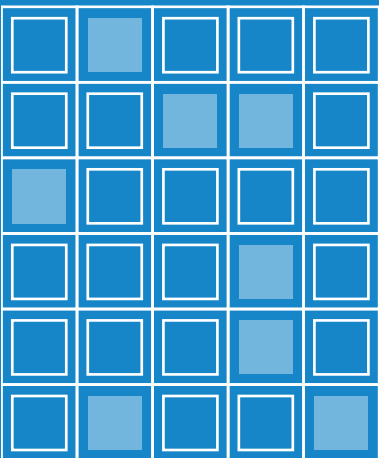
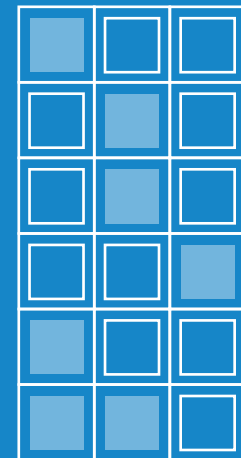




Educación General Básica - Subnivel Superior



MATEMÁTICA



8.º Grado
GUÍA DEL DOCENTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA





Matemática



GUÍA DEL DOCENTE



PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA

Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN

Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación

Freddy Peñafiel Larrea

Viceministra de Gestión Educativa

Daysi Valentina Rivadeneira Zambrano

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)

Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar

Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)

María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística

Ada Leonora Chamorro Vásquez

© Ministerio de Educación del Ecuador, 2016

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa

Quito, Ecuador

www.educacion.gob.ec

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por los editores y se cite correctamente la fuente.



Matemática 8



PROYECTO LICITACIÓN MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, ECUADOR 2016

Dirección de contenidos editoriales Ecuador

María Alexandra Prócel Alarcón

Creación de contenidos

Aliuska Izquierdo, Michel Enrique Gamboa Graus

Conceptualización del proyecto para el área

Luis Humberto Buitrón Aguas

Diseño y diagramación

Luis Fernando Hernández Castro

Corrección de estilo

Yoel Reyes Bravo

Fotografía

Archivo SM Ediciones Ecuador, Archivo SM Ediciones
Colombia, Shutterstock

Ilustración

Roger Icaza L, Gisela Bohórquez, Mónica Medina

Impreso en Ecuador

Primera impresión: agosto 2016

© SMEcuaediciones, 2016

ADVERTENCIA

Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Índice

• El nuevo currículo ecuatoriano	5
• El perfil de salida del Bachillerato ecuatoriano	6
• Objetivos integradores para el subnivel Superior de la Educación General Básica	7
• Objetivos generales del área de Matemática	8
• Objetivos del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica	9
• Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica	10
• Necesidades educativas especiales	18

Unidad 1: números enteros

1. Evaluación diagnóstica	20
2. Propósito de la unidad	21
3. Esquema conceptual	22
4. Planificación microcurricular	24
5. Libro del alumno	26
6. Evaluación formativa	50
7. Libro del alumno	52
8. Evaluación sumativa	74

Unidad 2: números racionales

1. Evaluación diagnóstica	76
2. Propósito de la unidad	77
3. Esquema conceptual	78
4. Planificación microcurricular	80
5. Libro del alumno	82
6. Evaluación formativa	104
7. Libro del alumno	106
8. Evaluación sumativa	116

Unidad 3: cuerpos geométricos y figuras planas

1. Evaluación diagnóstica	118
2. Propósito de la unidad	119
3. Esquema conceptual	120
4. Planificación microcurricular	122
5. Libro del alumno	124
6. Evaluación formativa	132
7. Libro del alumno	134
8. Evaluación sumativa	146

Índice

Unidad 4: semejanza y medición

1. Evaluación diagnóstica	148
2. Propósito de la unidad	149
3. Esquema conceptual	150
4. Planificación microcurricular	152
5. Libro del alumno	154
6. Evaluación formativa	176
7. Libro del alumno	178
8. Evaluación sumativa	190

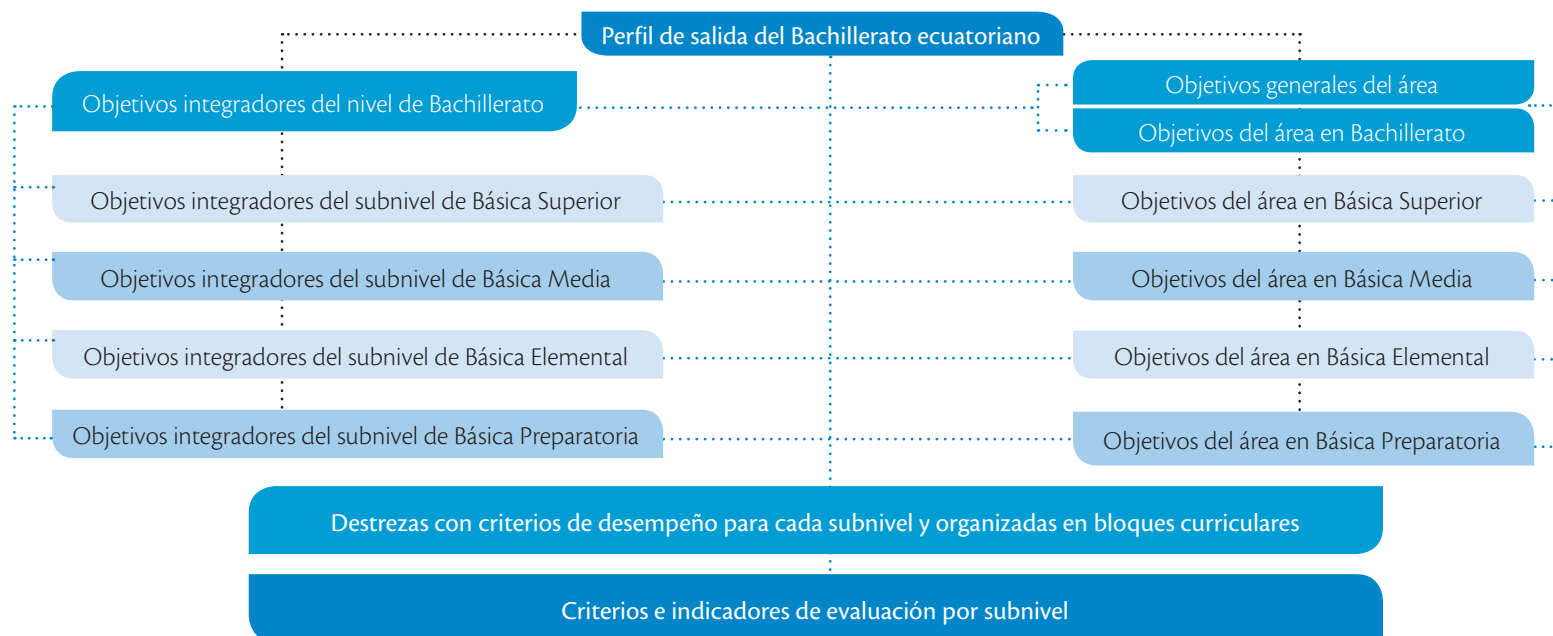
Unidad 5: estadística y probabilidad

1. Evaluación diagnóstica	192
2. Propósito de la unidad	193
3. Esquema conceptual	194
4. Planificación microcurricular	196
5. Libro del alumno	198
6. Evaluación formativa	220
7. Libro del alumno	222
8. Evaluación sumativa	230

Unidad 6: leyes de la lógica y funciones

1. Evaluación diagnóstica	232
2. Propósito de la unidad	233
3. Esquema conceptual	234
4. Planificación microcurricular	236
5. Libro del alumno	238
6. Evaluación formativa	258
7. Libro del alumno	260
8. Evaluación sumativa	262
9. Pruebas quimestrales	264
10. Solucionario	268
11. Glosario	274
12. Bibliografía	276

El nuevo currículo ecuatoriano



Códigos de los elementos curriculares

Perfil de salida		Código	
Valor del perfil	Código	Matemática	M
Justicia	J.	Básica Superior	4
Innovación	I.		
Solidaridad	S.		

Bloques curriculares		Código	
Álgebra y funciones		1	
Geometría y medida		2	
Estadística y probabilidad		3	

Código	
Objetivo integrador del subnivel	OI. 4. ☐
Objetivo general del área	OG. M. ☐
Objetivo del área por subnivel	O. M. 4. ☐
Destreza con criterios de desempeño	M. 4. ☐
Criterio de evaluación	CE. M. 4. ☐
Indicador para la evaluación del criterio	I. M. 4. ☐

Número de secuencia ☐

Bloque curricular

El perfil de salida del Bachillerato ecuatoriano

Somos justos porque:	Somos innovadores porque:	Somos solidarios porque:
J.1. Comprendemos las necesidades y potencialidades de nuestro país y nos involucramos en la construcción de una sociedad democrática, equitativa e inclusiva. J.2. Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos. J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos. J.4. Reflejamos y reconocemos nuestras fortalezas y debilidades para ser mejores seres humanos en la concepción de nuestro plan de vida.	I.1. Tenemos iniciativas creativas, actuamos con pasión, mente abierta y visión de futuro; asumimos liderazgos auténticos, procedemos con proactividad y responsabilidad en la toma de decisiones y estamos preparados para enfrentar los riesgos que el emprendimiento conlleva. I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos. I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.	S.1. Asumimos responsabilidad social y tenemos capacidad de interactuar con grupos heterogéneos, procediendo con comprensión, empatía y tolerancia. S.2. Construimos nuestra identidad nacional en busca de un mundo pacífico y valoramos nuestra multiculturalidad y multietnicidad, respetando las identidades de otras personas y pueblos. S.3. Armonizamos lo físico e intelectual; usamos nuestra inteligencia emocional para ser positivos, flexibles, cordiales y autocríticos. S.4. Nos adaptamos a las exigencias de un trabajo en equipo en el que comprendemos la realidad circundante y respetamos las ideas y aportes de las demás personas.

Objetivos integradores para el subnivel Superior de la Educación General Básica

O.I.4.1. Identificar y resolver problemas relacionados con la participación ciudadana para contribuir a la construcción de la sociedad del Buen Vivir, comprendiendo la complejidad del sistema democrático y el marco legal y de derechos en el contexto regional y global.	O.I.4.7. Construir, interpretar y debatir discursos y expresiones de diversa índole de forma responsable y ética, por medio del razonamiento lógico, logrando acuerdos y valorando la diversidad.
O.I.4.2. Emplear un pensamiento crítico, ordenado y estructurado, construido a través del uso ético y técnico de fuentes, tecnología y medios de comunicación, en procesos de creación colectiva, en un contexto intercultural de respeto.	O.I.4.8. Recopilar, organizar e interpretar materiales propios y ajenos en la creación científica, artística y cultural, trabajando en equipo para la resolución de problemas, mediante el uso del razonamiento lógico, fuentes diversas, TIC, en contextos múltiples y considerando el impacto de la actividad humana en el entorno.
O.I.4.3. Analizar, comprender y valorar el origen, estructura y funcionamiento de los procesos sociales y del medio natural, en el contexto de la era digital, subrayando los derechos y deberes de las personas frente a la transformación social y la sostenibilidad del patrimonio natural y cultural.	O.I.4.9. Actuar desde los espacios de participación juvenil, comprendiendo la relación de los objetivos del Buen Vivir, la provisión de servicios y la garantía de derechos por parte del Estado con la responsabilidad y diversidad social, natural y cultural.
O.I.4.4. Analizar las consecuencias de la toma de decisiones relativas a derechos sociales, ambientales, económicos, culturales, sexuales y reproductivos en la formulación de su plan de vida, en el contexto de la sociedad del Buen Vivir.	O.I.4.10. Explicar y valorar la interculturalidad y la multiculturalidad a partir del análisis de las diversas manifestaciones culturales del Estado plurinacional, reconociendo la influencia de las representaciones sociales, locales y globales sobre la construcción de la identidad.
O.I.4.5. Tomar decisiones orientadas a la resolución de problemas, a partir del uso de diversas técnicas de investigación, nuevas tecnologías y métodos científicos, valorando los aspectos éticos, sociales, ambientales, económicos y culturales del contexto problemático.	O.I.4.11. Observar, analizar y explicar las características de diversos productos culturales y artísticos, organizando espacios de creación, interpretación y participación en prácticas corporales, destacando sus posibilidades expresivas y los beneficios para una salud integral.
O.I.4.6. Investigar colaborativamente los cambios en el medio natural y en las estructuras sociales de dominación que inciden en la calidad de vida, como medio para reflexionar sobre la construcción social del individuo y sus relaciones con el entorno en una perspectiva histórica, incluyendo enfoques de género, étnicos y de clase.	O.I.4.12. Resolver problemas mediante el trabajo en equipo, adoptando roles en función de las necesidades del grupo y acordando estrategias que permitan mejorar y asegurar resultados colectivos, usando la información y variables pertinentes en función del entorno y comunicando el proceso seguido.

Objetivos generales del área de Matemática

Al término de la Educación General Básica, como resultado de los aprendizajes en el área de Matemática, los estudiantes serán capaces de:

OG.M.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

OG.M.2. Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.

OG.M.3. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

OG.M.4. Valorar el empleo de las TICs para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

OG.M.5. Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

OG.M.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

**El texto de esta sección ha sido reproducido textualmente del documento Currículo Nacional de Matemática, Ministerio de Educación, publicado en 2016, (página 60)*

Objetivos del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

Al finalizar este subnivel, los estudiantes serán capaces de:

O.M.4.1. Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros, racionales, irracionales y reales; ordenar estos números y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas); y fomentar el pensamiento lógico y creativo.

O.M.4.2. Reconocer y aplicar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva; las cuatro operaciones básicas; y la potenciación y radicación para la simplificación de polinomios, a través de la resolución de problemas.

O.M.4.3. Representar y resolver de manera gráfica (utilizando las TIC) y analítica ecuaciones e inecuaciones con una variable; ecuaciones de segundo grado con una variable; y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, para aplicarlos en la solución de situaciones concretas.

O.M.4.4. Aplicar las operaciones básicas, la radicación y la potenciación en la resolución de problemas con números enteros, racionales, irracionales y reales, para desarrollar el pensamiento lógico y crítico.

O.M.4.5. Aplicar el teorema de Pitágoras para deducir y entender las relaciones trigonométricas (utilizando las TIC) y las fórmulas usadas en el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes, ángulos de cuerpos y figuras geométricas, con el propósito de resolver problemas. Argumentar con lógica los procesos empleados para alcanzar un mejor entendimiento del entorno cultural, social y natural; y fomentar y fortalecer la apropiación y cuidado de los bienes patrimoniales del país.

O.M.4.6. Aplicar las conversiones de unidades de medida del SI y de otros sistemas en la resolución de problemas que involucren perímetro y área de figuras planas, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, así como diferentes situaciones cotidianas que impliquen medición, comparación, cálculo y equivalencia entre unidades..

O.M.4.7. Representar, analizar e interpretar datos estadísticos y situaciones probabilísticas con el uso de las TIC, para conocer y comprender mejor el entorno social y económico, con pensamiento crítico y reflexivo.

**El texto de esta sección ha sido reproducido textualmente del documento Currículo Nacional de Matemática, Ministerio de Educación, publicado en 2016, (páginas 125)*

Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.1. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas (adición y multiplicación), las operaciones con distintos tipos de números ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones y ecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5. OG.M.6.	M.4.1.1. Reconocer los elementos del conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.	I.M.4.1.1. Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros; establece relaciones de orden empleando la recta numérica; aplica las propiedades algebraicas de los números enteros en la solución de expresiones con operaciones combinadas, empleando correctamente la prioridad de las operaciones; juzga la necesidad del uso de la tecnología. (I.4.) I.M.4.1.2. Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números enteros y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita; juzga e interpreta las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. (I.2.) I.M.4.1.3. Establece relaciones de orden en un conjunto de números racionales e irracionales, con el empleo de la recta numérica (representación geométrica); aplica las propiedades algebraicas de las operaciones (adición y multiplicación) y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas; atiende correctamente la jerarquía de las operaciones. (I.4.)
	M.4.1.2. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros, utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$).	
	M.4.1.3. Operar en $\mathbb{Z}$ (adición, sustracción, multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.	
	M.4.1.4. Deducir y aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en operaciones numéricas.	
	M.4.1.5. Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales.	
	M.4.1.6. Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas.	
	M.4.1.7. Realizar operaciones combinadas en $\mathbb{Z}$ aplicando el orden de operación, y verificar resultados utilizando la tecnología.	
	M.4.1.8. Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.	
	M.4.1.9. Aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en la suma de monomios homogéneos y la multiplicación de términos algebraicos.	
	M.4.1.10. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{Z}$ en la solución de problemas.	
	M.4.1.11. Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{Z}$, de manera analítica, en la solución de ejercicios numéricos y problemas.	
	M.4.1.12. Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{Z}$, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	
	M.4.1.13. Reconocer el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ e identificar sus elementos.	
	M.4.1.14. Representar y reconocer los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.	
	M.4.1.15. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números racionales utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$).	

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.16. Operar en Q (adición y multiplicación) resolviendo ejercicios numéricos. M.4.1.17. Aplicar las propiedades algebraicas para la suma y la multiplicación de números racionales en la solución de ejercicios numéricos. M.4.1.18. Calcular potencias de números racionales con exponentes enteros. M.4.1.19. Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos (con operaciones combinadas) y algebraicos, atendiendo la jerarquía de la operación. M.4.1.20. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos. M.4.1.21. Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q de manera algebraica. M.4.1.22. Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. M.4.1.26. Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos. M.4.1.27. Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales.	I.M.4.1.4. Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita. (I.2.)
Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.2. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas de las operaciones en R y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones, ecuaciones y sistemas de inecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la notación y la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1.	M.4.1.23. Definir y reconocer polinomios de grados 1 y 2.	I.M.4.2.1. Emplea las operaciones con polinomios de grado ≤ 2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos; expresa polinomios de grado 2 como la multiplicación de polinomios de grado 1. (I.4.)
OG.M.2.	M.4.1.24. Operar con polinomios de grado ≤ 2 (adición y producto por escalar) en ejercicios numéricos y algebraicos.	
OG.M.3.	M.4.1.25. Reescribir polinomios de grado 2 con la multiplicación de polinomios de grado 1.	
OG.M.4.	M.4.1.28. Reconocer el conjunto de los números reales R e identificar sus elementos.	
OG.M.5.	M.4.1.29. Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.	
OG.M.6.	M.4.1.30. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$).	
	M.4.1.31. Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).	

Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.32. Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en $\mathbb{R}$. M.4.1.33. Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas. M.4.1.34. Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica. M.4.1.35. Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en $\mathbb{R}$. M.4.1.36. Reescribir expresiones numéricas o algebraicas con raíces en el denominador utilizando propiedades en $\mathbb{R}$ (racionalización). M.4.1.37. Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en $\mathbb{R}$. M.4.1.38. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{R}$ para resolver problemas sencillos. M.4.1.39. Representar un intervalo en $\mathbb{R}$ de manera algebraica y gráfica, y reconocer el intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en $\mathbb{R}$. M.4.1.40. Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreando la solución. M.4.1.41. Resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica (en el plano) y reconocer la zona común sombreada como solución del sistema.	I.M.4.2.2. Establece relaciones de orden en el conjunto de los números reales; aproxima a decimales; y aplica las propiedades algebraicas de los números reales en el cálculo de operaciones (adición, producto, potencias, raíces) y la solución de expresiones numéricas (con radicales en el denominador) y algebraicas (productos notables). (I.4.) I.M.4.2.3. Expresa raíces como potencias con exponentes racionales, y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños. (I.3, I.4.) I.M.4.2.4. Resuelve problemas que requieran de ecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{R}$; utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica en la solución de inecuaciones de primer grado y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica, en $\mathbb{R}$. (I.1, I.4.)
Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.3. Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.42. Calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos para definir relaciones binarias (subconjuntos), representándolas con pares ordenados. M.4.1.43. Identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.	I.M.4.3.1. Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos, e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto. (I.4.)

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.44. Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica, con diagramas de Venn, determinando su dominio y recorrido en $\mathbb{Z}$. M.4.1.45. Representar funciones de forma gráfica, con barras, bastones y diagramas circulares, y analizar sus características. M.4.1.46. Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas. M.4.1.47. Definir y reconocer funciones lineales en $\mathbb{Z}$, con base en tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica, con o sin el uso de la tecnología. M.4.1.48. Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores. M.4.1.49. Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes.	I.M.4.3.2. Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema. (I.2.)
OG.M.1.	M.4.1.50. Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología), e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente.	I.M.4.3.3. Determina el comportamiento (función creciente o decreciente) de las funciones lineales en $\mathbb{Z}$, basándose en su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas; valora el empleo de la tecnología; y calcula funciones compuestas gráficamente. (I.4.)
OG.M.2.	M.4.1.51. Definir y reconocer funciones potencia con $n=1, 2, 3$, representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía.	
OG.M.3.	M.4.1.52. Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas.	
OG.M.4.	M.4.1.53. Reconocer la recta como la solución gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas en $\mathbb{R}$.	
OG.M.5.	M.4.1.54. Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	I.M.4.3.4. Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia ($n=1, 2, 3$), y para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones), la función potencia (monotonía) y la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares. (J.1., I.4.)
OG.M.6.	M.4.1.55. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana. M.4.1.56. Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. M.4.1.57. Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica, determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos y paridad. M.4.1.58. Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita. M.4.1.59. Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factorización, completación de cuadrados, fórmula binomial) en la solución de problemas.	

Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.60. Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas. M.4.1.61. Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema. (I.4., J.2.)
Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.4. Valora la importancia de la teoría de conjuntos para definir conceptos e interpretar propiedades; aplica las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas y la elaboración de argumentos lógicos.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1.	M.4.2.1. Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para relacionarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción, condicionante y bicondicionante; y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado). M.4.2.2. Definir y reconocer una tautología para la construcción de tablas de verdad. M.4.2.3. Conocer y aplicar las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas. M.4.2.4. Definir y reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica.	I.M.4.4.1. Representa, de forma gráfica y algebraica, las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos; utiliza conectivos lógicos, tautologías y la lógica proposicional en la solución de problemas, comunicando resultados y estrategias mediante el razonamiento lógico. (I.3., I.4.)
OG.M.2.		
OG.M.3.		
OG.M.4.		
OG.M.5.		
Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.5. Emplea la congruencia, semejanza, simetría y las características sobre las rectas y puntos notables, en la construcción de figuras; aplica los conceptos de semejanza para solucionar problemas de perímetros y áreas de figuras, considerando como paso previo el cálculo de longitudes. Explica los procesos de solución de problemas utilizando como argumento criterios de semejanza, congruencia y las propiedades y elementos de triángulos. Expresa con claridad los procesos seguidos y los razonamientos empleados.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.2.5. Definir e identificar figuras geométricas semejantes, de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, determinando el factor de escala entre las figuras (teorema de Thales). M.4.2.6. Aplicar la semejanza en la construcción de figuras semejantes, el cálculo de longitudes y la solución de problemas geométricos. M.4.2.7. Reconocer y trazar líneas de simetría en figuras geométricas para completarlas o resolverlas.	I.M.4.5.1. Construye figuras simétricas; resuelve problemas geométricos que impliquen el cálculo de longitudes con la aplicación de conceptos de semejanza y la aplicación del teorema de Tales; justifica procesos aplicando los conceptos de congruencia y semejanza. (I.1., I.4.)

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5. OG.M.6.	M.4.2.8. Clasificar y construir triángulos, utilizando regla y compás, bajo condiciones de ciertas medidas de lados y/o ángulos. M.4.2.9. Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos. M.4.2.10. Aplicar criterios de semejanza para reconocer triángulos rectángulos semejantes y resolver problemas. M.4.2.11. Calcular el perímetro y el área de triángulos en la resolución de problemas. M.4.2.12. Definir y dibujar medianas y baricentro, mediatrices y circuncentro, alturas y ortocentro, bisectrices e incentro en un triángulo. M.4.2.13. Plantear y resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.	I.M.4.5.2. Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados; dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetro y área de triángulos; comunica los procesos y estrategias utilizados. (I.3.)
Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.6. Utiliza estrategias de descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras compuestas, y en el cálculo de cuerpos compuestos; aplica el teorema de Pitágoras y las relaciones trigonométricas para el cálculo de longitudes desconocidas de elementos de polígonos o cuerpos geométricos, como requerimiento previo a calcular áreas de polígonos regulares, y áreas y volúmenes de cuerpos, en contextos geométricos o en situaciones reales. Valora el trabajo en equipo con una actitud flexible, abierta y crítica.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5.	M.4.2.14. Demostrar el teorema de Pitágoras utilizando áreas de regiones rectangulares. M.4.2.15. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos. M.4.2.16. Definir e identificar las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos. M.4.2.17. Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. M.4.2.18. Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos. M.4.2.19. Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas. M.4.2.20. Construir pirámides, prismas, conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes), para calcular el área lateral y total de estos cuerpos geométricos.	I.M.4.6.1. Demuestra el teorema de Pitágoras valiéndose de diferentes estrategias, y lo aplica en la resolución de ejercicios o situaciones reales relacionadas a triángulos rectángulos; demuestra creatividad en los procesos empleados y valora el trabajo individual o grupal. (I.1., S.4.) I.M.4.6.2. Reconoce y aplica las razones trigonométricas y sus relaciones en la resolución de triángulos rectángulos y en situaciones problema de la vida real. (I.3.)

Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.2.21. Calcular el volumen de pirámides, prismas, conos y cilindros aplicando las fórmulas respectivas. M.4.2.22. Resolver problemas que impliquen el cálculo de volúmenes de cuerpos compuestos (usando la descomposición de cuerpos).	I.M.4.6.3. Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas y volúmenes de pirámides, prismas, conos y cilindros; aplica, como estrategia de solución, la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos; explica los procesos de solución empleando la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados. (I.3, I.4.)
Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.7. Representa gráficamente información estadística, mediante tablas de distribución de frecuencias y con el uso de la tecnología. Interpreta y codifica información a través de gráficas. Valora la claridad, el orden y la honestidad en el tratamiento y presentación de datos. Promueve el trabajo colaborativo en el análisis crítico de la información recibida de los medios de comunicación.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.2.	M.4.3.1. Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada, y representarlos gráficamente con ayuda de las TIC.	I.M.4.6.1. Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas (histogramas, polígono de frecuencias, ojiva y/o diagramas circulares), con el uso de la tecnología; interpreta funciones y juzga la validez de procedimientos, la coherencia y la honestidad de los resultados obtenidos. (I.2., I.3.)
OG.M.4.	M.4.3.2. Organizar datos no agrupados (máximo 20) y datos agrupados (máximo 50) en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada, para analizar el significado de los datos.	
OG.M.6.	M.4.3.3. Representar de manera gráfica, con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular, en función de analizar datos.	

Objetivos generales del área que se evalúan	Criterio de evaluación: CE.M.4.8. Analiza y representa un grupo de datos utilizando los elementos de la estadística descriptiva (variables, niveles de medición, medidas de tendencia central, de dispersión y de posición). Razona sobre los posibles resultados de un experimento aleatorio sencillo. Calcula probabilidades aplicando como estrategia técnicas de conteo, el cálculo del factorial de un número y el coeficiente binomial, operaciones con conjuntos y las leyes de De Morgan. Valora la importancia de realizar estudios estadísticos para comprender el medio y plantear soluciones a problemas de la vida diaria. Emplea medios tecnológicos, con creatividad y autonomía, en el desarrollo de procesos estadísticos. Respeta las ideas ajenas y argumenta procesos.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5. OG.M.6.	M.4.3.4. Definir y aplicar la metodología para realizar un estudio estadístico: estadística descriptiva. M.4.3.5. Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas. M.4.3.6. Definir y aplicar niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón. M.4.3.7. Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) y medidas de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas. M.4.3.8. Determinar las medidas de posición: cuartiles, deciles, percentiles, para resolver problemas. M.4.3.9. Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes. M.4.3.10. Aplicar métodos de conteo (combinaciones y permutaciones) en el cálculo de probabilidades. M.4.3.11. Calcular el factorial de un número natural y el coeficiente binomial en el cálculo de probabilidades. M.4.3.12. Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) y aplicar las leyes de De Morgan para calcular probabilidades en la resolución de problemas.	I.M.4.8.1. Utiliza información cuantificable del contexto social; utiliza variables; aplica niveles de medición; calcula e interpreta medidas de tendencia central (media, mediana y moda), de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) y de posición (cuartiles, deciles, percentiles); analiza críticamente información a través de tablas o gráficos; resuelve problemas en forma grupal e individual; y comunica estrategias, opiniones y resultados. (I.4., S.4.) I.M.4.8.2. Calcula probabilidades de eventos aleatorios empleando combinaciones y permutaciones, el cálculo del factorial de un número y el coeficiente binomial; operaciones con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) y las leyes de De Morgan. Valora las diferentes estrategias y explica con claridad el proceso lógico seguido para la resolución de problemas. (I.2., I.4.)

Necesidades educativas especiales

La Educación es un derecho que todas las personas tienen en el transcurso de su vida, y es el Estado que debe promover, respetar y garantizar los mismos. Tal como indica la Ley de Educación del Ecuador, sección quinta, Art. 26 “.- La educación es un derecho de las personas a lo largo de su vida y un deber ineludible e inexcusable del Estado. Constituye un área prioritaria de la política pública y de la inversión estatal, garantía de la igualdad e inclusión social y condición indispensable para el buen vivir. Las personas, las familias y la sociedad tienen el derecho y la responsabilidad de participar en el proceso educativo”.

El artículo anteriormente citado manifiesta que la educación es un derecho fundamental del ser humano, y es el Estado el que garantiza el acceso a la educación de todos sus habitantes sin discriminación alguna en igualdad de condiciones para todos. Se puede entender que cada persona es un ser humano único e irrepetible, con sus propias características y ritmos de aprendizaje, por lo tanto el docente debe respetar las diferencias individuales. Los docentes deben considerar el empleo de respuestas y estrategias diversas en lo que refiere a las necesidades educativas de sus estudiantes, asociadas o no a discapacidad; sin que esto signifique excluirlos del sistema educativo formal, si no como una invitación a realizar adaptaciones curriculares de ser el caso, modificación en la modalidad y metodología de enseñanza- aprendizaje educativa; con el único objetivo de que todos tengan las mismas oportunidades de acceder a la educación respetando la condición propia de cada uno, son estos elementos los que definen a la Educación Inclusiva, que pretende disminuir toda forma de discriminación y exclusión.

Se conceptúa por Educación Inclusiva, en el acuerdo ministerial N 0295-13 en la Normativa referente a la atención a los estudiantes con necesidades educativas especiales en establecimientos de educación ordinaria o en instituciones educativas especializadas, en el Capítulo III Educación Inclusiva Art. 11 “La educación inclusiva se define como el proceso de identificar y responder a la diversidad de necesidades especiales de todos los estudiantes a través de la mayor participación en el aprendizaje, las culturas y en las comunidades, a fin de reducir la exclusión en la educación. La educación inclusiva se sostiene en los principios constitucionales, legales nacionales y en los diferentes instrumentos internacionales referentes a su promoción y funcionamiento”.

Reconociendo la importancia de promover mensajes de inclusión y respeto a la diversidad se considera oportuno incluir dentro de los textos escolares información general y con un lenguaje sencillo que les sirva de apoyo a los docentes, quienes dentro del aula, presenten diferentes estrategias para la construcción del aprendizaje con sus estudiantes, ya sea por razones de discapacidad o no necesariamente. Y como parte de su derecho fundamental e irrenunciable que se encuentra vigente en la Constitución de la República del Ecuador, en la Sección Quinta de los grupos vulnerables, Artículo 47, “En el ámbito público y privado recibirán atención prioritaria, preferente y especializada los niños y adolescentes, las mujeres embarazadas, las personas con discapacidad, las que adolecen de enfermedades catastróficas de alta complejidad y las de la tercera edad. Del mismo modo, se atenderá a las personas en situación de riesgo y víctimas de violencia doméstica, maltrato infantil, desastres naturales o antropogénicos”.

Por lo antes citado en este apartado se pretende sociabilizar con el docente en términos generales la caracterización y facilitación de sugerencias que podría emplear como herramienta de apoyo en el proceso educativo del estudiante, frente a algunos problemas de comportamiento de inicio en la niñez que podrían presentarse en el ambiente escolar y que requieren necesidad educativa especial no asociadas a la discapacidad; tales como la discapacidad cognitiva y las capacidades y talentos excepcionales y dentro de las situaciones de vulnerabilidad se señalará la problemática de las adicciones. Sin llegar a convertirse en una guía de adaptación curricular para la educación.

Discapacidad cognitiva

Presentan dificultades en la adaptación al medio, por alteraciones en el funcionamiento neurológico. Como categoría diagnóstica, el retraso mental abarca una serie bastante amplia de síntomas y manifestaciones de tipo comportamental, adaptativo y de desempeño, que lo complejizan tanto en el proceso de identificación como de intervención. Por ello, la neurobiología, la psicología, las ciencias del desarrollo y el comportamiento, han tratado durante años de identificar componentes básicos que permitan caracterizar el cuadro clínico y establecer con claridad patrones de evaluación y atención oportuna; pero todos los esfuerzos han resultado parcialmente admisibles, pues se trata de un ejercicio en el que juegan un

Necesidades educativas especiales

sin fin de variables, concepciones, actitudes y prácticas, sin mencionar los aspectos éticos y de procesos.

Recomendaciones

- Las experiencias de aprendizaje que promueven la percepción clara, llevan a los estudiantes con discapacidad cognitiva a definiciones precisas del problema o tarea que deben resolver, a través del uso de los canales perceptivos y la verbalización de lo que creen que es la demanda de la tarea. Se deben ofrecer estímulos sensoriales (visuales, táctiles, auditivos, olfativos y gustativos) diversos para una misma tarea y realizar preguntas de monitoreo como ¿Qué es lo que te estoy diciendo?, ¿Qué debes hacer?, ¿Sabes cómo resolver la tarea?
- La atención educativa debe enfocarse hacia el desarrollo del pensamiento reflexivo, explicativo y argumentativo, evitando la impulsividad en las respuestas, la desorganización y la falta de coordinación de los elementos. Dado que responden con rapidez y generalmente de forma inapropiada o que se demoran más tiempo de lo normal para responder, por tanto se deben emplear estrategias que ayuden al estudiante a planificar su acción. En este caso son útiles los listados de prioridades (verbales o escritos dependiendo del nivel de funcionalidad en habilidades académicas funcionales), las preguntas de seguimiento ¿Qué es lo primero que debes hacer?, ¿Qué resultados obtuviste?, ¿Qué debes hacer luego?
- Son efectivas las estrategias de asociación como los ficheros de palabras por categorías, registros de procesos simples (bañarse, vestirse, comprar, preparar un desayuno, etc.). También la elaboración de diccionarios con términos comunes para el nivel escolar en que se encuentran y el uso de diccionarios formales para los que poseen habilidades académicas más funcionales.
- Emplear estrategias de ordenación (manejo de calendarios, uso de agendas diarias en clase o en el hogar, registros de actividades, diarios de campo de acuerdo a los niveles de desempeño en habilidades académicas),

comparación (aparejamientos, correspondencias, conjuntos, cuadros comparativos), organización de secuencias visuales, narración de secuencias). Estas estrategias favorecerán la comprensión de acontecimientos de forma diacrónica y sincrónica, lo que les permitirá conectar sucesos y las relaciones de orden entre ellos.

Estudiantes con capacidades y talentos excepcionales

Son aquellas personas que presentan un desempeño superior en las múltiples áreas y tienen un alto potencial para aprender y desarrollar competencias que supera al de las demás personas de su edad. Estos estudiantes se caracterizan por tener un ritmo de aprendizaje rápido con coeficientes intelectuales altos y tienen habilidades meta-cognitivas superiores.

Recomendaciones

- El docente, al detectar este tipo de necesidad educativa, debe reportar al DECE para que analice el caso y oriente al representante del estudiante para que acuda al especialista y realice el test correspondiente para saber el nivel de coeficiente intelectual del estudiante.
- Se recomienda que el docente planifique actividades con diferentes grados de dificultad, actividades variadas en las cuales los estudiantes puedan desarrollar diferentes destrezas y consiga objetivos distintos.
- Realizar preguntas a los estudiantes para que estimulen su pensamiento y les permitan analizar y expresar lo que han comprendido acerca de una lectura, de un libro o un artículo, también se puede desarrollar su imaginación a partir de preguntas tales como: ¿Qué piensas que ocurrirá después de leer tal libro?, ¿Qué final le darías a tal cuento?, etc.
- Realizar diferentes proyectos educativos como actividades extracurriculares en las cuales los estudiantes desarrollen sus habilidades, destrezas y descubran sus talentos escondidos, por ejemplo: organizar grupos de danza, de música, de teatro, de cocina, de oratoria, los cuales despierten el interés por aprender de los estudiantes y salgan de las clases monótonas.

UNIDAD

1

Evaluación diagnóstica

Nombre:

Grado: Fecha:

1. Efectúa primero las operaciones que están entre los paréntesis. Resuelve.

A. $7 \times (7 + 5) - 3$

$\times$ $-$

B. $3 \times (7 + 5) + 31$

$\times$ $+$

C. $(2 \times 8) + (17 + 5) + 3$

$+$ $+$

D. $(32 \times 28) - (7 + 56) - 3$

$-$ $-$

2. Escribe las operaciones que corresponden a estas frases.

A. A ocho le sumamos el doble de cinco.

B. Restamos cinco al producto de ocho por 12.

C. Restamos tres a la mitad de dieciséis.

D. Sumamos la diferencia de nueve y seis al producto de cinco y doce.

3. Completa el cuadro.

Producto de factores iguales	Potencia indicada	Potencia
$9 \times 9 \times 9 \times 9$	9^4	6 561
$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	4^3	
$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$	6^7	

4. Completa los números que faltan.

A. $\sqrt{\quad} = 2$

B. $\sqrt{\quad} = 5$

C. $\sqrt{\quad} = 6$

D. $\sqrt{\quad} = 7$

E. $\sqrt[3]{\quad} = 7$

F. $\sqrt[3]{\quad} = 10$

G. $\sqrt[3]{\quad} = 8$

H. $\sqrt[3]{\quad} = 11$

5. Durante los entrenamientos semanales de ciclismo, Adriana recorre 100 km. Los martes recorre 43 km; los jueves, 29 km, y los sábados el resto. La expresión que permite calcular la distancia que Adriana recorre los sábados es:

A. $100 - 43 + 29$

B. $(100 - 43) + 29$

C. $100 - (43 + 29)$

D. $(100 - 29) + 43$

6. Lucía hace ejercicios de gimnasia en una colchoneta cuadrada cuya superficie mide 49 m^2 . Para calcular la medida de los lados de la colchoneta se realiza la siguiente operación:

A. $\sqrt{49} = 7$

B. $\sqrt{49} = 6$

C. $\sqrt{49} = 8$

D. $\sqrt{49} = 5$

Propósito de la unidad

Bloque de álgebra y funciones

En esta unidad se abordarán los números relativos y el punto de referencia dentro del mismo conjunto de número; se realizará un estudio minucioso y detallado del surgimiento de los números enteros, y la necesidad del estudio de los números negativos.

Se especificará el concepto del conjunto numérico de los números enteros ya se estudiarán los enteros positivos, haciendo énfasis en que el conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros, así como el tratamiento de los números enteros negativos y sus propiedades y características.

Se estudiará el orden de los números enteros así como la aplicación de las cuatro operaciones de cálculo, y el uso de los signos de agrupación para la resolución utilizando además, las propiedades de la potenciación y radicación, de las operaciones combinadas.

Se introduce en esta unidad el trabajo con variables mediante la resolución de ecuaciones e inecuaciones donde el mayor exponente de la variable es uno y tiene la ecuación una sola incógnita, se procederá una vez introducido el tema con la resolución de problemas que conducen a la solución de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Se estudiará, una vez conocidos los números enteros negativos, las reglas de los signos para el trabajo en las operaciones combinadas y la eliminación de los signos de agrupación, además de utilizarse en el trabajo con las potencias y las propiedad así como en las raíces cuadradas y sus propiedades.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar los conceptos en los que se pueden encontrar dificultades. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo que se proponen diferentes actividades para asegurar las bases para un excelente desarrollo, por parte del docente y comprensión por parte de los estudiantes. Se evaluarán temas correspondientes a los dominios numéricos pues en la unidad se introducen los números enteros donde están incluidos los naturales.

Formativa

Para desarrollar las destrezas con criterios de desempeño, enfocado a los dominios numéricos, los niños deberán identificar cuando se está en presencia de los enteros negativos y los enteros positivos, se les evaluarán los conocimientos adquiridos para el trabajo con los signos, y la introducción de las igualdades, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita y de primer grado, resolverán las operaciones de cálculo atendiendo a las características de los temas evaluados.

Se les evaluarán los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas que conducen a ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita.

Sumativa

Para evidenciar si los niños desarrollaron las destrezas con criterio de desempeño propuestas en esta unidad se evaluarán los temas impartidos mediante la misma con ejercicio sencillo e integradores donde los estudiantes serán capaces de aplicar los nuevos conocimientos y desarrollar las destrezas adquiridas sobre los temas evaluados.

