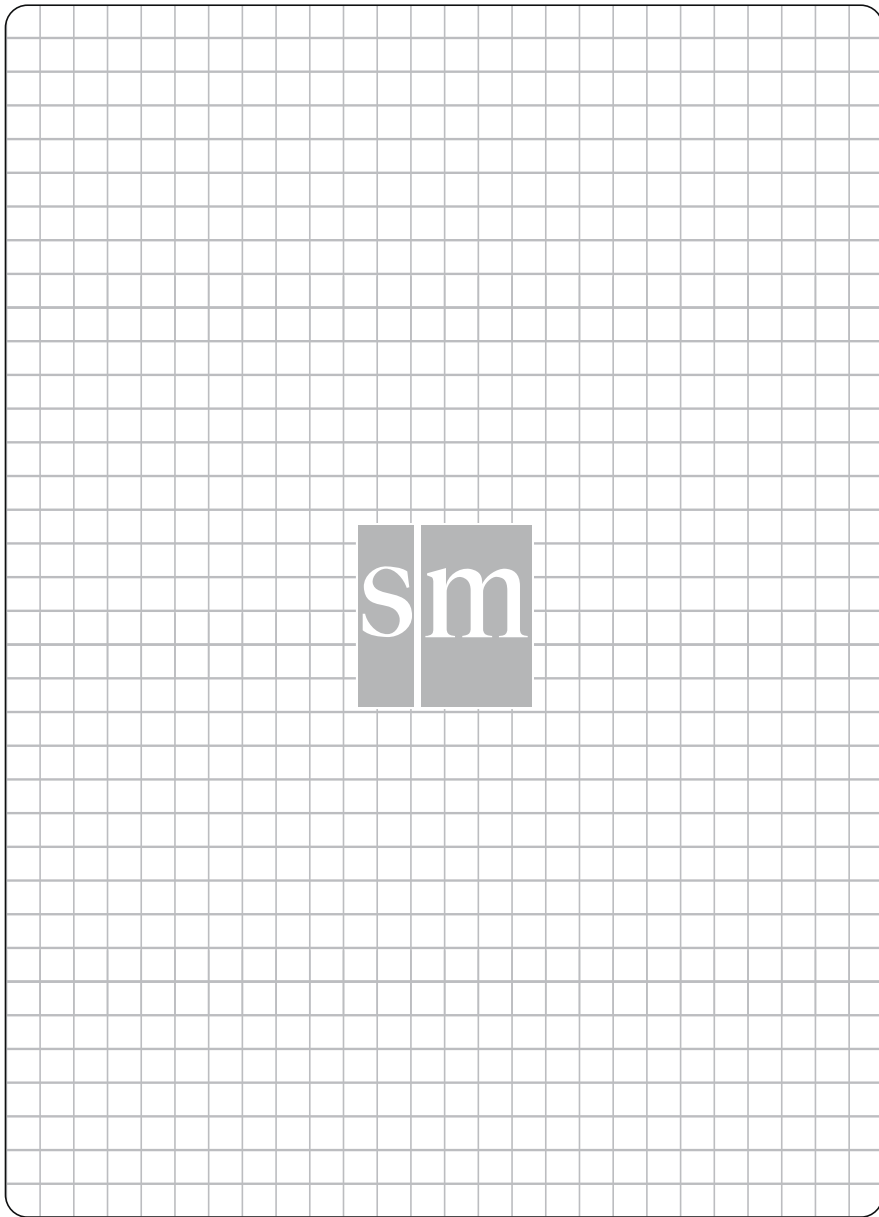
41	42	43	44	45	46	47
A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D



Sm



Sm



# Glosario de términos

**Altura de un prisma.** Segmento que une las bases de un prisma y es perpendicular a estas.

**Altura de una pirámide.** Segmento que va desde el vértice hasta el plano de la base y es perpendicular a este.

**Ángulos alternos externos.** Ángulos que se forman en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

**Ángulos alternos internos.** Ángulos que se forman internamente, en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

**Ángulos suplementarios.** Ángulos cuyas medidas suman  $180^\circ$ .

**Arista.** Segmento en el que se intersectan dos caras de un poliedro.

**Baricentro.** Punto en que concurren las medianas de un triángulo.

**Binomio.** Expresión algebraica que tiene dos términos.

**Bisectriz.** Recta que pasa por el eje de simetría de un ángulo.

**Circuncentro.** Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

**Coefficiente.** Constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

**Cuadrado perfecto.** Número que se obtiene al elevar otro número al cuadrado o a la dos.

**Decimal.** Forma de escribir los números racionales e irracionales. Consta de una parte entera y una decimal, separadas por una coma.