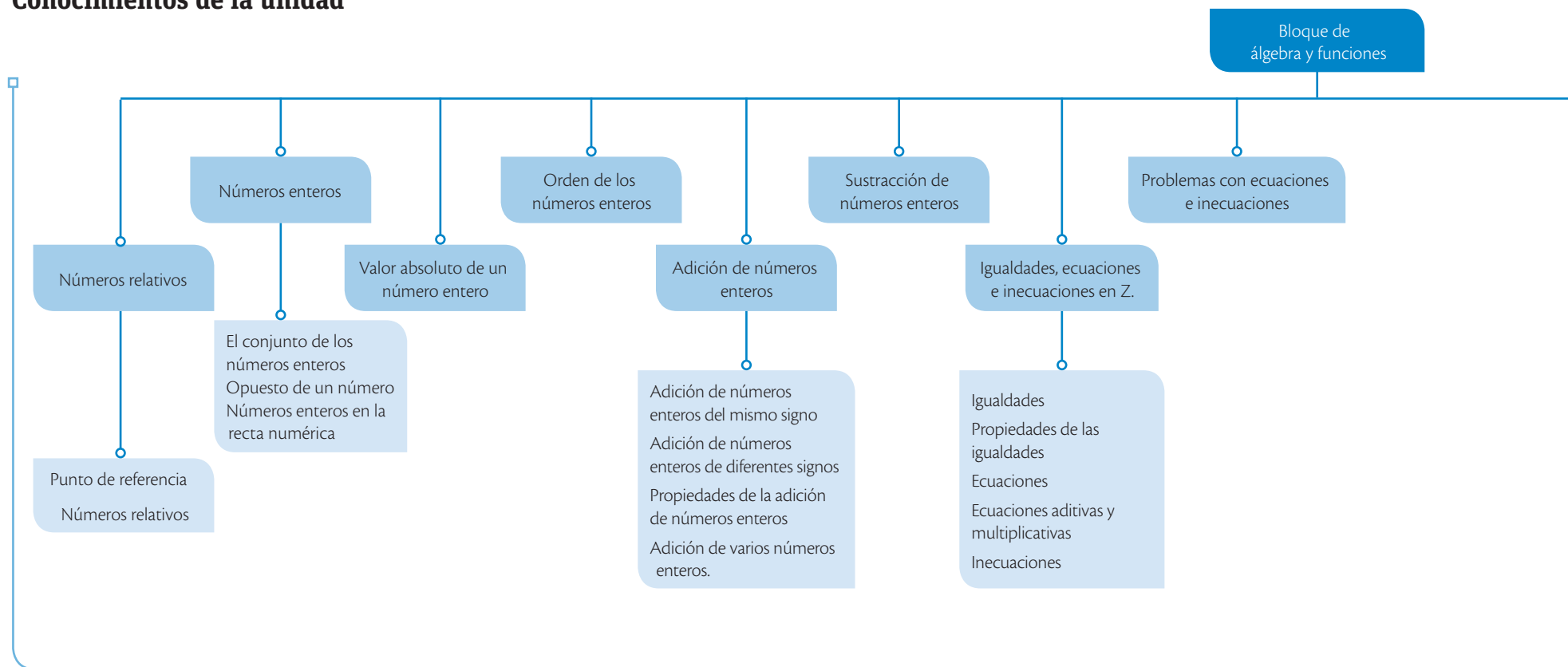
Respuestas

Evaluación diagnóstica

1. a. 81 b. 67 c. 41 d. 830
2. a. $8 + 2 \times 5$ b. $8 \times 12 - 5$
c. $16 : 2 - 3$ d. $(9 - 6) + 5 \times 12$
3. Verificar validez de la respuesta
4. a. 4 b. 25
c. 36 d. 81
e. 343 f. 1000
g. 512 h. 1331
5. $100 - (43 + 29)$
6. $\sqrt{49} = 7$

Esquema conceptual

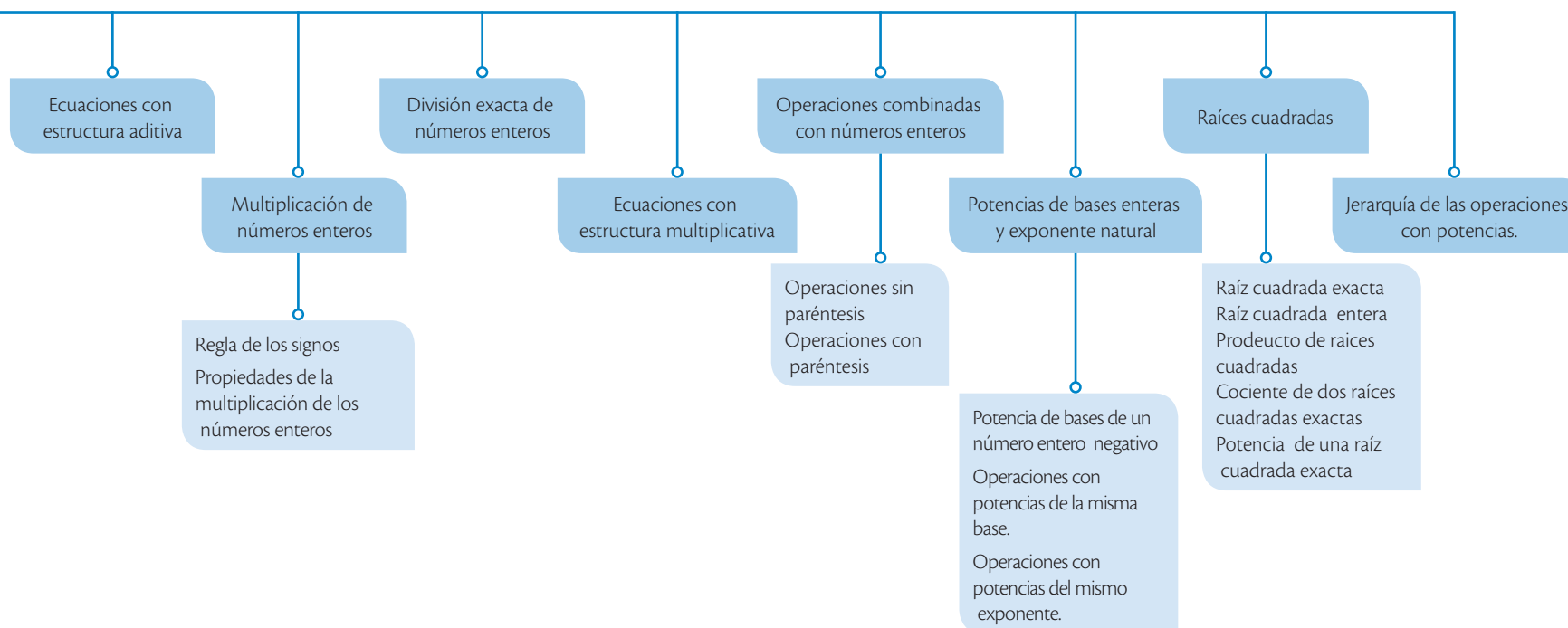
Conocimientos de la unidad



Cultura del Buen Vivir

■ Valor: El servicio

Consiste en ayudar a alguien de manera espontánea, como una actitud permanente de colaboración hacia los demás.



■ Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad y la aplicación de las propiedades para resolver problemas que conducen a ecuaciones e inecuaciones lineales los estudiantes ponen en práctica el valor del servicio pues una vez que transformen del lenguaje común al lenguaje algebraico, puede ayudar a sus compañeros, a identificar las incógnitas y el tipo de problema al que se enfrentan. Además de ser recíprocos, espontáneos y colaborativos.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 1: números enteros				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.1- OG.M.5.		O.M.4.2.		
Objetivos de subnivel		Valores		
OI.4.1.- OI.4.9.		El servicio (I.3., I.4.)		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.1.		I.M.4.2.2. – I.M.4.2.3.		
Objetivos de la unidad				
- Interpretar los números relativos mediante ejemplos seleccionados de la vida práctica para una mayor familiarización y aplicación de los mismos con el medio en que viven. - Resolver problemas que conduzcan a la resolución de ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita mediante el método deductivo a un nivel reproducido-aplicativo. - Aplicar los conocimientos adquiridos en el orden operacional mediante la resolución de operaciones combinadas con y sin signos de agrupación.				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	- Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos. - Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$). - Operar en Z (adición) de forma numérica, aplicando el orden de operación. - Operar en Z (sustracción) de forma numérica, aplicando el orden de operación. - Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Z en la solución de problemas.	- Muestre a los estudiantes un vídeo que aparece en la siguiente dirección: https://www.youtube.com/watch?v=P6mBE-1oXQM; con el objetivo de consolidar el orden de las operaciones combinadas con números enteros. - Converse con los estudiantes sobre el orden de las operaciones combinadas con signos de agrupación; pregunte a los estudiantes: ¿Cómo resolver una operación combinada sin signos de agrupación? - Haga alusión a los signos que ha utilizado para resolver operaciones combinadas. Por ejemplo: el paréntesis $()$, la llave $\{ \}$ y el corchete $[]$, y le orden en que desarrolla la operación teniendo incluida en ella estos signos de agrupación.	- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números enteros. - Aplica las operaciones con números enteros en la resolución de problemas. - Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división y efectúa operaciones combinadas con números enteros.	Actividad: resolver operaciones combinadas con signos de agrupación a un nivel reproductivo aplicativo.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	- Resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z de manera analítica en la solución de ejercicios numéricos y problemas. - Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. - Operar en Z (multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación. - Operar en Z (división) de forma numérica, aplicando el orden de operación. - Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas. - Realizar operaciones combinadas en Z aplicando el orden de operación y verificar resultados utilizando la tecnología. - Deducir y aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en operaciones numéricas. - Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales. - Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas. - Calcular raíces de números enteros no negativos en la solución de ejercicios numéricos con operaciones combinadas, atendiendo la jerarquía de la operación.	- Pídales que mencionen el orden en que se deben resolver las operaciones combinadas sin signos de agrupación. - Pídales que mencionen el orden en que se deben resolver las operaciones combinadas con signos de agrupación. - Solicite a los estudiantes que resuelvan operaciones combinadas con signos de agrupación en Z, mediante problemas de la vida práctica y pida que traigan para el próximo encuentro un problema con dichas operaciones elaborados por ellos mismos en el conjunto de los números enteros.	- Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas. - Resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z.	Técnica: observación Instrumento: registro descriptivo.

Recursos: Recta numéricas, figuras del aula para la comprensión del contenido; cintas métricas para calcular distancias positivas e inversas.

Bibliografía: Libro de texto de matemática octavo grado; http://www.ditutor.com/numeros_enteros/valor_absoluto.html; <https://es.scribd.com/doc/14500691/Ecuaciones-aditivas>
<http://matematicasvirtuales.com/blog/division-de-numeros-enteros/>

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Los números relativos o números con signos, son una poderosa herramienta para explicar situaciones que difícilmente se podrían interpretar en términos absolutos. Son el resultado de la relación de dos números, generalmente la división de uno por el otro.

Muchas veces cuando se utilizan los números absolutos puede distorsionar la realidad de lo que estamos analizando. Esto ocurre cuando hacemos comparaciones si no tenemos el cuidado de ver cada categoría en relación al total de casos a que pertenece.

Los números relativos o con signos han surgido como una cuestión de conveniencia, principalmente con el objetivo de poder representar adecuadamente las magnitudes cuyas cantidades son susceptibles de ser agrupadas en dos categorías, o de ser consideradas en sentidos opuestos.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Reflexione con los estudiantes los términos de referencia y punto. Analice que el punto es una noción con múltiples usos. Puede tratarse de un signo ortográfico, una unidad de tanto, un círculo o incluso un sitio específico. Referencia, por su parte, es aquella información que indica algo o que permite establecer un nexo entre una cosa y otra.
- Analice con los estudiantes mediante ejemplos que los puntos de referencia nos indican las posiciones en las que se puede encontrar un determinado objeto según su ubicación por ejemplo: antes de y después de; por debajo de y por encima de.

1

Números relativos

Explora

Camilo y Sara viven sobre la misma calle en la que se encuentra un parque. La casa de Camilo está tres cuadras antes del parque, y la de Sara está tres cuadras después del parque.



- ¿Cómo son las posiciones de las casas de Camilo y Sara en relación con la ubicación del parque?

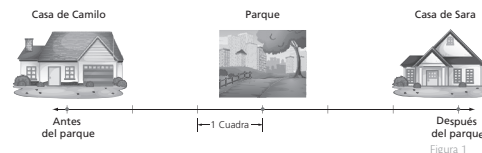
Ten en cuenta

Un **punto de referencia** determina dos sentidos. Se utiliza al establecer expresiones como:

- Arriba de – abajo de
- Sobre el nivel – bajo el nivel
- Antes de – después de
- Atrás de – adelante de
- A la izquierda de – a la derecha de
- Por debajo de – por encima de
- Menos que – más que
- Encima de – debajo de

1.1 Punto de referencia

La situación planteada se puede representar como en la Figura 1.



Si se toma la ubicación del parque como **punto de referencia**, se puede afirmar que las casas de Camilo y de Sara están en posiciones opuestas.

Al fijar un **punto de referencia** es posible determinar dos sentidos u orientaciones.

1.2 Números relativos

Los números que indican una cantidad con respecto a un punto de referencia se denominan **números relativos**.

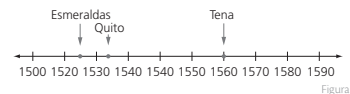
Los números relativos se escriben acompañados por el signo más (+) o por el signo menos (-). Se ha convenido utilizar el signo más para las cantidades que expresan situaciones como "a la derecha de", "encima de", "sobre el nivel del mar", etc., y se utiliza el signo menos para las cantidades que se refieren a situaciones como "antes de", "a la izquierda de", "bajo cero", "bajo el nivel del mar", entre otras.

Por lo tanto, para indicar que Camilo vive tres cuadras antes del parque se utiliza el número -3, y para indicar que Sara vive tres cuadras después del parque se utiliza el número +3.

Ejemplo 1

La ciudad de Esmeraldas fue fundada en 1526 por Bartolomé Ruiz, la ciudad de el Tena fue fundada en 1560 por Gil Ramírez Dávalos y la ciudad de Quito fue fundada en 1534 por Sebastián de Benalcázar. Si se toma como punto de referencia el año de fundación de Quito, ¿cuántos años antes fue fundada la ciudad de Esmeraldas y cuántos años después el Tena?

En la línea de tiempo de la Figura 2, en la que el año 1534 es el punto de referencia, se observa que la ciudad de Esmeraldas fue fundada 8 años antes que Quito. Tal situación puede representarse con el número -8.



El Tena fue fundada 26 años después que Quito, situación que se puede representar con el número +26.

Los números -8 y +26 son números relativos.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer los elementos del conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 La Figura 3 representa la ubicación de un helicóptero y de un submarino
- con respecto al nivel del mar. Si el helicóptero está a 30 m de altura y el submarino está a 40 m de profundidad, ¿cuáles son los números relativos que indican la cantidad de metros a los que se encuentra cada vehículo con respecto al nivel del mar?

Solución:

En este caso, el punto de referencia es el nivel del mar; por lo tanto, la posición "30 m de altura" se expresa mediante el número relativo $+30$ m, mientras que la posición "40 m de profundidad" se escribe como -40 m.



Figura 3

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 2 Observa la Figura 4 y escribe los números relativos
- que expresan la altura de la montaña y la profundidad de la fosa marina.

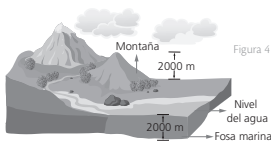


Figura 4

Ejercitación

- 3 Escribe en la Tabla 1 el punto de referencia y el número relativo correspondiente en cada caso.

Situación	Punto de referencia	Número relativo
Hace seis años Jorge estuvo en Grecia.		
Tres años después de casarme tuve mi primer hijo.		
El avión vuela a 600 m de altura.		
El buzo se encuentra a 25 m de profundidad.		

Tabla 1

- 4 Representa estas temperaturas con números relativos.

- a. 11°C sobre cero
- b. 23°C bajo cero
- c. 6°C sobre cero
- d. 72°C sobre cero
- e. 42°C bajo cero
- f. 19°C bajo cero
- g. 38°C bajo cero
- h. 7°C sobre cero

Razonamiento

- 5 Expresa con números relativos cuántos años antes o después del fin de la Segunda Guerra Mundial (1945) ocurrieron estos acontecimientos.

- a. Fundación del Estado de Israel (1948)
- b. Primer hombre en la Luna (1969)
- c. Revolución de Octubre en Rusia (1917)
- d. Guerra Civil Española (1936)
- e. Guerra Fría (1953)

- 6 Escribe con números relativos cuántos años antes o después ocurrió el nacimiento de cada uno de los pintores que se muestran en la Tabla 2, tomando como punto de referencia el año de nacimiento de Paul Cézanne.

Pintor	Fecha de nacimiento
Leonardo da Vinci	1452
Pablo Picasso	1881
Giotto di Bondone	1267
Paul Cézanne	1839
Rembrandt van Rijn	1606
Diego Velázquez	1599

Tabla 2

Resolución de problemas

- 7 Marcela nació en el año 1994. Terminó la secundaria en el 2010 y su carrera universitaria en el 2015. Si se considera como punto de referencia el año en el que terminó la secundaria, ¿cuáles son los números relativos que indican cuántos años antes nació y cuántos años después terminó su carrera universitaria?

Comunicación

2. Montaña: 12 000 m
Fosa marina: 22 000 m

Ejercitación

- 3.

Situación	Punto de referencia	Número relativo
Hace seis años Jorge estuvo en Grecia.	Visita Grecia	-6
Tres años después de casarme tuve mi primer hijo.	Matrimonio	$+3$
El avión vuela a 600 m de altura.	Sobre la tierra	$+600$
El buzo se encuentra a 25 m de profundidad.	Nivel del mar	-25

4. a. $+11$ b. -23
c. $+6$ d. $+72$
e. -42 f. -19
g. -38 h. $+7$

Razonamiento

- 5

Pintor	Fecha de nacimiento
Leonardo da Vinci	1452 -387
Pablo Picasso	1881 $+42$
Giotto di Bondone	1267 -572
Paul Cézanne	1839
Rembrandt van Rijn	1606 -233
Diego Velázquez	1599 -240

Resolución de problemas

6. Nacimiento: -16
Graduación: $+5$

Ampliación conceptual

Los números enteros son elementos de un conjunto de números que reúne a los positivos (1, 2, 3, ...), a los negativos opuestos de los anteriores: (... -3, -2, -1) y al 0. Los enteros negativos, como -1 o -3 (se leen «menos uno», «menos tres», etc.), son menores que todos los enteros positivos (1, 2, ...) y que el cero. Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, a veces también se escribe un signo «más» delante de los positivos: +1, +5, etc. Cuando no se le escribe signo al número se asume que es positivo. Si se considera

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$, entonces un entero natural es un entero positivo y el conjunto N es parte propia de conjunto Z . El conjunto de todos los números enteros se representa por la letra $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$, letra inicial del vocablo alemán Zahlen

Al igual que los números naturales, los números enteros pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, de forma similar a los primeros. Sin embargo, en el caso de los enteros es necesario calcular también el signo del resultado.

Los números enteros extienden la utilidad de los números naturales para contar cosas. Pueden utilizarse para contabilizar pérdidas: si en un colegio entran 80 estudiantes nuevos de primer curso un cierto año, pero hay 100 estudiantes de último curso que pasaron a educación secundaria, en total habrá $100 - 80 = 20$ estudiantes menos; pero también puede decirse que dicho número ha aumentado en $80 - 100 = -20$ estudiantes.

2

Números enteros

Explora

Santiago realizó los siguientes movimientos en su cuenta bancaria: el lunes consignó \$ 300, el martes retiró \$ 120, el miércoles retiró \$ 95 y el jueves consignó \$ 80.



- Representa matemáticamente estos movimientos bancarios.

Ten en cuenta

- El 0 es el único número entero que no tiene signo: no es positivo ni negativo.
- Los números enteros positivos coinciden con los números naturales; por eso, es común que al escribir un número entero positivo se omita el signo más (+).

2.1 El conjunto de los números enteros

En ocasiones no es suficiente el conjunto de los números naturales para representar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana. Por esta razón, los matemáticos de la antigüedad consideraron necesario ampliar este conjunto y comenzar a utilizar los números negativos.

Esta decisión dio origen al **conjunto de los números enteros** (Z), el cual incluye los **enteros negativos** (Z^-), los **enteros positivos** (Z^+) y el 0.

Los números enteros negativos van precedidos por el signo menos (-).

$$Z^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

Los números enteros positivos van precedidos por el signo más (+).

$$Z^+ = \{+1, +2, +3, +4, \dots\}$$

Así, los números enteros permiten diferenciar la manera en que se registran algunas situaciones como: deudas y haberes, temperaturas sobre cero y temperaturas bajo cero, alturas sobre el nivel del mar y profundidades, entre otras.

En el caso de los movimientos bancarios, se acostumbra a representar las consignaciones precedidas con el signo más y los retiros con el signo menos. Por lo tanto, los movimientos en la cuenta bancaria de Santiago se pueden representar como se muestra en la Tabla 1.

Movimientos	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
Consignación	+\$ 300			+\$ 80
Retiro		-\$ 120	-\$ 95	

Tabla 1

El **conjunto de los números enteros** está formado por los enteros negativos, los enteros positivos y el 0.

$$Z = Z^- \cup Z^+ \cup \{0\}$$

$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

Ejemplo 1

Al tomar 0 °C como punto de referencia (temperatura nula), se puede representar una temperatura de 13 °C bajo cero con el número entero negativo -13 °C y una temperatura extrema de 38 °C como +38 °C.

Ejemplo 2

Para expresar la fecha de ocurrencia de diferentes acontecimientos, se ha convenido tomar como referencia o punto 0 el año de nacimiento de Cristo. Por esta razón, las fechas anteriores al nacimiento de Cristo se escriben precedidas por el signo menos (-) y, las posteriores, con el signo más (+).

Por ejemplo, el suceso "Euclides, geómetra griego, nació en el año 306 a. C. y murió en el año 283 a. C." se puede expresar así: "Euclides, geómetra griego, nació en el año -306 y murió en el año -283".

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer los elementos del conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.

Ejemplo 3

En las tablas 2 y 3 se registró la altura y la profundidad (respectivamente) de algunos lugares del mundo. En ambos casos se emplearon números enteros.

Picos más altos del mundo	Altura	Algunos lugares profundos del mundo	Profundidad
Dhaulagiri (Nepal)	+8 167 m	Pozo de Kola (Rusia)	-13 km
Montaña Manaslu (Nepal)	+8 156 m	Perforación submarina (Nueva Zelanda)	-2 km
Nanga Parbat (Pakistán)	+8 125 m	Mina del Cañón de Bingham (Estados Unidos)	-1,2 km
Annapurna (Nepal)	+8 091 m	Cueva de Vrtoglavica (Eslovenia)	-603 m

Tabla 2

Tabla 3



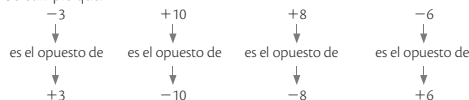
Pico Annapurna (Nepal): 8 091 m de altura

2.2 Opuesto de un número entero

Cada elemento del conjunto de los enteros positivos tiene un opuesto en el conjunto de los enteros negativos, y viceversa. El **opuesto de un número entero** a se simboliza como $-a$.

Ejemplo 4

Se cumple que:



Ejemplo 5

Las expresiones $-(-9)$ y $-[-(-7)]$ son respectivamente equivalentes a $+9$ y -7 , porque el opuesto de -9 es $+9$ y el opuesto de $-(-7)$ es -7 .

2.3 Números enteros en la recta numérica

Los números enteros se pueden representar en la recta numérica como sigue.

1. Sobre una recta horizontal se marca un punto que represente el 0.
2. Se fija la distancia del 0 al 1. Esta medida se toma como unidad y se traslada a la derecha y a la izquierda del 0 tantas veces como sea necesario (Figura 1).



Figura 1

3. Se sitúan a la derecha del 0 los números enteros positivos y a la izquierda del 0 los números enteros negativos (Figura 2).

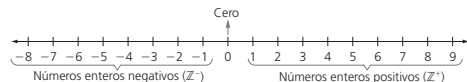
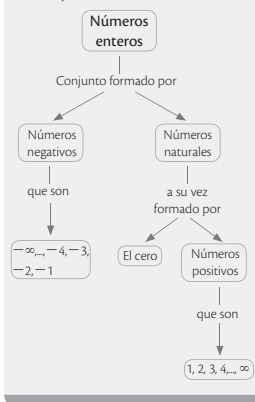


Figura 2

Ten en cuenta

El siguiente mapa conceptual representa la relación que existe entre los números enteros y los números naturales.



■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes que realicen ejercicios como el siguiente: traza una recta numérica y ubica los siguientes números en la misma: 3; 8; -20; -3; -5; 25; 12.

a) Mencione el conjunto numérico a los que pertenecen los números negativos. (Los estudiantes responderán que los números negativos a los que se hace referencia en el ejercicio es a los enteros negativos).

b) ¿Será el conjunto de los números naturales un conjunto o subconjunto de los números enteros? Los estudiantes deben conocer que los números naturales están contenidos en el conjunto de los números enteros positivos por lo que el conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros.

c) Pida a los estudiantes que ubiquen en la recta numérica todos los opuestos a los números dados en el enunciado del ejercicio. Los estudiantes ubicarán además el -8 ; 20 ; 5 ; -25 ; -12 .

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar la siguiente página web para una mayor preparación en el contenido:

- http://www.ditutor.com/numeros_enteros/numeros_enteros.html
- http://www.vitutor.com/di/e/a_1.html

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes que para trabajar en la recta numérica con los números a la izquierda del cero, en el conjunto de los números naturales es imposible; por lo que se hizo necesario ampliar otro conjunto numérico que contenga a los naturales positivos y los números negativos menores que cero en un solo conjunto. En este caso particular este conjunto numérico son los enteros. Explique que a los negativos se les nombra enteros negativos y a los positivos enteros positivos y el cero.
- Explique a los estudiantes que el cero es el único número en el conjunto de los enteros que no tiene signo por lo que no es ni positivo ni negativo. Aclare que el conjunto de los números naturales y los enteros positivos coinciden y que en ocasiones cuando se escriben los números enteros positivos se omite el signo $+$.
- Reflexione con los estudiantes sobre la necesidad de conocer que el cero está justamente en el centro de los enteros donde define los positivos a su derecha y los negativos a su izquierda por lo tanto cada número positivo tiene un número opuesto justamente igual pero con signo opuesto. Por ejemplo:

$$2 \text{ y } -2; 20 \text{ y } -20; 100 \text{ y } -100.$$

Comunicación

- $+568$
 - -6
 - -120
 - -5
 - $+500$
 - -350

3. Respuesta abierta

2

Números enteros

Ten en cuenta

El cero (0) tardó mucho tiempo en utilizarse. En la mayoría de los sistemas numéricos antiguos no existía este número. Se cree que fueron los hindúes los que lo utilizaron por primera vez hacia el año 650 d. C.

Ejemplo 6

En la recta de la Figura 3 se marcaron los números enteros 8, -4 , -9 , 5, -1 y 0. Observa.

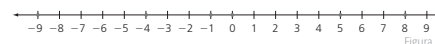


Figura 3

Ejemplo 7

En la Figura 4 se ubicaron los números enteros comprendidos entre -7 y 5.

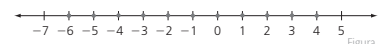


Figura 4

Ejemplo 8

En la representación de la recta numérica se observa que dos números enteros opuestos están a la misma distancia de 0, pero en lados contrarios. Por ejemplo, en la Figura 5 se representan los números opuestos -4 y 4.

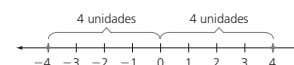


Figura 5

Se observa que la distancia entre -4 y 0 es la misma que entre 0 y 4: 4 unidades.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

- El conjunto de los números naturales está contenido en el de los enteros.
- El 0 es un número entero positivo.
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^-$
- $-[-(-10)] = -10$

Solución:

El valor de verdad de cada afirmación es:

- Verdadero. Todo número natural es entero positivo.
- Falso. El 0 es el único número entero que no es positivo ni negativo.
- Falso. El conjunto $\mathbb{Z}^-$ está contenido en el conjunto $\mathbb{Z}$.
- Verdadero. El opuesto de $[-(-10)]$ es -10 .

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- Escribe un número entero que exprese la cantidad mencionada en cada caso.
 - La cima de la montaña está a 568 m de altura.
 - Pitágoras nació en el siglo VI a. C.
 - El submarino está a 120 m de profundidad.
 - La temperatura de la ciudad es de 5°C bajo cero.
 - Pablo consignó \$ 500 en su cuenta de ahorros.
 - Sofía debe \$ 350 al banco.
- Explica el significado de los números enteros utilizados en las siguientes expresiones.
 - La temperatura mínima registrada hoy fue de -3°C .
 - El buzo se encuentra a -50 m.
 - El alpinista está a $+600$ m.
 - El ascensor quedó detenido en el piso -2 .
 - La Edad Media comenzó aproximadamente hacia el año $+476$.
 - El estado de cuenta es de \$ 700.

Razonamiento

4. Escribe $\in$ o $\notin$, según corresponda.

- a. $-25 \dots \mathbb{Z}^+$ b. $34 \dots \mathbb{Z}^+$
c. $-67 \dots \mathbb{Z}^+$ d. $58 \dots \mathbb{Z}^+$
e. $-46 \dots \mathbb{Z}^+$ f. $31 \dots \mathbb{Z}^+$
g. $-15 \dots \mathbb{Z}^+$ h. $72 \dots \mathbb{Z}^+$

5. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

- a. El opuesto de un entero negativo es negativo. ()
b. El opuesto del opuesto de un número positivo es negativo. ()
c. La distancia entre dos números opuestos es el doble de la distancia entre uno de los números y el 0. ()
d. El opuesto de un número entero positivo es negativo. ()

6. Determina y escribe el número entero que debe ir en cada casilla.



Figura 6



Figura 7



Figura 8



Figura 9

Comunicación

7. Ubica los números de cada grupo en la recta numérica.

- a. $5, -6, -4, 3, -2, 6$

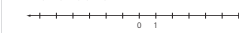


Figura 10

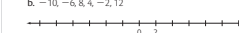


Figura 11

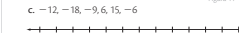


Figura 12

Razonamiento

8. Observa la Figura 13 y resuelve.

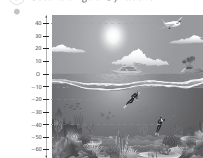


Figura 13

- a. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra cada uno de los buzos?
b. ¿A qué altura con respecto al nivel del mar se encuentra el avión?
c. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra el pez amarillo?
d. ¿En qué punto con respecto al nivel del mar se encuentra el barco?
e. ¿Qué distancia separa al avión del pez más amarillo?

Resolución de problemas

9. Analiza cada situación y responde las preguntas.

- a. ¿Qué número se encuentra 4 unidades a la izquierda de -1 ? ¿Cuál es su opuesto?
b. El entero m está 5 unidades a la izquierda de n . Si $n = -2$, ¿cuál es el valor de m ?
c. Desde a hasta b hay 8 unidades. Si $a = -3$, ¿qué valores puede tener b ?
d. Los enteros m y n están separados por 10 unidades. Si la distancia de m a 0 es de 3 unidades, ¿cuáles son las posibles distancias de n a 0?
e. Un número positivo está al doble de unidades de 0 que un número negativo, y los dos están separados por 27 unidades. ¿Cuáles son esos números?

10. Para atrapar un pez, dos gaviotas se sumergen en el mar. La primera se sumerge a 45 cm y la otra, a 60 cm. Si el pez se encuentra a 50 cm de profundidad, ¿cuál de las dos gaviotas está más cerca de alcanzarlo?

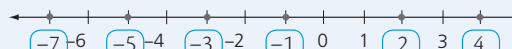
Razonamiento

4. a. $\in$ b. $\in$
c. $\notin$ d. $\notin$
e. $\notin$ f. $\in$
g. $\in$ h. $\notin$
5. a. F b. F
c. V d. V

6.



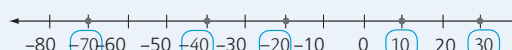
b.



c.



d.

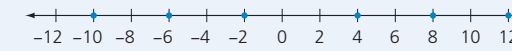


Comunicación

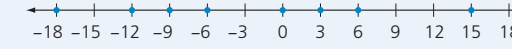
7.



b.



c.



Razonamiento

8. a. Primer buzo: -20 m
Segundo buzo: -40 m
b. 40 m
c. -50 m
d. 0 m
e. 90 m

Resolución de problemas

9. a. -5 ; opuesto: 5 .
b. $m = -7$
c. $b = -11$ o $b = 5$
d. 7 y 10
e. -9 y 18
10. La gaviota que se sumergió a 45 cm.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Los números enteros incluyen tanto los números naturales que ya conocemos (0, 1, 2, 3...), como los números negativos (-1, -2, -3...)

El valor opuesto de un número entero es el mismo número pero con el signo cambiado:

el opuesto de -3 es 3; el opuesto de 5 es -5

- Entre dos o más números enteros positivos es mayor el de mayor valor absoluto.
- Entre dos o más números enteros negativos es mayor el de menor valor absoluto, (se encuentra a menos distancia del origen O, valor cero).

Por ejemplo:

$+7 > +3$ porque:

$|+7| = 7$ y $|+3| = 3$ es decir que $7 > 3$

$-4 > -6$ porque: $|-4| = 4$ y $|-6| = 6$, 4

unidades están más cerca del cero que 6 unidades

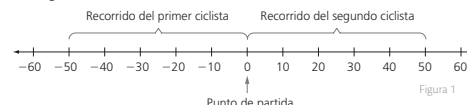
Recomendaciones para desarrollar la lección

- Para trabajar con el valor absoluto de un número entero es necesario utilizar la recta numérica para que los estudiantes identifiquen con mayor facilidad el concepto de valor absoluto.
- Explique a los estudiantes que el valor absoluto de un número negativo siempre será el número positivo que se encuentre ubicado a la misma distancia del cero que él pero para la parte contraria por ejemplo el valor absoluto de -15 es el 15; el de -53 es 53 y así sucesivamente.
- Proponga ejercicios donde apliquen los conocimientos adquiridos en clases como por ejemplo: determina el valor absoluto de: -54; -1001; 342; -762 y 1000 000. Los estudiantes determinarán el módulo o valor absoluto aplicando los conocimientos adquiridos en clases.

3

Valor absoluto de un número entero

La ubicación de los ciclistas se puede representar en una recta numérica como la de la Figura 1.



Explora

Dos ciclistas parten de un mismo punto en sentidos opuestos y hacen un recorrido en línea recta.



- Si los dos van a una velocidad de 50 km/h, ¿qué distancia separa a cada ciclista del punto de partida al cabo de una hora de recorrido?

Se observa que, después de una hora de recorrido, el primer ciclista se encuentra a -50 km del punto de partida, mientras que el segundo está a +50 km. Sin embargo, los ciclistas están a la misma distancia del punto de partida, es decir, 50 km.

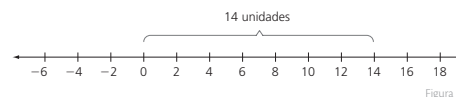
Se dice entonces que los números enteros -50 y +50 tienen el mismo **valor absoluto**, pues en la recta numérica están a igual distancia de 0.

El **valor absoluto de un número entero** es la distancia que separa al número del cero en la recta numérica. Esta medida siempre es una cantidad positiva.

El valor absoluto de un número entero a se simboliza como $|a|$.

Ejemplo 1

El valor absoluto de +14 es 14 porque, en la recta numérica, la distancia de +14 a 0 es de 14 unidades. Se escribe $|+14| = 14$. Observa la Figura 2.



Ten en cuenta

El valor absoluto de un número entero a se representa simbólicamente de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{Si } a \geq 0 \\ -a, & \text{Si } a < 0 \end{cases}$$

Actividades resueltas

Comunicación

- Calcula los siguientes valores absolutos. Justifica en cada caso.

- $|-6|$
- $|+12|$
- $|-7|$
- $|0|$

Solución:

- $|-6| = 6$, ya que -6 está a 6 unidades de 0 en la recta numérica.
- $|+12| = 12$, porque entre +12 y 0 hay 12 unidades de distancia.
- $|-7| = 7$, puesto que hay 7 unidades entre -7 y 0.
- $|0| = 0$, porque entre 0 y el mismo hay 0 unidades.

- Escribe el número entero que cumple cada condición.

- Su valor absoluto es 7 y está entre -10 y 3.
- Su valor absoluto es 9.
- Su valor absoluto es igual al de -4.
- Es el opuesto del número cuyo valor absoluto es 6.

Solución:

- 7
- 9 o -9
- 4
- 6 o -6

Bloque de Álgebra y Funciones

Destaca con criterios de desempeño: Reconocer los elementos del conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3. Determina estos valores absolutos.

a. $|-3|$ b. $|54|$ c. $|0|$
d. $|-(11)|$ e. $|-6|$ f. $|-(5)|$
g. $|-a|$ h. $|-x|$ i. $|1 + 0|$

4. Calcula el resultado de cada operación.

a. $|-3| \cdot |8|$ b. $|-9| + |-13|$
c. $|-25| + |5|$ d. $|-30| + |-10|$
e. $|-8| \cdot |-4|$ f. $|-5| + |-10|$
g. $|2| \cdot |-9|$ h. $|-24| \div |6|$

Razonamiento

5. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El valor absoluto de un número siempre es un entero positivo. ()
b. El valor absoluto de 0 es 1. ()
c. El valor absoluto de un número entero a positivo siempre es $-a$. ()

6. Halla el valor de x para que cada expresión sea verdadera.

a. $|x| = 15$ b. $|-3| = x$
c. $|-x| = 7$ d. $|x| = 0$
e. $|8| = x$ f. $|-(13)| = x$
g. $|x - 3| = 12$ h. $|x| = -11$

Comunicación

7. Encuentra, en cada caso, el número entero que cumple la condición dada.

a. Su valor absoluto es 8 y está a la izquierda de 0.
b. Su valor absoluto es 3 y está situado entre -4 y -2 .
c. Su valor absoluto es igual que el de su opuesto.
d. Su valor absoluto es 15 y es menor que 9.
e. Su valor absoluto es 4 y se representa en la recta numérica a la derecha de -12 .
f. Su valor absoluto es 12.
g. El valor absoluto de su opuesto es 7.

8. Responde.

a. Si a es un número entero, ¿cuál es el valor absoluto de $-(-a)$?

Razonamiento

9. Señala con una X si la afirmación es verdadera o falsa.

a. $|-1| = 1$ () V F
b. $|1| = -1$ () () ()
c. $|8 - 6| = |6 - 8|$ () ()
d. $|0 - 3| = |3 - 0|$ () ()
e. $|-6 + 3| = |3 - 6|$ () ()
f. $|-5| = -5$ () ()
g. $-|5| = 5$ () ()

10. Escribe el número que cumple simultáneamente estas condiciones.

a. Su valor absoluto es mayor que 5 y menor que 9.
b. Está comprendido entre -10 y 7.
c. Su valor absoluto es menor que 5 y mayor que 3.

11. Explica cuál puede ser la ubicación de dos puntos A y B sobre la recta numérica, si:

$|A - B| = 13$

Resolución de problemas

12. Buscando una dirección, Alejandro caminó inicialmente siete cuadras en una dirección. Luego, se desplazó tres cuadras en la dirección contraria. ¿Cuántas cuadras caminó en total?

13. Valeria hizo la siguiente afirmación: "Mi hermano recorre una distancia de -400 m de la casa hacia el colegio". ¿Consideras que la afirmación es correcta o incorrecta? Explica.

14. Un vehículo sale del estacionamiento y se desplaza 40 m al norte. Luego, se devuelve sobre la misma calle y se traslada 70 m hacia el sur y, finalmente, se mueve 20 m hacia el sur. ¿Cuántos metros recorrió en total el vehículo?

15. Un pájaro elevándose en el aire, y un buzo sumergido en el mar, se encuentran a la misma distancia del nivel del mar. ¿A qué altura se encuentra el pájaro y a qué profundidad el buzo, si los separan 86 m?

Ejercitación

3. a. 3 b. 54 c. 0
d. 11 e. 6 f. 5
g. a h. x i. 1

4. a. 24 b. 22
c. 5 d. 3
e. 32 f. 15
g. 18 h. 4

Razonamiento

5. a. V
b. F
c. F
6. a. $x = 15$ o $x = -15$ b. $x = 3$
c. $x = -7$ o $x = 7$ d. $x = 0$
e. $x = 8$ f. $x = 13$
g. $x = -9$ o $x = -15$ h. No existe

Comunicación

7. a. -8 b. -3
c. Todos los números enteros.
d. -15 e. -4 o 4
f. -12 o 12 g. -7 o 7
8. a

Razonamiento

9. a. V b. F
c. V d. V
e. V f. V
g. F

10. a. $-8, -7, -6, 6, 7, 8$
b. 4 y -4
c. $-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

11. Múltiples respuestas; por ejemplo:
 $|20 - 7| = 13$; $A = 20$ y $B = 7$

Resolución de problemas

12. 10 cuadras.
13. Incorrecta
14. 130 m
15. El pájaro se encuentra a 43 m de altura y el buzo a 43 m de profundidad.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Para comparar números enteros sobre la recta numérica, se mantiene el mismo criterio que para comparar números naturales.

En la recta numérica, todo número que se encuentra a la izquierda de otro es menor que él. Un número entero negativo es siempre menor que cero y que un número entero positivo cualquiera.

Entre dos números enteros negativos, el menor es el que se encuentra a mayor distancia del cero. Matemáticamente para comparar dos o más números enteros se utilizan los símbolos $>$ (mayor que) o $<$ (menor que).

Por ejemplo: $+5 > -3$;

$$\dots, -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4 < +5 < +6 < +7, \dots$$

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes que en el conjunto de los números naturales el mayor número siempre es el que más se aleja del cero; mientras más a la derecha mayor es el número. En el conjunto de los números enteros ocurre lo mismo teniendo en cuenta que en los enteros negativos mientras más se acerque al cero mayor es el número.
- Explique a los estudiantes que en el conjunto de los enteros negativos, para establecer la relación de orden, siempre se tiene en cuenta la posición respecto al cero, es decir, mientras más cerca esté el número entero negativo del cero mayor será; por ejemplo: entre el -23 y -50 , el docente le realizará la pregunta a los estudiantes, ¿cuál es el mayor? Justifique. Los estudiantes deben responder que el $-23 > -50$ pues el -23 está a la derecha del -50 y más cerca del cero.

4

Orden en los números enteros

Explora

Sofía registró en la Tabla 1 la temperatura de tres cuartos fríos de un laboratorio.

Cuarto	Temperatura
A	-2°C
B	-8°C
C	-5°C

Tabla 1



• Según esta información, ¿en cuál de los tres cuartos hace más frío?

Ten en cuenta

El cero es menor que cualquier entero positivo y mayor que cualquier entero negativo.

Para determinar en cuál de los cuartos hace más frío, se pueden representar las temperaturas en una recta numérica y luego comparar su ubicación (Figura 1).

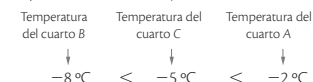


Cuando se comparan dos números enteros en la recta numérica, se deduce que es mayor el número que se encuentra ubicado a la derecha del otro. A su vez, es menor el que se encuentra ubicado a la izquierda.

De acuerdo con lo anterior, se pueden establecer las siguientes relaciones de orden:

- Como -2 está a la derecha de -5 , entonces $-5 < -2$.
- Como -5 está a la derecha de -8 , entonces $-8 < -5$.
- Como -2 está a la derecha de -8 , entonces $-8 < -2$.

Esto quiere decir que el orden de las temperaturas es:



Por lo tanto, en el cuarto B es en el que hace más frío.

Si dos números enteros a y b están representados en la recta numérica, entonces $a > b$, siempre que a esté ubicado a la derecha de b .

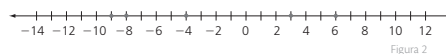
Otros criterios que permiten determinar la relación de orden existente entre dos números enteros son:

- Dados dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- Dados dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Un número positivo siempre es mayor que cualquier número negativo.

Actividad resuelta

Comunicación

- 1 Escribe cuatro afirmaciones verdaderas en relación con la información de la Figura 2.



Solución:

Algunas afirmaciones que se pueden emitir con respecto a la información de la recta numérica son las siguientes:

- $-8 < -4$, ya que -4 está a la derecha de -8 .
- 6 es el mayor de los números representados, puesto que está ubicado a la derecha de todos los demás.
- $3 > -9$, porque un número positivo siempre es mayor que cualquier número negativo.
- El orden de los números de menor a mayor es:
 $-9 < -8 < -4 < 3 < 6$

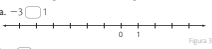
Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($<$, $>$, $=$, $\neq$).

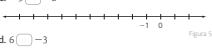
Desarrolla tus destrezas

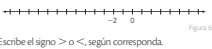
Ejercitación

2. Representa cada pareja de números enteros en la recta numérica. Luego, escribe $>$ o $<$, según sea el caso.

a. -3 1  **Figura 3**

b. 4 -6  **Figura 4**

c. -5 -8  **Figura 5**

d. 6 -3  **Figura 6**

3. Escribe el signo $>$ o $<$, según corresponda.

a. $+4$ $+1$ b. -1 -6
 c. 0 $+3$ d. -8 $+2$
 e. -2 0 f. $+5$ -9
 g. -78 26 h. -27 -49
 i. 47 38 j. 19 -29
 k. -18 36 l. -54 -29
 m. 45 -36 n. 29 -98
 ñ. -19 -18 o. 0 -2

Razonamiento

6. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. 3 está entre 1 y -1 . ()
 b. -1 está entre -3 y 0. ()
 c. -2 está entre 0 y 5. ()
 d. 2 está entre -1 y 1. ()
 e. 3 está entre -5 y 5. ()

7. Escribe un número que cumpla la condición que se enuncia en cada caso.

a. $-6 < \square$ b. $\square > -5 > \square$
 c. $|-8| = \square$ d. $-21 < \square < \square$
 e. $-4 < \square < 8$ f. $-2 < \square < 0$

Resolución de problemas

9. En la Tabla 3 se presentan los puntos de ebullición aproximados de algunos elementos de la tabla periódica.

Elemento químico	Punto de ebullición (°C)
Flúor	-188
Hidrógeno	-253
Argón	-186
Helio	-269
Nitrógeno	-196
Neón	-246

a. ¿Cuál es el elemento químico con el mayor punto de ebullición? ¿Y con el menor?

b. Ordena, de menor a mayor, los elementos periódicos de la tabla según sus puntos de ebullición.