**Decimal exacto.** Número cuya parte decimal es finita.

**Decimal periódico.** Número cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

**Desigualdad.** Relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es el mayor o el menor.

**Dominio.** Conjunto compuesto por los primeros componentes de los pares ordenados de una función.

**Ecuación.** Igualdad entre expresiones algebraicas, que solo es cierta para algún o algunos valores de las variables.

**Ecuaciones equivalentes.** Ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

**Ecuación lineal.** Ecuación de la forma  $ax + b = 0$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales,  $x$  representa la incógnita y  $a \neq 0$ .

**Esfera.** Es un sólido tal que todos los puntos de su superficie están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

**Espacio muestral.** Conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**Evento.** Cualquier subconjunto de un espacio muestral.

**Eventos dependientes.** Eventos en donde la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, su probabilidad.

**Eventos independientes.** Eventos en donde la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, no afecta su probabilidad.

**Experimento aleatorio.** Experimento del cual no se puede prever el resultado.

**Expresión algebraica.** Toda expresión compuesta por términos separados por los signos de las operaciones fundamentales.

**Expresión algebraica irracional.** Expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

**Expresión algebraica racional.** Expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

**Fórmula.** Ecuación que muestra una relación entre dos o más variables.

**Fracción algebraica.** Es el cociente entre dos polinomios.

**Frecuencia absoluta.** Es el número o cantidad de veces en que se produce un resultado o un experimento estadístico.

**Frecuencia relativa.** Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de veces que se realiza el experimento estadístico.

**Función.** Regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada elemento de un conjunto  $A$  un único elemento de un conjunto  $B$ .

**Función afin.** Función de la forma  $y = mx + b$ , donde  $m$  y  $b$  son constantes.

**Frecuencia cuadrática.** Ecuación polinómica de segundo grado, del tipo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , en la que los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales. La representación de la función equivale a una parábola.

**Función lineal.** Función de la forma  $y = mx$ , donde  $m$  es una constante.

**Grado de un monomio.** Exponente de la variable, si un monomio tiene una sola variable, o la suma de los exponentes de las variables cuando el monomio tiene más de una variable.

**Grado de un polinomio.** Es el mayor de los exponentes de las partes literales de los términos que componen un polinomio.

**Incentro.** Punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

**Incógnita.** Cada una de las letras distintas que aparecen en una ecuación.

**Inecuación.** Relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

**Línea poligonal.** Unión de varios segmentos que no tienen más elementos comunes que sus extremos.

# Glosario de términos

**Logaritmo.** Se define como logaritmo en base  $a$  de un número  $b$ , a otro número  $c$  tal que  $a$  elevado al exponente  $c$  da como resultado el número  $b$ .

**Media aritmética.** Promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

**Mediana (estadística).** Valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

**Mediana (geometría).** Segmento que va desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

**Mediatriz.** Recta que pasa por el eje de simetría de un segmento.

**Medidas de tendencia central.** Valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

**Mínimo común múltiplo (m.c.m.).** Menor múltiplo compartido por dos o más números.

**Moda.** Valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

**Monomio.** Expresión algebraica en la que se operan solo productos y potencias. Por lo tanto, está compuesto por un solo término.

**Monomios semejantes.** Monomios que tienen la misma parte literal y, por lo tanto, el mismo grado.

**Notación científica.** Forma de escribir un número como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

**Número irracional.** Número que no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros.

**Número racional.** Número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros siempre y cuando el divisor sea diferente de 0.

**Números reales.** Unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales.

**Ortocentro.** Punto de concurrencia de las alturas de un triángulo.

**Ortoedro.** Es el paralelepípedo recto de base rectangular.

**Paralelepípedo.** Prisma de seis caras con forma de paralelogramos. Cuando todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo es recto.

**Parte literal de un término.** Es la parte de un término conformada por las variables con sus respectivos exponentes.

**Pendiente.** En la recta dada por la ecuación  $y = mx + 1 b$ , el valor  $m$  corresponde a una constante diferente de cero, denominada pendiente. Está relacionada con la inclinación de la recta.

**Polígono cóncavo.** Es aquel en el que la recta que pasa por uno o más lados corta a otro lado del polígono.

**Polígono convexo.** Es aquel cuyos lados interiores son menores que  $180^\circ$ . Además, la recta que pasa por cualquiera de los lados no corta a ningún otro lado del polígono.

**Polinomio.** Expresión algebraica que consta de uno o más términos.

**Recíproco de un número.** El recíproco de un número real  $a$  es el número real  $\frac{1}{a}$ , tal que el producto con  $a$  da como resultado 1.

**Rectas paralelas.** Líneas rectas que tienen la misma pendiente y no se cortan en ningún punto.

**Rectas perpendiculares.** Líneas rectas en las que el producto de sus pendientes es igual a  $-1$ . Forman cuatro ángulos rectos en el punto donde se cortan.