10. Tres fosas marinas tienen una profundidad de $-5\,534$ m, $-6\,524$ m y $-4\,321$ m, respectivamente. ¿Cuál de las tres fosas marinas tiene mayor profundidad? ¿Cuál de las fosas es menos profunda?

Comunicación

4. Completa la Tabla 2.

Anterior	Número	Siguiente
	-210	
	+245	
	-62	
	+299	
	-157	
	-302	

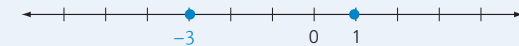
5. Ordena de menor a mayor los números de cada grupo.

a. 25, -32, 24, -1, 0, -12
 b. 12, 7, -20, 16, -13
 c. -54, 678, -249, 14, -24, 0, 190
 d. 32, 56, 17, -8, -41

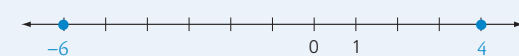
Ejercitación

2.

a.



b.



c.



d.



3. a. $>$ b. $>$ c. $<$

d. $<$ e. $<$ f. $>$

g. $<$ h. $>$ i. $>$

j. $>$ k. $<$ l. $<$

m. $>$ n. $>$ o. $<$

ñ. $<$ 0. $>$

Comunicación

4.

Anterior	Número	Siguiente
-211	-210	-209
+244	+245	+246
-63	-62	-61
+298	+299	+300
-158	-157	-156
-303	-302	-301

5. a. $-32, -12, -1, 0, 24, 25$.
 b. $-20, -13, 7, 12, 16$.
 c. $-249, -54, -24, 0, 14, 190, 678$.
 d. $-41, -8, 17, 32, 56$.

Razonamiento

6. a. F b. V
 c. F d. F e. V

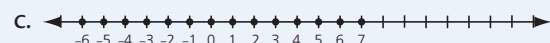
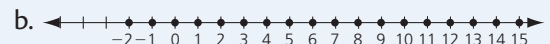
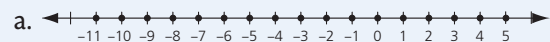
7. a. $-6 < 8$ b. $-3 > -5 > -9$

c. $|-8| = 8$ Respuesta única

d. $-21 < 0 < 1$ e. $-4 < 1 < 8$

f. $|-8| = 8$ Respuesta única

8.



Resolución de problemas

9. a. Argón y helio, respectivamente.
 b. Helio, hidrogeno, neón, nitrógeno, flúor, argón.
10. La fosa de $-6\,524$ m es la de mayor profundidad. La fosa de $-4\,321$ m es la de menor profundidad.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Los números enteros se identifican comúnmente como los números que tienen signo y son los enteros positivos, el cero y los enteros negativos. A diferencia de los naturales, para efectuar la adición y sustracción con ellos, se emplea el valor absoluto y el simétrico de un número.

El valor absoluto de un número es el valor de dicho número sin su signo; esto es, el valor absoluto de:

- Un número entero positivo es el mismo entero positivo.
- Un número entero negativo es su simétrico.
- El cero es el mismo cero

El valor absoluto de un número se denota mediante el símbolo $| |$ Ejemplos:

- $|200|$ esto se lee “valor absoluto de 200 es 200”.
- $|-756|$ esto se lee “valor absoluto de -756 es 756”.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes el caso particular del conjunto numérico que se está estudiando. En este caso en particular se tienen enteros positivos y enteros negativos, o sea para realizar cualquiera de las operaciones de cálculo se debe tener en cuenta los signos para obtener el resultado esperado.
- Valore con los estudiantes por ejemplo, la adición de los números enteros negativos con signos iguales, cualesquiera sean los signos; la adición de los números enteros positivos, cualesquiera sean sus signos y la adición de los números enteros ya sean enteros positivos o enteros negativos y cualesquiera sean sus signos.

Adición de números enteros

Explora

En una exploración del fondo marino, un buzo se sumerge, en un primer momento, a 45 m de profundidad y al cabo de una hora desciende otros 27 m.



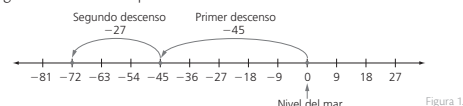
- En total, ¿cuántos metros descendió el buzo durante la exploración?

5.1 Adición de números enteros del mismo signo

Para resolver la situación, se pueden sumar las distancias recorridas por el buzo en su descenso; es decir, se efectúa una **adición de números enteros**.

$$\begin{array}{r} \text{Primer descenso (m)} \\ -45 \\ + \\ \text{Segundo descenso (m)} \\ (-27) \\ \hline \end{array}$$

En la Figura 1 se muestra la representación de esta adición.



Por lo tanto:

$$-45 + (-27) = -72$$

Analicamente, el resultado anterior es equivalente a la suma de los valores absolutos de los sumandos, precedida por el signo común de los números -45 y -27 . Esto es:

Suma de los valores absolutos de los sumandos

$$\text{Signo común} \rightarrow -(|-45| + |-27|) = -(45 + 27) = -72$$

Se deduce entonces que el buzo descendió 72 m en total.

En la **adición de números enteros del mismo signo**, se suman los valores absolutos de los sumandos y a esta suma se le antepone el signo que tienen en común.

5.2 Adición de números enteros de diferente signo

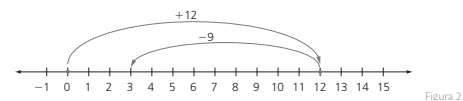
En la **adición de números enteros de diferente signo**, se restan los valores absolutos de los sumandos y a la suma se le antepone el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto.

Ejemplo 1

Para efectuar la operación $-9 + 12$ se procede así:

- Se calculan los valores absolutos de los dos sumandos. $|-9| = 9$ y $|12| = 12$
- Al mayor valor absoluto se le resta el menor valor. $12 - 9 = 3$
- Al resultado se le antepone el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto. $-9 + 12 = +3$

La suma $-9 + 12$ se puede representar como en la Figura 2.



Destreza con criterios de desempeño: Operar en $\mathbb{Z}$ (adición) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

5.3 Propiedades de la adición de números enteros

La adición de números enteros cumple con las propiedades que se presentan en la Tabla 1.

Propiedad	Descripción	Ejemplo
Clausurativa	La adición de dos o más números enteros es otro número entero.	$(-20) + (-39) = -59$
Conmutativa	En la adición de números enteros, el orden de los sumandos no altera la suma.	$(-25) + 45 = 45 + (-25)$ $20 = 20$
Asociativa	Se pueden asociar los sumandos de varias formas y el resultado no se altera.	$\bullet (-23 + 24) + (-4)$ $= 1 + (-4) = -3$ $\bullet -23 + [24 + (-4)]$ $= -23 + 20 = -3$
Modulativa	Todo número entero sumado con el 0 da como resultado el mismo número entero.	$0 + (-12) = (-12) + 0$ $-12 = -12$
Invertiva	Todo número entero sumado con su opuesto aditivo da como resultado 0.	$25 + (-25) = (-25) + 25$ $0 = 0$

Tabla 1

Ten en cuenta

El opuesto de un número entero también se denomina **inverso aditivo**.

5.4 Adición de varios números enteros

Las propiedades de la adición de números enteros permiten efectuar la adición de tres o más números enteros de dos maneras equivalentes.

- Se suman los números de dos en dos, de forma consecutiva.
- Se suman por separado los números positivos y los negativos, y luego se resuelven las operaciones resultantes.

$$\begin{aligned} & 25 + (-32) + (-12) + 23 \\ &= \overbrace{25 + (-32)}^{-7} + (-12) + 23 \\ &= \overbrace{-7 + (-12)}^{-19} + 23 \\ &= \overbrace{-19 + 23}^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 25 + (-32) + (-12) + 23 \\ &= 25 + 23 + (-32) + (-12) \\ &= \overbrace{25 + 23}^{48} + \overbrace{(-32) + (-12)}^{-44} \\ &= \overbrace{48 + (-44)}^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Luis hizo dos compras con su tarjeta de crédito: una por \$ 296 y otra por \$ 103. Antes de hacer las compras tenía un saldo a favor de \$ 229, entonces abonó a la tarjeta \$ 130. ¿Qué saldo tiene después del abono?

Solución:

Para resolver el problema, se puede efectuar la siguiente adición de números enteros aplicando las propiedades.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Saldo a favor} & & \text{Costo de la primera compra} & & \text{Costo de la segunda compra} & & \text{Abono} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 229 & + & (-296) & + & (-103) & + & 130 \\ = 229 + 130 + (-296) + (-103) & & & & & & \\ = 359 + (-399) & & & & & & \\ = -40 & & & & & & \end{array}$$

Por tanto, Luis tiene un saldo en contra de \$ 40.

TECNOLOGÍAS de la comunicación

<http://www.ematematicas.net/openteros.php?op=suma>
Practica la adición de números enteros.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes realicen la siguiente adición

$-24 + (-187) = ?$; los estudiantes deben conocer las reglas de los signos. Por ejemplo en este caso en particular el docente le explica de forma bien consistente a los estudiantes que para sumar dos números con signos iguales se procede a realizar la misma y se mantiene el signo, en este caso los signos de los dos sumandos es el mismo; por tanto el resultado será el valor resultante de la suma con el signo de los sumandos: 211 como ambos sumandos tienen el signo negativo se suma y se mantiene el signo. -211 .

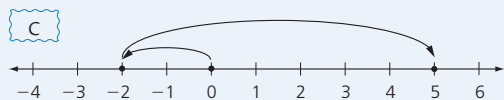
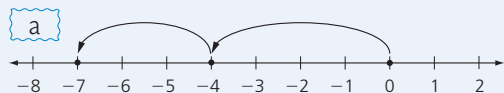
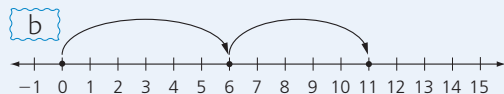
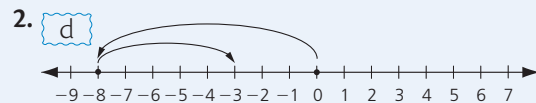
2. Solicite a los estudiantes que resuelvan la siguiente suma de números enteros con diferentes signos:

$-60 + 96 = ?$ En este caso los estudiantes cuando estén en presencia de varios signos y en este caso en particular de la adición y sustracción entonces se debe restar y colocar le signos del número que tiene mayor módulo por ejemplo: 60 es menor que 96 y 96 tiene el signo positivo por lo tanto el resultado será positivo entonces $-60 + 96 = 36$

3. Proponga una actividad donde los estudiantes apliquen sus conocimientos sobre la adición de los números enteros, por ejemplo: Analice, resuelva y aplique las propiedades de la adición con números enteros que se relacionan a continuación:

- a) $-325 + 325 = 0$ propiedad (invertida)
- b) $-423 + 23 = -400$ clausurativa
- c) $765 + 0 = 765$ modulativa

Ejercitación



3. a. 7 b. -73 c. -21
d. 16 e. -4 f. -23
g. 30 h. -32 i. 8
j. -90

Comunicación

4.

a	b	a + b	a + (-b)
-5	-16	-21	11
6	-18	-12	24
-12	24	12	-36
18	31	49	-13
-25	-17	-42	-8
31	-41	-10	72

Razonamiento

5. a. $x = -7$; Asociativa
b. $y = -13$; Invertiva
c. $x = 54$; Conmutativa
d. $z = 0$; Invertiva.

Ejercitación

6. a. -2 b. -35 c. -53
d. -15 e. 15

5

Adición de números enteros

Matemáticas

Calcula con números negativos

Identifica en tu calculadora científica las teclas +/- y = . Estas te permitirán introducir cualquier adición de números enteros.

Ahora, observa la secuencia que debes ingresar en tu calculadora para efectuar la operación $18 + (-27) + (-19)$.

1 8 + - 2 7 + - 1 9 =

Con ello obtendrás el siguiente resultado:

18 + (-27) + (-19)
-28



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Relaciona cada adición con la representación en la recta numérica que le corresponde.

- a. $-4 + (-3)$ b. $6 + 5$
c. $-2 + 7$ d. $-8 + 5$

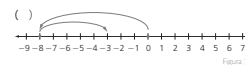


Figura 3

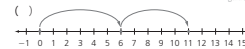


Figura 4

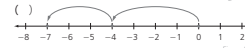


Figura 5

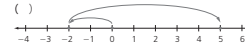


Figura 6

3. Calcula la suma en cada caso.

- a. $19 + (-12)$ b. $-82 + 9$
c. $6 + (-27)$ d. $18 + (-2)$
e. $-8 + 4$ f. $-12 + (-11)$
g. $37 + (-7)$ h. $-19 + (-13)$
i. $25 + (-17)$ j. $-89 + (-1)$

Comunicación

4. Completa la Tabla 2.

a	b	a + b	a + (-b)
-5	-16		
6	-18		
-12	24		
18	31		
-25	-17		
31	-41		

Tabla 2

Razonamiento

5. Escribe, en cada caso, el valor de la letra y la propiedad de la adición que se utilizó.

- a. $15 + (-8 + x) = [15 + (-8)] + (-7)$
b. $13 + y = 0$
c. $-23 + 54 = x + (-23)$
d. $27 + (-27) = z$

Ejercitación

6. Efectúa las siguientes adiciones.

- a. $(+4) + (-6) + (-8) + (+10) + (-2)$
b. $(+8) + (-60) + (+16) + (+5) + (-4)$
c. $(-10) + (-8) + (+1) + (-6) + (-30)$
d. $(-10) + (+2) + (-5) + (+6) + (-8)$
e. $(+7) + (-2) + (+9) + (+3) + (-2)$

Destina tus criterios de desempeño: Operar en $\mathbb{Z}$ (adición) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Bloque de Álgebra y Funciones.

Comunicación

7. Responde:

- ¿Qué obtienes si al número entero 349 le sumas 85 y al resultado le sumas -434 ? ¿Qué propiedad de la adición cumple ese resultado?

Razonamiento

8. Completa la pirámide numérica de la Figura 7. Ten en cuenta la información de la pirámide de la izquierda.

Figura 7

11. Encuentra y corrige el error en las siguientes adiciones de números enteros.

a. $-13 + 46 + (-17) + 8 + (+5)$
 $= -13 + (-17) + 46 + 5 + 8$
 $= 30 + 59$
 $= 89$

b. $-46 + 4 + (-7) + 8 + (-5)$
 $= 4 + 8 + (-46) + (-7) + (-5)$
 $= -12 + 57$
 $= -45$

Resolución de problemas

12. Tres niñas recibieron de sus padres cierta cantidad de dinero para ir de compras. La primera recibe \$ 55, la segunda \$ 5 más que la primera y la tercera recibe la suma de las otras dos juntas. ¿Cuánto recibió cada niña?

13. Pitágoras, famoso filósofo y matemático griego, nació en el año 571 a. C. Según la historia, este personaje murió a los 85 años de edad. ¿En qué año murió Pitágoras?

14. La invención de la escritura data del año 3000 a. C. ¿Cuántos años han transcurrido hasta hoy?

15. La temperatura actualmente es de 5°C pero la radio dice que descenderá 9°C más. ¿Cuál será entonces la temperatura al cabo de un rato?

16. Tomás abordó un ascensor en el primer piso de un edificio e hizo este recorrido: subió hasta el piso 22, luego subió cinco pisos más, descendió seis pisos, subió tres y, finalmente, descendió nueve. ¿A qué piso llegó Tomás?

17. Un termómetro marca -3°C a las 5:00 a. m.; dos horas después la temperatura aumenta 2°C . A las 11:00 a. m. el termómetro señala una temperatura de 19°C , y tres horas después marca 13°C . ¿Qué variación sufrió el termómetro entre las 7:00 a. m. y las 2:00 p. m.?

18. Tiberio Claudio César Augusto Germánico, historiador y político romano, nació el 1 de agosto del año 11 a. C. y murió el 13 de octubre del año 14 d. C. ¿Cuántos años vivió?

19. La adición de dos números es -17 . Calcula el número menor, si el mayor es -8 .

10. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

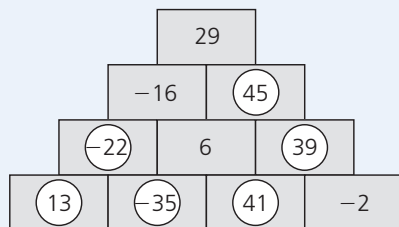
- El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número. ()
- Al adicionar números enteros que están a la izquierda del 0, se obtiene un número entero negativo. ()
- La suma de dos enteros negativos es negativa. ()
- La suma de dos enteros positivos es positiva. ()
- Los números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado 1. ()

Comunicación

7. Se obtiene 0. Propiedad invertiva.

Razonamiento

8.



9.

a.

5	6	-8
-12	1	14
10	-4	-3

b.

-8	10	-11
-6	-3	0
-5	-16	2

c.

7	0	-1
-6	2	10
5	4	-3

d.

-2	-7	-6
-9	-5	-1
-4	-3	-8

10. a. V

b. V

c. V

d. V

e. F

11. a. 29

b. -45

Resolución de problemas

12. \$ 55,

\$ 60

y \$ 115, respectivamente.

13.

Murió en el año 486 a.C

14.

5015 años.

15.

-4°C

16.

Tomás llegó al piso 15

17.

14°C

18.

Vivió 65 años.

19.

El número menor es -9 .

Libro del alumno

Ampliación conceptual

La resta o la sustracción es una operación matemática que se representa con el signo (-), representa la operación de eliminación de objetos de una colección.

Está representada por el signo menos (-). Por ejemplo, en la imagen de la derecha, hay $5 - 2$ manzanas significando 5 manzanas con 2 quitadas, con lo cual hay un total de 3 manzanas. Por lo tanto, $5 - 2 = 3$

Además de contar frutas, la sustracción también puede representar combinación otras magnitudes físicas y abstractas usando diferentes tipos de objetos: números negativos, fracciones, números irracionales, vectores, decimales, funciones, matrices y más.

La sustracción sigue varios patrones importantes. Es anticonmutativa, No es asociativa, La sustracción también obedece a reglas predecibles relativas a las operaciones relacionadas, tales como la adición y la multiplicación.

Recomendaciones para desarrollar la lección

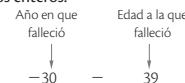
- Analice con los estudiantes en el aula que todas estas reglas de los signos pueden probarse, a partir de la sustracción de números enteros y generalizarlas mediante los números reales y más allá.

Socialice con los estudiantes que los signos se utilizarán de por vida. Las operaciones binarias generales que siguen estos patrones se estudian en el álgebra abstracta. Realizar sustracciones es una de las tareas numéricas más simples.

6

Sustracción de números enteros

Para averiguar el año de nacimiento de Cleopatra, se puede efectuar la siguiente sustracción de números enteros.



Una sustracción de números enteros es equivalente a la adición del minuendo con el opuesto del sustraendo. En este caso,

$$-30 - 39 \text{ es equivalente a } -30 + (-39)$$

Por lo tanto:

$$-30 - 39 = -30 + (-39) = -69$$

Según el anterior resultado, Cleopatra nació en el año 69 a. C.

Si a y b son dos números enteros, entonces la sustracción entre a y b expresada como $a - b$ es equivalente a $a + (-b)$.

Ejemplo 1

La sustracción $23 - 45$ se puede efectuar como se muestra a continuación.

$$23 - 45 = 23 + (-45) = -22$$

Ejemplo 2

Una sustracción de números enteros se puede expresar como una adición y, por tanto, se puede representar en la recta numérica. Observa.

a. $12 - (-10) = 12 + 10 = 22$

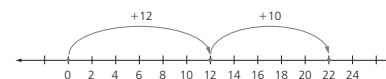


Figura 1

b. $36 - 27 = 36 + (-27) = 9$

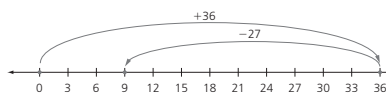


Figura 2

c. $-16 - 24 = -16 + (-24) = -40$

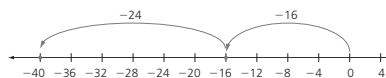


Figura 3

d. $-8 - (-5) = -8 + 5 = -3$

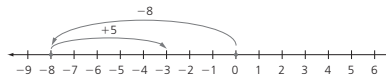


Figura 4

Explora

Cleopatra, famosa reina de Egipto, falleció en el año 30 a. C., cuando tenía 39 años de edad.



• ¿En qué año nació Cleopatra?



CULTURA del Buen Vivir

El servicio

Es una cualidad de algunas personas que se manifiesta con la colaboración desinteresada hacia los demás.

- Describe dos situaciones en las que consideres que has servido a tus compañeros.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Operar en $\mathbb{Z}$ (sustracción) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 La temperatura de un refrigerador es de 12°C bajo cero. Si dicha temperatura disminuye 7°C más, ¿cuál es la nueva temperatura del refrigerador?

Solución:
La situación se puede resolver efectuando una sustracción.

Temperatura inicial del refrigerador ($^\circ\text{C}$) Disminución de la temperatura ($^\circ\text{C}$)

-12 -7

Esto es:
 $-12 - 7 = -12 + (-7) = -19$

Se concluye que la nueva temperatura del refrigerador es 19°C bajo cero.

Ten en cuenta

El signo menos tiene dos significados:

Operación
 $12 + (-5)$
Número negativo

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe cada sustracción de números enteros como una adición equivalente y resuélvela.

a. $19 - (-12)$ b. $(-82) - 9$
c. $-6 - (-27)$ d. $18 - (-2)$
e. $(-18) - 4$ f. $(-12) - (-11)$
g. $37 - (-7)$ h. $(-19) - (-13)$

3 Efectúa las siguientes operaciones.

a. $[(-28) - (+42)] - (-13)$
b. $[(-15) - (-6)] - (-23)$
c. $[(+45) - (-4)] - (+17)$
d. $[(+27) - (-18)] - (-72)$

4 Completa la Tabla 1.

Personaje	Fecha de nacimiento	Fecha de fallecimiento	Cantidad de años vividos
Pitágoras	-571	-497	
Euclides		-275	55
Zenón	-495		65
Arquímedes	-287	-212	

Tabla 1

5 Haz lo que se indica en cada caso.

a. Resta 200 de 280 b. A -540 réstale -120
c. De 850 resta -1070 d. Resta -2945 de -980

Resolución de problemas

6 Un termómetro marcaba -5°C a las 5:00 a. m. y 12°C al mediodía. ¿Cuál fue la variación de la temperatura?

7 Si en una sustracción el minuendo es -125 y la diferencia es -125, ¿cuál es el sustraendo?

8 Karl Wilhelm, famoso matemático suizo, murió en el año de 1891, a los 74 años. ¿Cuándo nació este personaje?

9 La Tabla 2 muestra el número de goles a favor y en contra de los cuatro equipos que participaron en un campeonato de fútbol.

Equipos	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
7 A	35	38	
7 B	28	25	
7 C	52	43	
7 D	46	49	

Tabla 2

a. Completa la columna de la diferencia de goles con los números enteros correspondientes.
b. ¿Qué equipo tuvo la mayor diferencia de goles?
c. ¿Qué equipo tuvo la menor diferencia de goles?
d. ¿Qué equipo no tuvo diferencia de goles?
e. Ordena los equipos desde el que obtuvo el primer lugar hasta el que ocupó el último puesto.

Ejercitación

2. a. 31 b. -91
c. 21 d. 20
e. 22 f. -1
g. 44 h. -6
3. a. -57 b. 14
c. 32 d. 32

4.

Personaje	Fecha de nacimiento	Fecha de fallecimiento	Cantidad de años vividos
Pitágoras	-571	-497	74
Euclides	-330	-275	55
Zenón	-495	-430	65
Arquímedes	-287	-212	75

5. a. $280 - 200 = 80$
b. $-540 - (-120) = -420$
c. $850 - (-1070) = 1920$
d. $-980 - (-2945) = 1965$

Resolución de problemas

6. 17°C
7. 0
8. En el año 1817
9. a

Equipos	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
7 A	35	38	-3
7 B	28	25	3
7 C	52	43	9
7 D	46	49	-3

- b. 7 C
- c. 7 D y 7 A
- d. Todos tuvieron diferencia de goles
- e. Partiendo de la diferencia de goles se tienen las siguientes posiciones desde el primer lugar hasta el último 7 C, 7 B, 7 A y 7 D, donde 7 A y 7 D ocuparon el último puesto.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

En matemáticas, un enunciado en el que dos expresiones (iguales o distintas) denotan el mismo objeto matemático se llama igualdad matemática. Por ejemplo, la frase «la suma de dos y dos» y la expresión «cuatro» se refieren al mismo objeto matemático, un cierto número natural. La expresión «es igual a» o «es lo mismo que» se suele representar en matemáticas con el signo $=$. Así, el ejemplo anterior suele escribirse como: $2 + 2 = 4$

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones matemáticas, denominadas miembros, en las que aparecen elementos conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; también variables o incluso objetos complejos como funciones o vectores. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar. Por ejemplo, en la ecuación algebraica simple:

$$\underbrace{3x - 1}_{\text{Primer miembro}} \quad \underbrace{9 + x}_{\text{Segundo miembro}}$$

La variable representa la incógnita, mientras que el coeficiente 3 y los números 1 y 9 son constantes conocidas. La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas.

Las **inecuaciones** son **desigualdades** algebraicas en la que sus dos miembros se relacionan por uno de estos signos: **menor que** ($<$) **mayor que** ($>$), **menor o igual que** ($\leq$) **mayor o igual que** ($\geq$).

7

Igualdades, ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{Z}$

7.1 Igualdades

Para solucionar el reto se utilizan igualdades.

En forma horizontal se verifica que:

$$\begin{aligned} 1 + 4 &= 5 \\ 3 - 2 &= 1 \\ 3 + 2 &= 5 \end{aligned}$$

En forma vertical se tiene:

$$\begin{aligned} 1 \times 3 &= 3 \\ 4 \div 2 &= 2 \\ 5 \times 1 &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto, el problema se resuelve de esta forma:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & + & 4 & = & 5 \\ \hline \times & & \div & & \times \\ \hline 3 & - & 2 & = & 1 \\ \hline = & & = & & = \\ \hline 3 & + & 2 & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

Una **igualdad** es una relación entre dos expresiones matemáticas que representan el mismo valor. Las igualdades tienen dos miembros separados por el signo igual ($=$).

Una igualdad actúa como una balanza en equilibrio, como se sugiere en la Figura 1.

Ejemplo 1

Los siguientes son ejemplos de igualdades matemáticas. En todos se obtiene 16 utilizando diferentes operaciones.

$$8 \times 2 = 16$$

$$5 + 5 + 6 = 16$$

$$32 \div 2 = 16$$

7.2 Propiedades de las igualdades

Si a , b y c son números naturales cualesquiera, tales que $a = b$, entonces se satisfacen las siguientes igualdades:

- $a + c = b + c$ para todo a, b, c y $a - c = b - c$ para $a > c$ y $b > c$.
- $a \times c = b \times c$ y $a \div c = b \div c$ para $c \neq 0$ (a y b múltiplos de c).

La primera propiedad menciona que al adicionar o sustraer la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, la igualdad se conserva.

La segunda propiedad indica que al multiplicar o dividir ambos miembros de una igualdad por la misma cantidad (diferente de cero), la igualdad se conserva.

Ejemplo 2

Dada la igualdad $15 + 3 = 18$, al adicionar 6 en ambos miembros de la igualdad las expresiones obtenidas siguen siendo iguales.

$$\begin{aligned} 15 + 3 + 6 &= 18 + 6 \\ 24 &= 24 \end{aligned}$$

Igualmente, al multiplicar por 2 ambos miembros de la igualdad, esta se conserva.

$$\begin{aligned} 2 \times (15 + 3) &= 2 \times 18 \\ 2 \times 15 + 2 \times 3 &= 36 \\ 30 + 6 &= 36 \\ 36 &= 36 \end{aligned}$$

Al restar 8 a ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.

$$\begin{aligned} 15 + 3 &= 18 \\ 15 + 3 - 8 &= 18 - 8 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

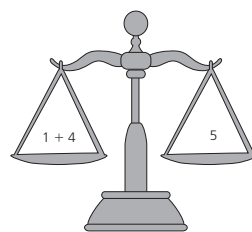


Figura 1

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Z en la solución de problemas.

7.3 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad en la cual hay términos conocidos y términos desconocidos. El término desconocido se llama **incógnita** y se representa generalmente por letras minúsculas del abecedario.

La ecuación se resuelve cuando se encuentra el valor o los valores de la o las incógnitas que hacen verdadera la igualdad. Este valor recibe el nombre de **solución**.

Ejemplo 3

La igualdad $x + 25 = 36$ es una ecuación porque uno de sus términos es desconocido. La incógnita en este caso está representada por la letra x . Al reemplazar la incógnita por 11 se verifica la igualdad $11 + 25 = 36$, lo que significa que $x = 11$ es la solución de la ecuación.

Ejemplo 4

Para que $2 \times m + 5 = 21$, m debe reemplazarse por 8, ya que: $2 \times 8 + 5 = 21$. Cualquier otro valor de m hace que no se conserve la igualdad. Por ejemplo, si $m = 1$, se tiene que $2 \times 1 + 5$ no es igual a 21.

Ten en cuenta

Es posible combinar ecuaciones aditivas y multiplicativas. Esas ecuaciones generalmente tienen la forma $a \times x + b = c$.

7.4 Ecuaciones aditivas y multiplicativas

Existen dos tipos de ecuaciones: aditivas y multiplicativas.

- Las ecuaciones aditivas tienen alguna de las formas:

$$a + x = b$$

$$x - a = b$$

$$a - x = b$$

- Las ecuaciones multiplicativas tienen alguna de las formas:

$$a \times x = b$$

$$x \div a = b$$

$$a \div x = b$$

Ejemplo 5

La ecuación $x + 15 = 30$ es aditiva, mientras que la ecuación $3 \times y = 21$ es una ecuación multiplicativa.

Ejemplo 6

Para solucionar la ecuación $x + 15 = 30$, se resta 15 en ambos miembros de la igualdad. El resultado es: $x = 15$.

Ejemplo 7

Para solucionar la ecuación $3 \times y = 21$, se divide por 3 en ambos miembros de la igualdad y se obtiene $y = 7$.

Ejemplo 8

A continuación se muestra la solución de algunas ecuaciones.

a. $38 - m = 25$

$$38 - m + m = 25 + m$$

$$38 + 0 = 25 + m$$

$$38 - 25 = 25 + m - 25$$

$$38 - 25 = m + 0$$

$$13 = m$$

b. $3 \times b + 7 = 28$

$$b \times 3 + 7 - 7 = 28 - 7$$

$$(b \times 3) \div 3 = 21 \div 3$$

$$b = 7$$

Cálculo mental

Deshacer operaciones

Si quieres resolver ecuaciones combinadas de la forma $a \times x + b = c$, puedes usar el cálculo mental para "deshacer" las operaciones: primero restas b a ambos lados para deshacer la suma y luego, divides el resultado del lado derecho entre a para deshacer la multiplicación.

- Usa tu cálculo para resolver la ecuación $5 \times x + 8 = 43$.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Solicite a los estudiantes que realicen ejercicios donde apliquen los conocimientos adquiridos en el tema que se desarrolla, igualdades, ecuaciones e inecuaciones lineales. Pida que resuelvan las siguientes ecuaciones $16 + x = 21$; recuerde a los estudiantes que las operaciones de cálculo tienen sus inversas o contrarias por ejemplo: la división es la operación inversa de la multiplicación; y la sustracción es la operación inversa a la adición, por tanto para resolver estas ecuaciones hay que tener en cuenta que debemos despejar tanto como sea posible la x para encontrar el valor que satisfaga la igualdad, en este caso despeja la x y el 16 que está en el miembro izquierdo y sumando, se traslada al miembro derecho con la operación inversa en este caso queda de la siguiente forma $x = 21 - 16$; $x = 5$. Aclare a los estudiantes la necesidad de comprobar para cada caso porque si el valor de x no satisface la igualdad no pertenece al conjunto solución de dicha ecuación.

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar la siguiente página web:
<http://www.vitutor.com/ecuaciones/ine/ineActividades.html>

■ Actividades colaborativas

Realice un taller donde los estudiantes desarrollen en el pizarrón, ecuaciones e inecuaciones lineales aplicando el algoritmo propuesto por el docente para cada una de ellas en particular.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes el concepto de ecuación y cada uno de los términos que la componen; pregunte a lo estudiantes qué es una ecuación; los estudiantes responderán que una ecuación es una igualdad donde aparece al menos una variable hasta este momento solo conocerán las ecuaciones lineales por tanto, comente que el mayor exponente de la variable es uno (1).
- Explique a los estudiantes que en las inecuaciones al igual que las ecuaciones debe aparecer una variable pero en este caso no es una igualdad si no una desigualdad; y el mayor exponente de la variable debe ser uno (1) también pues estamos en presencia de inecuaciones lineales.
- Socialice con los estudiantes las propiedades de las ecuaciones planteando ejemplos donde familiaricen el contenido: para $a = b$ y $c = 20$ entonces $52 + 20 = 20 + 52$; $72 = 72$; para realizar la multiplicación una ecuación de igual manera se procede multiplicando ambos miembros por el mismo número; y resulta el miembro izquierdo igual al miembro derecho sin alterar el resultado original, por ejemplo: $32 + 4 = 36$ y multiplicando ambos miembros por el mismo número (4) se obtiene $4 \times (32 + 4) = 36 \times 4$; se desarrollan los cálculos y se obtiene que: $4 \times 32 + 4 \times 4 = 36 \times 4$; $128 + 16 = 144$; $144 = 144$.
- Desarrolle ejemplos, mediante los cuales los estudiantes se afiancen de métodos de resolución de las ecuaciones aditivas y multiplicativas.

Igualdades, ecuaciones e inecuaciones en Z

7.5 Inecuaciones

Una **desigualdad** es una expresión que compara dos cantidades que no son iguales. Así como la igualdad se representa mediante una balanza en equilibrio, una desigualdad se representa como una balanza inclinada hacia alguno de los lados. Una desigualdad que contiene al menos una variable se denomina **inecuación**.

Ejemplo 9

Expresiones como $4 > 3$; $6 < 10$, y $6 + 9 > 8$ son desigualdades, mientras que otras como $x + 7 > 12$; $7 < z$; y $5 + m > 13$ son inecuaciones.

Las **soluciones de una inecuación** son los valores que puede tomar la incógnita, de manera que al sustituirlos en la inecuación hacen que la desigualdad sea cierta.

Ejemplo 10

La inecuación $x + 7 > 12$ es cierta para todos los valores mayores que 5. Si se toma $x = 6$ por ejemplo, se tiene que $6 + 7 > 12$; pero si se toma un valor menor que 5, como por ejemplo 4, la desigualdad es falsa porque $4 + 7 < 12$.

La solución de esta inecuación se puede representar sobre una semirrecta numérica repasando con un color todos los valores mayores que 5, como se muestra en la Figura 2.

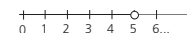


Figura 2

El círculo blanco sobre el 5 indica que este número no está incluido dentro de la solución.

Para resolver una inecuación se deben tener en cuenta un par de reglas básicas:

Regla de la suma. Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número, se obtiene una inecuación equivalente.

Regla del producto. Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o se dividen por un mismo número natural, se obtiene otra inecuación equivalente.

Ejemplo 11

Para solucionar la inecuación $5 + m > 13$, se resta 5 a lado y lado de esta, de manera que: $5 + m - 5 > 13 - 5$, de donde $m > 8$.

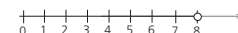


Figura 3

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve la inecuación $4 \times m + 5 \geq 13$.

Solución:

Primero se resta 5 a lado y lado de la inecuación.

$$4 \times m + 5 - 5 \geq 13 - 5$$

$$4 \times m \geq 8$$

Ahora, se divide al lado derecho e izquierdo por 4.

$$4 \times m \div 4 \geq 8 \div 4$$

$$m \geq 2$$

La representación gráfica de la solución se muestra en la Figura 4.

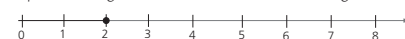


Figura 4

Bloque de Álgebra y Funciones.
Resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{Z}$ de manera analítica en la solución de ejercicios numéricos y problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Determina si cada igualdad es correcta.

- $45 + 27 = 31 + 36$
- $(3 \times 12) = (72 \div 2)$
- $4^3 = 8^2$
- $(64 - 26 + 12) = 3^3$
- $(256 \div 16) + 14 = 30 \times 10$
- $34 + 28 - 19 - 20 + 18 = 32$

3. Resuelve cada ecuación y verifica su solución.

- $23 + x = 52$
- $3 \times n = 51$
- $8 + y - 12 = 1$
- $5 \times p = 30$
- $50 = t - 1$
- $64 \div 8 + u = 30$
- $r = 24 - 12 \div 4$
- $56 \div 8 - 7 = j$
- $543 + 762 + h = 2\,653$
- $144 \div s = 12$

Comunicación

4. Resuelve cada inecuación y dibuja su solución sobre una semirrecta numérica.

- $x > 7$
- $y + 8 > 11$
- $n - 12 > 20$
- $u + 8 \geq 16$
- $p + 5 \leq 10$
- $f + 12 > 21$
- $4 \times r + 5 \leq 9$
- $h \times g - 4 > 10$

Modelación

5. Escribe una ecuación que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

- Su solución es $t = 14$.
- Su solución es $y = 24$.
- Es aditiva y su solución es 9.
- Su solución es $f = 14$ y su lado izquierdo es $5 \times f$.
- Su solución es $h = 13$ y el término de la derecha es $h - 12$.

Comunicación

6. Escribe dos inecuaciones cuya solución sea la que se representa en cada semirrecta numérica de la figura 5 a la figura 8.

Figura 5:

Figura 6:

Figura 7:

Figura 8:

Razonamiento

7. Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

- Todas las igualdades son ecuaciones.
- Todas las inecuaciones son desigualdades.
- Todas las inecuaciones tienen infinitas soluciones.
- Todas las ecuaciones tienen solución.
- Las ecuaciones equivalentes tienen la misma solución.
- La solución de $t + 10 = 10$ es $t = 1$.
- La solución de la ecuación $h \div 3 = 17$ es $h = 51$.
- Las ecuaciones $g + 4 = 5$ y $g - 2 = 1$ tienen la misma solución.

Comunicación

8. Plantea una ecuación o una inecuación, según corresponda en cada caso, resuélvela y dibuja su solución sobre una semirrecta numérica.

- La diferencia entre un número y 8 es 10.
- El doble de un número es mayor que 18.
- Un número sumado a 4 es igual a 11.
- El producto de 9 con cierto número es al menos 18.
- La diferencia entre un número y 12 es máximo 10.
- El cociente de un número y 8 es mínimo 2.

Razonamiento

9. Lee y resuélvela.

- Mauricio Andrés interpretó el enunciado "cinco veces un número más dos es igual a 17" mediante la ecuación $5 \times (p + 2) = 17$. Por su parte, Adriana lo interpretó mediante la expresión $5 \times p + 2 = 17$.
- ¿Cuál de ellos hizo la interpretación correcta?
- ¿Cuál es la solución de la ecuación?

Resolución de problemas

10. Luis quiere correr por lo menos 20 kilómetros cada semana. Representa gráficamente su recorrido semanal.

11. En una calle de la ciudad se permite manejar a 35 kilómetros por hora o menos. Usa la variable s para representar la velocidad en kilómetros por hora. Luego, escribe una inecuación que describa las velocidades permitidas. Finalmente, representa la solución de la inecuación.

Ejercitación

2. a. Incorrecta b. Correcta
c. Correcta d. Incorrecta
e. Incorrecta f. Incorrecta
3. a. $x = 2$ b. $n = 17$
c. $y = 5$ d. $p = 6$
e. $t = 51$ f. $u = 22$
g. $r = 2$ h. $j = 0$
i. $h = 1\,348$ j. $s = 12$

Comunicación

4. a. $x > 7$ b. $y > 3$
c. $n > 32$ d. $u \geq 8$
e. $p \leq 5$ f. $f > 9$
g. $r \leq 1$ h. $g > 2$

Modelación

5. a. Respuesta abierta b. Respuesta abierta
c. Respuesta abierta d. $5 \times f = 70$
e. $1 = h - 12$

Comunicación

6. Respuestas abiertas

Razonamiento

7. a. F b. V
c. F d. F
e. V f. F
g. V h. F

Comunicación

8. a. $x - 8 = 10$ b. $2x > 18$
c. $x + 4 = 11$ d. $9x \geq 18$
e. $x - 12 < 10$ f. $\frac{x}{8} \geq 2$

Razonamiento

9. a. Adriana
b. 3
10. La segunda incluye a 7 en la solución y por lo tanto el círculo en 7 va relleno.

Resolución de problemas

11. Verificar validez de la respuesta
12. $s \leq 35$

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique que primero debe leerse e interpretarse el problema varias veces para determinar en presencia de qué tipo de problema nos encontramos y luego proceder de la forma correcta. Una vez analizado e interpretado el problema analice los datos, los que nos dice el problema y los que nos pide el problema; para determinar la incógnita.
- Demuestre a los estudiantes que mediante ejemplos sencillos y prácticos que el lenguaje algebraico se puede transformar al lenguaje común y viceversa, en la resolución de problemas que conducen a ecuaciones e inecuaciones se debe transformar del lenguaje común al algebraico para desarrollar el ejercicio.
- Ya seleccionada la incógnita, se procede a resolver el problema utilizando los conocimientos adquiridos en el tema anterior sobre la resolución, de forma que solo transformen del lenguaje común al lenguaje algebraico y apliquen los métodos y procedimientos estudiados.
- Proponga problemas sencillos que conduzcan a la resolución de ecuaciones e inecuaciones lineales, resuelva cada ejemplo de forma simple para demostrar a los estudiantes que el conjunto solución debe seleccionarse según la solución del problema, o sea, si satisface la ecuación, si no la satisface no pertenece a su solución.

Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar la siguiente página web:
<http://www.vitutor.com/ecuaciones/ine/ineActividades.html>

8

Problemas con ecuaciones e inecuaciones

Explora

El área de este rectángulo es máximo de 30 cm^2 .

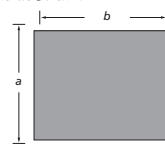


Figura 1

- ¿Cuál expresión permite interpretar dicho enunciado?

Ten en cuenta

Ya en el siglo XVI a. de C. los egipcios resolvían problemas cotidianos con la ayuda de ecuaciones que tenían que ver con la repartición de viveres, de cosechas y de materiales.



Como el área A de un rectángulo es el producto de su base por su altura, se tiene que: $A = a \times b$.

Por otra parte, que esta área sea máximo de 30 cm^2 indica que es 30 cm^2 o menos, así que la expresión buscada es la inecuación $a \times b \leq 30$.

El lenguaje matemático se utiliza para plantear y resolver problemas matemáticos a partir de expresiones cotidianas.

En la solución de cualquier problema que involucre el planteamiento de ecuaciones o inecuaciones se sugiere seguir estos pasos:

Paso 1. Leer y comprender el enunciado.

Paso 2. Designar la incógnita.

Paso 3. Plantear la ecuación o la inecuación.

Paso 4. Resolver la ecuación o la inecuación.

Paso 5. Verificar la solución.

Paso 6. Contestar.

Ejemplo 1

Marcos sacó del galpón entre el lunes y el jueves 78, 72, 87 y 90 huevos, respectivamente. ¿Cuántos huevos debe sacar el viernes para completar por lo menos 400?

Paso 1: ¿Qué debes encontrar?

Un número mínimo de huevos para completar como mínimo 400.

Paso 2: Asigna una variable a la cantidad de huevos buscada.

Llámalas p .

Paso 3: Plantea una inecuación.

De acuerdo con el enunciado,

$$78 + 72 + 87 + 90 + p \geq 400.$$

Paso 4: Resuelve la inecuación.

$$327 + p \geq 400 \text{ y obtienes } p \geq 73.$$

Paso 5: Comprueba la solución.

Se verifica que a partir de $p = 73$ se cumple que: $78 + 72 + 87 + 90 + p \geq 400$.

Paso 6: Contesta la pregunta.

Marcos debe sacar del galpón al menos 73 huevos el viernes.