**Rectas secantes.** Líneas rectas que se cortan en un punto único.

**Sistemas de ecuaciones lineales.** Conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas. El conjunto de parejas ordenadas que satisfacen ambas ecuaciones se denomina conjunto solución del sistema.

**Teorema.** Proposición que afirma una verdad demostrable.

**Teorema de Pitágoras.** Teorema que establece que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

**Término.** Cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

**Triángulo acutángulo.** Triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

**Triángulo equiángulo.** Triángulo cuyos ángulos interiores tienen igual medida.

**Triángulo equilátero.** Triángulo que tiene todos los lados iguales.

**Triángulo escaleno.** Triángulo que tiene todos los lados diferentes.

**Triángulo isósceles.** Triángulo que tiene dos lados iguales.

**Triángulo obtusángulo.** Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

**Triángulo rectángulo.** Triángulo que tiene un ángulo recto.

**Triángulos congruentes.** Triángulos en los que hay una correspondencia entre sus vértices, de modo que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

**Valor absoluto.** El valor absoluto de un número real  $c$  se simboliza  $|c|$  y se define como:

$$|c| = \begin{cases} c, & \text{si } c > 0 \\ -c, & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

**Valor numérico de un monomio.** Número que se obtiene al sustituir las letras por números.

**Variable dependiente.** Variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable independiente.

**Variable independiente.** Variable a la cual se asignan valores arbitrarios en una función.

# Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Cooperativa editorial Magisterio, Bogotá, 1999.
- Alem, Jean Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F, Carme, y Fortuny A., Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Síntesis, Madrid, 1995.
- Boyer, Carl B. *Historia de las matemáticas*. Alianza Editorial, España, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Síntesis, Madrid, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. Editorial Síntesis, España, 1997.
- Clements et al. Serie Awli. *Geometría*. Pearson Educación, México, 1998.
- De Prada, V. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Ágora, Málaga, 1990.
- Dickson, Linda. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, Madrid, España, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison Wesley V. A. M, Madrid, 1994.
- Fournier, Jean Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1995.
- Jovette, André. *El secreto de los números*. Editorial Intermedio, Bogotá, 2002.
- Küchemann, D. *The meaning children give to the letters in generalised arithmetic*. En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds, págs. 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. Harla, S. A. de C.V., México, 1972.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Mec/Labor, 1992.
- Moise, Edwin; Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, Estados Unidos, 1966.
- Perelman, Y. *Aritmética recreativa*. Mir, Moscú, 1986.
- Pérez, A., Bethencourt, M., Rodríguez, M. (2004). *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. Compañía Editorial Continental S. A., España, 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría*. Mc Graw Hill, México, 1991.
- Sestier, Andrés. *Historia de las matemáticas*. Limusa, México 1983.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías y otros. *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis, S. A., México, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. Mc Graw Hill, México, 1975.
- Suppes, Patrick; Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté S. A., Colombia, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores, México, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. Limusa, México, 1988.
- Zill, Dennis; Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. Mc Graw Hill, Colombia, 2000.

# Webgrafía

- Álvarez, C. (2005, 23 de febrero). Entrevista: Klaus-Jürgen Bathe. El País. Recuperado de: [http://elpais.com/diario/2005/02/23/futuro/1109113202\\_850215.html](http://elpais.com/diario/2005/02/23/futuro/1109113202_850215.html)
- Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: <http://www.genmagic.net/>
- Cómo mentir con estadísticas. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: [http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/administracion/plan97/adm\\_financiera/De%20La%20Fuente/Como\\_mentir\\_con\\_estadisticas.pdf](http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/administracion/plan97/adm_financiera/De%20La%20Fuente/Como_mentir_con_estadisticas.pdf)
- Diccionario de la Real Academia Española. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: <http://www.rae.es/>
- Disfruta las matemáticas. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: <http://www.disfrutalasmatemáticas.com/puzzles/>
- Funciones y servicios públicos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: [http://revista.consumer.es/web/es/20070501/practico/consejo\\_del\\_mes/71515.php#rc-cabecera-container](http://revista.consumer.es/web/es/20070501/practico/consejo_del_mes/71515.php#rc-cabecera-container)
- Geometría recreativa de Jacob Perelman. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: [http://jnsilva.ludicum.org/HMR13\\_14/Perelman\\_Geometry.pdf](http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Perelman_Geometry.pdf)
- Networking and Emerging Optimization (2015). RSA. Madrid, España: Disponible en: <http://neo.lcc.uma.es/evirtual/cdd/tutorial/presentacion/rsa.html>
- ¿Qué es una bolsa de valores? [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: <http://dinero.about.com/od/Ahorrando/a/que-Es-Una-Bolsa-De-Valores.htm>