Actividad resuelta

Resolución de problemas

- Julio y Manuel juegan en el mismo equipo de fútbol. El sábado pasado Julio marcó 3 goles más que Manuel, pero entre ambos marcaron menos de 9 goles. ¿Cuántos goles pudo haber marcado Manuel?

Solución:

Si j es el número de goles que marcó Julio y m es el número de goles que marcó Manuel, entonces $j + m < 9$.

Pero, además, $j = m + 3$; por tanto, $m + 3 + m < 9$, de donde: $2 \times m + 3 < 9$. Al resolver la inecuación se obtiene $m < 3$. Por consiguiente, Manuel pudo haber marcado 0, 1 o 2 goles.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Relaciona las expresiones de la columna de la izquierda con sus correspondientes interpretaciones en el lenguaje matemático de la columna de la derecha.

El doble de un número.	m^3
El triple de un número.	$\frac{1}{3} \times m$
El cuádruplo de un número.	$\frac{1}{2} \times m$
La mitad de un número.	$\frac{m}{4}$
Un tercio de un número.	$2 \times m$
Un cuarto de un número.	m^2
Un número al cuadrado.	$3 \times m$
Un número al cubo.	$4 \times m$

3. Determina si la ecuación dada interpreta cada enunciado. Si es así, resuélvela.
- Cuando dupliqué mi dinero d quedé con \$ 400.
Ecuación: $2 \times d = 400$
 - La tercera parte de la edad de Juan, que es t , es 57.
Ecuación: $t \times 3 = 57$
 - Si al número natural que le sigue a g se le suma 34 se obtiene 45.
Ecuación: $g + 1 + 34 = 45$
 - La diferencia de un número k y 45 es 78.
Ecuación: $k - 45 = 78$

Resolución de problemas

4. Viviana compró algunas cajas de donas. Hay 16 donas en cada caja, y ella compró 80 donas en total. Escribe una ecuación que le permita saber a Viviana cuántas cajas de donas compró.
5. En cierto tiempo, Jaime condujo el doble de distancia que Helena. Si entre los dos condujeron 90 kilómetros, encuentra la distancia que condujo cada uno.
6. El largo de un rectángulo es de 15 cm y su perímetro es 50 cm. Encuentra el ancho del rectángulo.
7. El perímetro de un lote triangular mide 72 metros. Un lado mide 16 metros y el otro mide el doble que el primero. Encuentra la longitud del tercer lado.

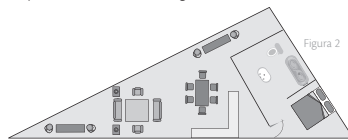
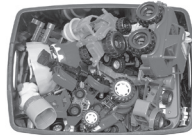


Figura 2

8. ¿Qué edad tiene Amanda si su hijo tiene 12 años y ella le lleva 24 años?

9. ¿Qué edad tiene Camilo si se sabe que dentro de 12 años tendrá 64 años?

10. Andrés tiene tres juguetes más que Santiago. Si Santiago tiene 16 juguetes, ¿cuántos juguetes tienen entre los dos?



11. ¿Qué número tiene que multiplicarse por 17, y al producto sumarle 34, para obtener 68?

12. Si un rollo de cinta cuesta \$ 11, ¿cuántos rollos puede comprar Sonia con al menos \$ 55?

13. ¿Cuántas camisas puede comprar Rolando con al menos \$ 125 si cada una cuesta \$ 25?

14. Jessica necesita un promedio de 85 puntos durante todo el bachillerato para optar por una beca. Durante los primeros cinco años de bachillerato sus promedios fueron 87, 81, 85, 90 y 78. ¿Cuál es la nota mínima que debe obtener Jessica para ganar la beca?



15. Si a cinco veces un número se le incrementa en cuatro, el resultado es al menos 19. Encuentra el menor valor que satisfice esas condiciones.

16. De ocho cachorritos de perros hay más hembras que machos. ¿Cuántas hembras puede haber?



17. Un camión pesa 875 kg. La diferencia entre el peso del camión vacío y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior a 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajas iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada una de ellas para poder llevarlas en el camión?

18. En una caja hay tornillos defectuosos y no defectuosos. Si se sabe que en total hay 200 tornillos y que el doble de defectuosos es menor que el número de no defectuosos, ¿cuántos tornillos defectuosos puede tener la caja?

Comunicación

2. Verificar validez de la respuesta

3. a. \$ 200

- b. No interpreta el enunciado

- c. $g = 10$

- d. $k = 123$

Resolución de problemas

4. $\frac{80}{16} = c$

5. Helena condujo 30 km y Jaime, 60 km.

6. 10 cm

7. 24 m

8. 36 años

9. 52 años

10. 35 juguetes

11. 2

12. Al menos 5 rollos de cinta

13. Al menos 5 camisas

14. Al menos 89

15. 3

16. 5, 6, 7, u 8

17. 115 kg

18. 66

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Una ecuación puede compararse con una balanza de platillos. Para mantener el perfecto equilibrio es necesario tener la misma masa en ambos lados. Si se aumenta la masa en el platillo de la izquierda, la balanza se inclinará hacia la izquierda, por lo tanto, para mantenerla equilibrada será necesario aumentar a la derecha la misma cantidad de masa.

Si, por el contrario, la masa disminuye, también habrá que disminuir la misma cantidad de masa en el otro platillo de la balanza.

Este ejemplo aplicado a una ecuación indica que si se agrega (suma) un número a la derecha, también es necesario sumar el mismo número a la izquierda para mantener la igualdad y si se resta, debe hacerse lo mismo a ambos lados.

Debemos saber que existen ecuaciones de dos tipos: ecuaciones aditivas y ecuaciones multiplicativas.

Las ecuaciones aditivas tienen la forma $a + - x = b$.

Ecuaciones multiplicativas tienen la forma $a \cdot x = b$

Recomendaciones para desarrollar la lección

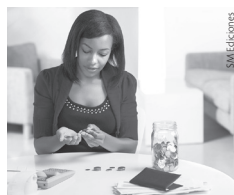
- Analice con los estudiantes que ya familiarizados con el tema en cuestión, pueden resolver las ecuaciones con estructura aditiva, solo se suma el opuesto del número que está en miembro izquierdo acompañando a la incógnita, con el objetivo de despejarla tanto como sea posible, solo que de esta forma solo se simplifica el término que la acompaña y queda completamente despejada.

9

Ecuaciones con estructura aditiva

Explora

Violeta tiene una deuda con el banco.



- Si hace un abono de \$ 750 y aún debe \$ 800, ¿cuál era su deuda inicial con el banco?

Ten en cuenta

La propiedad uniforme (de las igualdades) establece que si en ambos miembros de una igualdad se suma un mismo número, la igualdad se mantiene.

La situación se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Deuda inicial} & & \text{Abono} & & \text{Deuda actual} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & + & 750 & = & -800 \end{array}$$

Para resolver esta ecuación, se utilizan las propiedades de la adición y de las igualdades como se muestra a continuación.

Se suma el opuesto de 750 en ambos lados de la igualdad.

$$x + 750 + (-750) = -800 + (-750)$$

Se obtiene 0 como sumando en el lado izquierdo (Propiedad invertiva).

$$x + 0 = -1550$$

Se despeja x en el lado izquierdo de la igualdad (Propiedad modulativa).

$$x = -1550$$

Según lo anterior, la deuda inicial de Violeta era de \$ 1 550.

Una **ecuación de estructura aditiva** se caracteriza porque su operación principal es una adición o una sustracción. Estas ecuaciones son de la forma:

$$x + a = b \quad \text{o} \quad x - a = b$$

La letra x es la **incógnita** de la ecuación.

Ejemplo 1

Las siguientes ecuaciones tienen estructura aditiva. Observa cómo se resuelven.

$$3 + m = -12$$

$$3 + (-3) + m = -12 + (-3) \quad \leftarrow \text{Se suma el opuesto de 3 en ambos lados de la igualdad.}$$

$$0 + m = -15 \quad \leftarrow \text{Se aplica la propiedad invertiva de la adición.}$$

$$m = -15 \quad \leftarrow \text{Se aplica la propiedad modulativa de la adición y se obtiene el valor de la incógnita.}$$

$$n - 18 = -23$$

$$n + (-18) + 18 = -23 + 18 \quad \leftarrow \text{Se suma el opuesto de } -18 \text{ en ambos lados de la igualdad.}$$

$$n + 0 = -5 \quad \leftarrow \text{Se aplica la propiedad invertiva de la adición.}$$

$$n = -5 \quad \leftarrow \text{Se aplica la propiedad modulativa de la adición y se obtiene el valor de la incógnita.}$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- Al sustraer 14 de cierto número, se obtiene 9. ¿Cuál es ese número?

Solución:

Si se denomina a al número buscado, entonces la ecuación que modela la situación es $a - 14 = 9$. Así, al resolver la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} a + (-14) &= 9 \\ a + (-14) + 14 &= 9 + 14 \\ a + 0 &= 9 + 14 \\ a &= 23 \end{aligned}$$

El número es 23.

Bloque de Álgebra y Funciones.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2. Determina cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones y cuáles no. Justifica tu respuesta.

- $40 + x = -15$
- $27 + 40 + 16 = 83$
- $p - 89 = 46$
- $\{(3 + 2 - (9 - 7) + (3 + 4))\}$
- $m + 25 + 32 = -91$
- $32 - 51 - 36 = -55$
- $y - 3 = -7$

Comunicación

6. Escribe un problema que se pueda modelar con cada ecuación y resuélvelo.

- $x - 6 = -19$
- $7 = x + (-5)$
- $-8 + x = 32$
- $17 + x = 24$

7. Indica el error que se cometió al resolver la ecuación. Luego, corrígelo.

Resolución de problemas

8. Cierta número más 8 es igual a 24. ¿Cuál es el número?

9. La suma de las edades de dos hermanos es 32. Si el menor tiene 15 años, ¿cuántos años tiene el mayor?

10. Dos niños reúnen nueve libros. Si uno de ellos aporta cuatro libros, ¿cuántos libros aporta el otro?

11. La suma de dos números enteros es 340. Si uno de los sumandos es -130, ¿cuál es el otro sumando?

12. La suma de dos números es 85. Si el mayor es 49, ¿cuál es el menor?

13. ¿Qué número se le debe adicionar a -32 para obtener -8 en el resultado?

14. La edad de un padre sumada con la edad de su hijo es igual a 61 años. Si el hijo tiene 15 años, ¿cuál es la edad del padre?

15. Con el dinero que tengo y \$ 24 700 más, podría pagar una deuda de \$ 52 500 y me sobrarían \$ 3 700. ¿Cuánto dinero tengo?

16. Las edades de Javier y Juanita suman 37 años. Si Javier tiene 15 años, ¿cuántos años tiene Juanita?

17. ¿Cuántos pisos faltan para subir al piso 42, si te encuentras en el 17?

Modelación

5. Traduce cada enunciado en una ecuación y resuélvela.

- 17 menos un número es 79.
- Un número disminuido en 23 es igual a 40.
- Si a 21 se le suma cierto número, se obtiene 103.
- La edad de una persona dentro de 7 años será 45.
- La temperatura actual aumentada en 9 grados da una lectura de 38 grados.
- Si a un número se le suma -9, se obtiene 24.
- 32 disminuido en cierto número es igual a -89.

Razonamiento

- Sí, tiene incógnita
 - No, ya que no tiene incógnita.
 - Sí, tiene incógnita
 - No, ya que no tiene incógnita
 - Sí, tiene incógnita
 - No, ya que tiene incógnita
 - Sí, tiene incógnita

Comunicación

- $5 + x = 0$ (f) 25
 - $-17 + x = 0$ (d) 27
 - $30 + x = 0$ (a) -5
 - $x + (-27) = 0$ (g) 30
 - $x + 35 = 0$ (b) 17
 - $-25 + x = 0$ (e) -35
 - $x + (-30) = 0$ (c) -30
- $x = 28$
 - $x = -243$
 - $x = 21$
 - $x = 27$
 - $x = -55$
 - $x = -28$
 - $x = 25$
 - $x = -34$
 - $x = -4$
 - $x = -630$
 - $x = 721$
 - $x = 16$

Modelación

- $17 - x = 79; x = 262$
 - $x - 23 = 40; x = 63$
 - $21 + x = 103; x = 82$
 - $x + 7 = 45; x = 38$
 - $x + 9 = 38; x = 29$
 - $x + (-9) = 24; x = 33$
 - $32 - x = -89; x = 121$

Comunicación

- $x = -13$
 - $x = 12$
 - $x = 40$
 - $x = 7$

- $x = -61$

Resolución de problemas

- 16
- 17 años
- 5 libros
- 470
- El menor es 36
- 24
- 46 años
- \$ 31 500
- 22 años
- 25 pisos

Evaluación formativa

Nombre:

Grado: Fecha:

- Sofía y Gabriela son hermanas que viven a la misma distancia del panecillo; Gabriela vive 150 km al norte y Sofía vive 150 km al sur. Responde las siguientes interrogantes:
A. ¿Cuál de las dos hermanas vive más cerca del panecillo?

B. ¿Si el panecillo es un punto de referencia; a cuántos km vive Gabriela de Sofía?
- Mencione a qué dominio numérico de los que ha estudiado ($\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$)) pertenecen los siguientes números:
A. 43
B. 85
C. -76
D. 65
E. -32
F. 1000
G. -1000
H. 301
I. -301
- Dados los siguientes números, ordénelos de menor a mayor y represéntelos en una recta numérica.
A. 6; -1; 8; 2; -2; -10.
B. -8; 3; -3; -9; 4; 1

- Determina si es verdadera o falsa cada proposición.
A. $53 = |-53|$ ()
B. $-42 > 1$ ()
C. $0 < -4$ ()
D. $65 > -65$ ()
E. $1 = -1$ ()
F. $70 = 70$ ()
G. $2 < -10$ ()
H. $0 > 100$ ()
- Efectúa las siguientes adiciones.
A. $5 + 63 + (-43) + (-36) + 100 =$
B. $(-15) + (-42) + 315 + (-2) =$
C. $1000 + (-100) + (-200) + (-300) =$
D. $(-159) + 84 + (-361) + 560 =$
- Resuelve las adiciones y ten en cuenta el signo del resultado final.
A. $30 + (-2) =$
B. $67 + (-100) =$
C. $(-88) + (-12) =$
D. $99 + (-9) =$

1. Sofia y Gabriela son hermanas que viven a la misma distancia del panecillo; Gabriela vive 150 km al norte y Sofia vive 150 km al sur. Responde las siguientes interrogantes:
- A. ¿Cuál de las dos hermanas vive más cerca del panecillo? *Las dos hermanas viven a la misma distancia del panecillo. 150 km cada una.*
- B. ¿Si el panecillo es un punto de referencia; a cuántos km vive Gabriela de Sofia? *Gabriela vive a 300 km de su hermana Sofia y viceversa.*
2. Mencione a qué dominio numérico de los que ha estudiado ($\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$)) pertenecen los siguientes números:
- A. 43 *los naturales son enteros positivos por tanto pertenece a ambos. $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$*
- B. 85 *los naturales son enteros positivos por tanto pertenece a ambos. $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$*
- C. -76 *$\mathbb{Z}^-$*
- D. 65 *los naturales son enteros positivos por tanto pertenece a ambos. $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$*
- E. -32 *$\mathbb{Z}^-$*
- F. 1000 *los naturales son enteros positivos por tanto pertenece a ambos. $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$*
- G. -1000 *$\mathbb{Z}^-$*
- H. 301 *los naturales son enteros positivos por tanto pertenece a ambos. $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$*
- I. -301 *$\mathbb{Z}^-$*
3. Dados los siguientes números, ordénelos de menor a mayor y represéntelos en una recta numérica.
- A. 6; -1; 8; 2; -2; -10. *-10; -2; -1; 2; 6; 8*
- B. -8; 3; -3; -9; 4; 1 *-9; -8; -3; 1; 3; 4*
4. Determina si es verdadera o falsa cada proposición.
- A. $53 = |-53|$ (V)
- B. $-42 > 1$ (F)
- C. $0 < -4$ (F)
- D. $65 > -65$ (V)
- E. $1 = -1$ (F)
- F. $70 = 70$ (V)
- G. $2 < -10$ (F)
- H. $0 > 100$ (F)
5. Efectúa las siguientes adiciones.
- A. $5 + 63 + (-43) + (-36) + 100 = 89$
- B. $(-15) + (-42) + 315 + (-2) = 256$
- C. $1000 + (-100) + (-200) + (-300) = 400$
- D. $(-159) + 84 + (-361) + 560 = 124$
6. Resuelve las adiciones y ten en cuenta el signo del resultado final.
- A. $30 + (-2) = 28$
- B. $67 + (-100) = -33$
- C. $(-88) + (-12) = -100$
- D. $99 + (-9) = 90$

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Reconocer los elementos del conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.	1, 2 y 5			
Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$).	3 y 4			
Realizar operaciones combinadas en $\mathbb{Z}$ aplicando el orden de operación y verificar resultados utilizando la tecnología.	6			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique a los estudiantes la regla de los signos para realizar las operaciones de la multiplicación y división.
- Desarrolle ejemplos sencillos para mostrar en cada caso como trabajar con las operaciones y los signos.
- Analice para cada operación de cálculo ejemplos específicos con signos iguales y diferentes.
- Aplique las reglas de los signos en los siguientes ejemplos: $-5 \times (-10) = 50$; demuestre a los estudiantes que cuando se multiplican dos números enteros con signos iguales el resultado siempre será positivo; demuestre que para dividir dos números enteros con signos iguales también el resultado es positivo. Por ejemplo: $-50 : (-5) = 10$. Concluya que para cualquiera de las operaciones de cálculo que se está estudiando, la multiplicación o división, cuando los números enteros que se efectúan tienen el mismo signo, cualquiera sea la operación, el resultado siempre es positivo; si tiene un número positivo y un número negativo, o sea signos diferentes, para cualquiera sea la operación el resultado siempre será negativo.
- Realice ejemplos sencillos en el pizarrón para que los estudiantes se familiaricen con el tema y adquieran las habilidades necesarias para el cálculo con números enteros y apliquen las reglas de los signos teniendo en cuenta la operación que realicen obteniendo como resultado el esperado por el docente.

10

Multiplicación de números enteros

Explora

Desde las 8:00 a. m., a un tanque vacío se le vierten 28 L de agua cada hora y se le extraen simultáneamente 5 L.



• ¿Cuántos litros de agua habrá en el tanque a las 11:00 a. m.?

Ten en cuenta

El signo de la multiplicación ($\times$) se puede reemplazar por el punto ($\cdot$) para evitar confusiones con otros signos matemáticos. Por ejemplo,

$$7 \times 8$$

es equivalente a

$$7 \cdot 8$$

Una manera de averiguar cuántos litros de agua habrá en el tanque a las 11:00 a. m., consiste en hacer el cálculo de los litros que se vertieron durante las tres horas y, a esta cantidad, restarle la cantidad de litros que se extrajeron en ese mismo tiempo.

- Al representar en la recta numérica la cantidad de litros de agua que se vierten en el tanque, se obtiene la Figura 1.

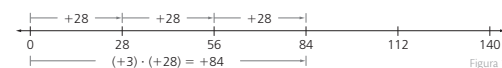


Figura 1

Según lo anterior, después de 3 horas se habrán depositado 84 L de agua en el tanque.

- Por otra parte, el número de litros que se extraen del tanque puede representarse como en la Figura 2.

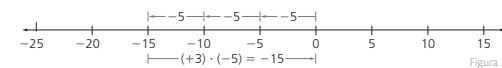


Figura 2

Entonces, al cabo de tres horas habrán salido del tanque 15 L de agua.

- Finalmente, para calcular la cantidad de litros que habrá en el tanque a las 11:00 a. m. se realiza la resta.

$$84 \text{ L} - 15 \text{ L} = 69 \text{ L}$$

Para calcular el **producto de dos números enteros**, se multiplican los valores absolutos de los factores. El producto es **positivo** si los factores tienen el mismo signo, o es **negativo** si los factores tienen diferente signo.

10.1 Regla de los signos

Se puede determinar el signo del producto de dos números enteros si se aplica la regla de los signos, que se resume como sigue.

- El producto de dos números enteros de igual signo es positivo.
 - El producto de dos números enteros de diferente signo es negativo.
- $$\begin{array}{l} (+) \cdot (+) = + \\ (-) \cdot (-) = + \end{array} \quad \begin{array}{l} (+) \cdot (-) = - \\ (-) \cdot (+) = - \end{array}$$

Ejemplo 1

Multiplicar $3 \cdot (-4)$ significa moverse hacia la izquierda en la recta numérica y hacer tres saltos, avanzando 4 unidades en cada uno (Figura 3).

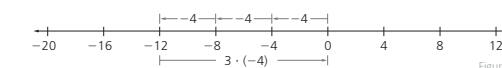


Figura 3

Así, $3 \cdot (-4) = -12$. Se verifica que, como los factores son de diferente signo, el resultado sea negativo.

Destreza con criterios de desempeño: Operar en $\mathbb{Z}$ (multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Ejemplo 2

Observa el resultado de estas multiplicaciones.

- $7 \cdot (-8) = -56$
- $(-6) \cdot 9 = -54$
- $(-12) \cdot (-3) = +36$
- $11 \cdot 4 = 44$

10.2 Propiedades de la multiplicación de números enteros

En el conjunto de los números enteros, la multiplicación cumple ciertas propiedades. En la Tabla 1 se describe cada una de ellas.

Propiedad	Definición	Ejemplo
Clausurativa	La multiplicación de dos o más números enteros es otro número entero. En general: $a \cdot b = c, c \in \mathbb{Z}$	$(-2) \cdot (-9) = 18$
Conmutativa	En toda multiplicación de números enteros, el orden de los factores no altera el producto. En general: $a \cdot b = b \cdot a$	$(-5) \cdot 4 = 4 \cdot (-5)$ $-20 = -20$
Asociativa	Se pueden asociar los factores de distintas formas y el producto no se altera. En general: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$[(-3) \cdot 4] \cdot (-7)$ $= (-12) \cdot (-7)$ $= 84$ $(-3) \cdot [4 \cdot (-7)]$ $= (-3) \cdot (-28)$ $= 84$
Elemento neutro	El elemento neutro de la multiplicación es 1, pues el producto de un número entero por 1 es el mismo número. En general: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$1 \cdot (-15) = (-15) \cdot 1$ $= -15$
Elemento nulo	El producto de un número entero con 0 es 0. En general: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	$(-5) \cdot 0 = 0$
Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos. En general: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$2 \cdot (-15 + 3)$ $= 2 \cdot (-12) = -24$ $2 \cdot (-15) + 2 \cdot 3$ $= (-30) + 6$ $= -24$

Tabla 1

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Karina tiene ahorrados \$ 2 752, pero debe \$ 345 a cada uno de sus cinco amigos. Indica, con un número entero, el saldo del que dispone Karina.

Solución:

- Primero se toma la cantidad de dinero que debe Karina y se multiplica por 5, que son los amigos a los que les adeuda.
 $(-345) \cdot 5 = -1 725$
- Luego, de los ahorros se resta la deuda.

$$2 752 - 1 725 = 1 027$$

Por lo tanto, Karina dispone de un saldo de +\$ 1 027.

Cálculo mental

Multiplicar por números cercanos a las potencias de 10

Para multiplicar por 9, 11, 99, 101, es decir, por una potencia de 10 menos 1 (o más 1), se descompone en sumas o restas de manera conveniente.

Por ejemplo:

$$28 \cdot 99 = 28 \cdot (100 - 1)$$

$$= 2 800 - 28 = 2 772$$

- Realiza las multiplicaciones.

- a. $37 \cdot 9$
- b. $-23 \cdot 101$
- c. $57 \cdot 11$

CULTURA del Buen Vivir

El servicio

Servir y mostrar solidaridad a los compañeros y compañeras es fundamental para trabajar en equipo.

- ¿Por qué consideras necesario tener una actitud servicial al trabajar en equipo?

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes que resuelvan los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de la multiplicación con números entero:

- Mencione con qué propiedades se relacionan los siguientes ejemplos. Justifica y resuelve:

$-101 \times 1 = -101$ Existencia del elemento neutro. (Todo número multiplicado por 1 es igual al mismo número.

$$32 \times (-5 + 7) = 32 \times (-5) + 32 \times 7$$

$$32 \times 2 \qquad -160 + 224$$

$$64 \qquad 64$$

Distributiva de la multiplicación respecto a la adición

$-43 \times (-8) = 344$ Clausurativa. La multiplicación de dos números enteros da como resultado otro número entero.

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar las siguientes páginas web:

- http://www.vitutor.com/di/e/a_5.html
- http://www.ditutor.com/numeros_enteros/multiplicacion_enteros.html

■ Actividades colaborativas

Forme dos equipos en el aula, escriba en el pizarrón las propiedades a la derecha y enumere ejercicio a la izquierda para que participen ambos equipos en la solución y reconocimiento de las propiedades, aplicando además las reglas de los signos estudiadas en clases anteriores. El docente evaluará de forma grupal e individual. El equipo que realice la mayor cantidad de ejercicios en menor tiempo será el ganador.

Ejercitación

2. a. 32 b. 124
c. 546 d. 138
e. -294 f. 630
g. -68 h. 2016
i. -95 j. -36
k. -72 l. -42
3. a. 5 b. 8
c. -60 d. 0
e. -4 f. -2
g. 1 h. 3
i. -8 j. -4

Comunicación

4.

Número	-12	-6	-13	21	-32	4
Doble	-24	-12	-26	42	-64	8
Triple	-36	-18	-39	-63	-96	12
Cuádruple	-48	-24	-52	84	-128	16

5. a. V b. F
c. F d. F

Razonamiento

6. a. $2 \cdot (-7)$ y $(-14) \cdot 1$
b. $15 \cdot 20$ y $(-3) \cdot (-100)$
c. $6 \cdot 1$ y $(-2) \cdot (-3)$
d. $21 \cdot (4)$ y $(-7) \cdot (-12)$
e. $5 \cdot (-5)$ y $(-1) \cdot -5$
f. $(-15) \cdot 6$ y $30 \cdot (-3)$

- g. $(-5) \cdot 15$ y $25 \cdot (-3)$
h. $35 \cdot 3$ y $(-7) \cdot (-15)$
i. $88 \cdot 1$ y $(-44) \cdot (-2)$
j. $(-7) \cdot 7$ y $49 \cdot (-1)$

7.

a	b	c	$a \cdot b \cdot c$	$a \cdot c \cdot (-1)$
-7	-31	9	1953	63
-9	20	-2	360	-16
5	-13	0	0	0
-12	8	-8	768	-96
16	14	-11	-2 464	176

Comunicación

8. a. $6 \cdot 4$
b. $6 \cdot (-3)$

Razonamiento

9. a. -8 b. -16
c. -32 d. Negativo
10. a. 2 700 b. 4
c. 2 135 d. -2 800
e. 238 f. -56
11. a. Otro número negativo: $(-7) \cdot 10 = 270$
b. Otro número entero positivo:
 $(-9) \cdot (-10) = 90$
c. Un número entero positivo: $9 \cdot 3 = 27$

10 Multiplicación de números enteros

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Calcula estos productos.

- a. $(-8) \cdot (-4)$ b. $(-31) \cdot (-4)$
c. $(-13) \cdot (-42)$ d. $(-23) \cdot (-6)$
e. $42 \cdot (-7)$ f. $(-18) \cdot (-35)$
g. $34 \cdot (-2)$ h. $(-56) \cdot (-36)$
i. $(-5) \cdot 19$ j. $(-4) \cdot 9$
k. $(-3) \cdot 24$ l. $(-7) \cdot 6$

3. Halla el número que falta para obtener el resultado que se muestra en cada caso.

- a. $7 \cdot \square = 35$ b. $(-3) \cdot \square = -24$
c. $9 \cdot \square = -540$ d. $\square \cdot (-15) = 0$
e. $\square \cdot 25 = -100$ f. $\square \cdot 200 = -400$
g. $12 \cdot \square = 12$ h. $(-17) \cdot \square = -51$
i. $9 \cdot \square = -72$ j. $\square \cdot (-35) = 140$

Comunicación

4. Completa la Tabla 2.

Número	-12	-6	-13	21	-32	4
Doble						
Triple						
Cuádruple						

5. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

- a. El producto de dos números enteros es otro número entero. ()
b. El producto de dos números enteros negativos es un número entero negativo. ()
c. El número 0 es el elemento neutro de la multiplicación de los números enteros. ()
d. La multiplicación de números enteros no cumple la propiedad conmutativa. ()

Razonamiento

6. Escribe como producto de dos factores los siguientes resultados (puede haber más de una solución).

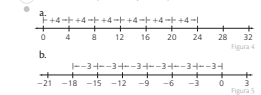
- a. -14 b. 300
c. 6 d. 84
e. -25 f. -90
g. -75 h. 105
i. 88 j. -49

7. Resuelve y completa la Tabla 3.

a	b	c	$a \cdot b \cdot c$	$a \cdot c \cdot (-1)$
-7	-31	9		
-9	20	-2		
5	-13	0		
-12	8	-8		
16	14	-11		

Comunicación

8. Escribe la multiplicación que se representó en cada caso.



Razonamiento

9. Resuelve.

- a. $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
b. $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
c. $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
d. ¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar (-2) por sí mismo 981 veces?
e. ¿Cuál es el signo del siguiente producto?
 $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot \dots \cdot (-1056)$

10. Reemplaza en las operaciones las letras por sus valores correspondientes. Luego, calcula los resultados.

- $m = -2$ $n = 5$ $p = -7$ $q = -10$
a. $(m \cdot q) \cdot (n \cdot p)$ b. $m \cdot (n + p)$
c. $(m + p) \cdot (n - q)$ d. $(2m) \cdot p \cdot (2n) \cdot q$
e. $2p \cdot (q + p)$ f. $(m - q) \cdot p$

11. Lee cada situación y justifícala dando un ejemplo.

- a. Si multiplicas dos números enteros que no tienen el mismo signo, ¿qué resultado obtendrás?
b. Si multiplicas dos números enteros negativos, ¿qué resultado obtendrás?
c. Si multiplicas dos números enteros, ambos positivos, ¿el resultado será un número entero positivo o un número entero negativo?

Bloque de Álgebra y Funciones

Destaca con criterios de desarrollo: Operas en 2 (multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

12. Completa las casillas de cada cuadrado con números enteros, de forma que el producto por filas y columnas sea el mismo.

a.

10	25	
		-20

b.

-5		3
	-3	
		2

13. Busca el camino más corto desde el punto A hasta el punto B, de tal manera que cada número sea el doble del anterior. El camino puede ser de manera vertical, horizontal o diagonal.

A	-12	16	35	77	21
-7	24	46	24	12	25
-14	-28	43	56	112	45
28	-56	-112	12	-89	90
56	-21	-224	-448	-1216	457
30	-64	448	-896	-1792	2516
60	128	-235	-1624	-3584	B

Resolución de problemas

14. Resuelve. Si p y q son números enteros, encuentra las posibles soluciones para cada ecuación.

a. $p \cdot q = -45$ b. $p \cdot q = -448$
 c. $p \cdot q = -32$ d. $p \cdot q = 54$
 e. $p \cdot q = 86$ f. $p \cdot q = -96$

15. Encuentra y corrige el error en las siguientes multiplicaciones de enteros.

a. $[(-1) \cdot 4 \cdot (-17)] \cdot (8 \cdot 5)$
 $= (-68) \cdot 40$
 $= -2720$

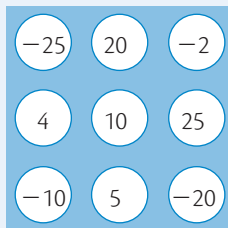
b. $[(-5) \cdot 4 \cdot (-7) \cdot (-8)] \cdot (-3)$
 $= 1120 \cdot (-3)$
 $= 3360$

16. Completa las pirámides de las figuras 6 y 7, teniendo en cuenta que la casilla superior es el resultado de la multiplicación de las dos casillas inferiores.

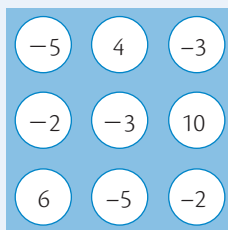
a.

b.

12. a.



b.



13.

A	-12	16	35	77	21
-7	24	46	24	12	25
-14	-28	43	56	112	45
28	-56	-112	12	-89	90
56	-21	-224	-448	-1216	457
30	-64	448	-896	-1792	2516
60	128	-235	-1624	-3584	B

14. a. $p = 5$ y $q = -9$

b. $p = -112$ y $q = 4$

c. $p = 32$ y $q = -1$

d. $p = 6$ y $q = 9$

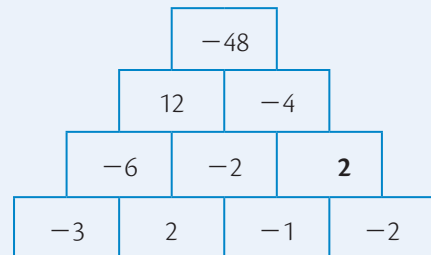
e. $p = -2$ y $q = -43$

f. $p = 8$ y $q = -12$

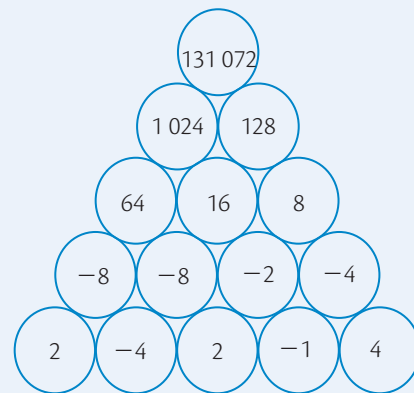
15. a. 2 720

b. 3 360

16. a.



b.



Resolución de problemas

17. 0

18. 12 y -4 o 4 y -12

19. -16°C

20. 23°C

21. 1750 L

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- a. Analice con los estudiantes el concepto de división exacta, para algunos estudiantes no es más que dividir un número entre otro, sin embargo en matemática la división exacta es el resultados de la división, en este caso, de dos números enteros donde se obtiene como resto cero, y el cociente es nuevamente un número entero y teniendo en cuenta los signos de los números que se dividen, será entonces el resultado de la división.
- b. Muestre a los estudiantes ejemplos donde se aplique el contenido estudiado en función del nuevo contenido, por ejemplo: los estudiantes conocen las reglas de los signos y conocen la propiedad que la multiplicación y división de dos números enteros da como resultado un tercer número entero, por lo tanto para realizar la división exacta de dos números enteros con diferentes signos hay que seguir algunos pasos, por ejemplo:

$$-64 : 8 = -8.$$

Recuerde a los estudiantes que tanto en la división como en la multiplicación si los números tienen el mismo signo el resultado es positivo si tienen diferentes signos el resultado es negativo.

- c. Realice un ejercicio en el aula donde los estudiantes observen todos y cada uno de los pasos para la solución utilice varios ejemplos donde deba aplicar la regla de los signos para afianzar el contenido. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} -225 : 25 &= 9 \text{ explique que} \\ 9 \times -25 &= 225. \end{aligned}$$

11

División exacta de números enteros

Explora

En cierto experimento científico se debe disminuir la temperatura de una sustancia a razón de 13°C cada hora.



- Si el experimento da inicio con una temperatura de 0°C , ¿cuántas horas habrán transcurrido cuando la temperatura alcanza los 78°C bajo cero?

En la calculadora

Dividir números enteros

Para dividir dos números en la calculadora sin emplear paréntesis, se utiliza la tecla $(-)$. Por ejemplo, para realizar la división $(-28) \div (-4)$, digita:

$(-)$ 2 8 $\div$ $(-)$ 4 =

- Verifica en tu calculadora los cocientes obtenidos en los ejemplos 1 y 2.

Para resolver la situación, se puede dividir la temperatura final entre la cantidad de grados Celsius en los que disminuye la temperatura cada hora.

$$(-78) \div (-13)$$

En este caso, se debe dividir una cantidad negativa entre otra cantidad negativa. Para ello, se efectúa la división del valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor, y al cociente se le pone signo positivo.

$$(-78) \div (-13) = +6$$

Este resultado significa que habrán transcurrido 6 horas desde el inicio del experimento hasta alcanzar la temperatura final.

Para calcular el **cociente de dos números enteros**, se divide el valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor. El cociente es **positivo** si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, y es **negativo** si dichos términos tienen diferente signo.

La regla de los signos tiene una versión correspondiente en la división exacta de números enteros:

- | | |
|--|--|
| • El cociente de dos números enteros de igual signo es positivo. | • El cociente de dos números enteros de diferente signo es negativo. |
| $(+) \div (+) = +$ | $(+) \div (-) = -$ |
| $(-) \div (-) = +$ | $(-) \div (+) = -$ |

Ejemplo 1

La definición de división exacta permite calcular cocientes como los siguientes.

- $18 \div (-6) = -3$, ya que $(-6) \cdot (-3) = +18$.
- $(-45) \div (-9) = +5$, porque $(-9) \cdot (+5) = -45$.
- $(-96) \div 8 = -12$, pues $+8 \cdot (-12) = -96$.
- $108 \div 12 = 9$, porque $+12 \cdot (+9) = +108$.

Ejemplo 2

Si se sabe que el producto de dos números enteros es 156 y uno de los factores es -12 , para averiguar cuál es el otro factor se efectúa la división:

$$156 \div (-12) = -13$$

Ejemplo 3

Si un buzo se sumerge en el mar 15 m cada hora, se puede averiguar cuánto tiempo ha transcurrido si el buzo se encuentra a -75 m efectuando la siguiente división.

$$-75 \div (-15) = +5$$

Según lo anterior, han transcurrido 5 horas.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (división) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 En cierta ciudad se registró una temperatura de 24 °C bajo cero a las 3:00 p. m.
 Si a las 7:00 a. m. del mismo día la temperatura era tres veces mayor, ¿cuál sería la temperatura a esa hora?

Solución:

Para responder la pregunta, se puede dividir la temperatura presentada a las 3:00 p. m. entre 3, así:

$$(-24) \div 3 = -8$$

Lo anterior permite concluir que la temperatura presentada en la ciudad a las 7:00 a. m. fue de 8 °C bajo cero.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Calcula los cocientes.

- a. $144 \div (-12)$ b. $(-82) \div 2$
 c. $(-26) \div (-2)$ d. $18 \div (-6)$
 e. $(-20) \div 4$ f. $(-12) \div (-12)$
 g. $35 \div (-7)$ h. $(-190) \div (-10)$
 i. $25 \div (-5)$ j. $(-85) \div (-5)$
 k. $98 \div (-2)$ l. $(-12) \div 6$

- 3 Completa la Tabla 1 según las operaciones indicadas.
 Escribe una X cuando no se trate de una división exacta.

a	b	$a \div b$	$-2b$	$a \div (-b)$
-24	-3			
16	-4			
-25	2			
-6	66			
32	8			
6	-18			

Tabla 1

Comunicación

- 4 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
 a. Todo número entero dividido por otro entero, siempre da un número entero. ()
 b. Si el dividendo es múltiplo del divisor, el resultado siempre es un número entero. ()
 c. La división de números enteros es conmutativa. ()
 d. La división de números enteros no es asociativa. ()
 e. Para que el cociente sea entero, basta que el dividendo sea mayor que el divisor. ()

Razonamiento

- 5 Halla el valor de x para que cada expresión sea verdadera.

- a. $156 \div x = 13$ b. $x \div (-15) = 11$
 c. $714 \div (-21) = x$ d. $(-21 \div 7) = x$

Resolución de problemas

- 6 ¿Qué cociente se obtiene al dividir el cuádruplo de (-12) entre (-6)?
 7 ¿Cuál es el número entero x que dividido entre 4 da como resultado -15?
 8 Un buzo se sumerge a una velocidad de 20 m por minuto. ¿Cuántos minutos tarda en alcanzar 900 m de profundidad?
 9 Thomas tiene una deuda de \$ 1 200 que debe pagar en 24 cuotas mensuales iguales. ¿Cuánto debe pagar Thomas mensualmente?
 10 Un avión se aproxima a tierra perdiendo 12 000 pies de altura en 15 minutos. ¿Qué altura pierde el avión por cada minuto?
 11 Una piscina tiene 2 056 L de agua. Si se vacía a razón de 257 L por hora, ¿cuántas horas demorará en vaciarse completamente?
 12 La familia Martínez está integrada por cuatro personas. Entre todos compraron un automóvil por un costo de \$ 38 000, que pagarán en cuotas iguales durante dos meses. ¿Cuánto dinero deberá pagar cada integrante de la familia el primer mes?
 13 Susana compró tres artículos: A, B y C. El artículo C le costó \$ 540; el artículo A le costó el doble del artículo C dividido en 3, y el artículo B le costó 5 veces el precio de C dividido en 10. ¿Cuánto pagó por cada artículo?

Ejercitación

2. a. -12 b. -41
 c. 13 d. -3
 e. -5 f. 1
 g. -5 h. 19
 i. -5 j. 17
 k. -49 l. -2

3.

a	b	$a \div b$	$-2b$	$a \div (-b)$
-24	-3	8	6	-8
16	-4	-4	8	4
-25	2	X	-4	X
-6	66	X	-132	X
32	8	4	-16	-4
6	-18	X	36	X

Comunicación

4. a. F b. V c. F d. V e. F

Razonamiento

5. a. 12 b. -165 c. -34 d. -3

Resolución de problemas

6. 8
 7. -60
 8. 45 min
 9. \$ 50
 10. 800 pies
 11. 8 horas
 12. \$ 4 750
 13. Costo de los artículos es:
 A: \$ 360 B: \$ 270 C: \$ 540

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes el concepto de ecuación. Recuérdeles que es una igualdad donde aparece al menos una variable y que necesariamente debe aparecer el signo de (=) y la variable. Hasta el momento el mayor exponente de la variable es de 1 porque estamos en presencia de ecuaciones lineales.
- Desarrolle varios ejercicios donde se apliquen todos los contenidos estudiados hasta el momento.
- Proponga un ejercicio integrador de forma evaluativa para que los estudiantes interpreten e interioricen el trabajo con las ecuaciones y las propiedades de la multiplicación. Analice las posibles formas de resolución para una mayor seguridad de los estudiantes.
- Resuelva ejercicios en el pizarrón con la ayuda de los estudiantes, para que los estudiantes bajo nivel de asimilación, observen el procedimiento y lo interioricen, con la ayuda de todos y sean capaces de reproducir individualmente y aplicar las reglas de los signos además de resolver ecuaciones lineales a u nivel reproductivo aplicativo.

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar la siguiente página web para una mayor información sobre el trabajo con los signos y la resolución de ecuaciones lineales:

- <http://www.profesorenlinea.cl/matematica/EcuacioResolucionde.htm>

12

Ecuaciones con estructura multiplicativa

Explora

El producto de dos números es 300.
• Si uno de los factores es -15 , ¿cuál es el otro?

Ten en cuenta

En general, $a \cdot b$ se puede escribir como ab o ba .

Una manera de encontrar solución al problema consiste en plantear una ecuación como la que se muestra a continuación.

$$(-15) \cdot x = 300$$

En esta ecuación, la incógnita x representa el número que se debe hallar. Para resolverla, se aplican tanto las propiedades de las igualdades como las de la multiplicación de números enteros.

$$(-15) \cdot x = 300 \quad \leftarrow \text{Ecuación}$$

$$x \cdot (-15) = 300 \quad \leftarrow \text{Se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación.}$$

$$x \cdot (-15) \div (-15) = 300 \div (-15) \quad \leftarrow \text{Se divide en ambos lados de la igualdad entre } (-15).$$

$$x \cdot 1 = -20 \quad \leftarrow \text{Se realizan las divisiones indicadas en ambos lados de la igualdad.}$$

$$x = -20 \quad \leftarrow \text{Se aplica la propiedad modulativa de la multiplicación y se obtiene la solución.}$$

Por lo tanto, el número buscado es -20 .

Las **ecuaciones de estructura multiplicativa** se caracterizan porque su operación principal es una multiplicación o una división.

Son de la forma: $a \cdot x = b$; $x \div a = b$, donde x es la incógnita de la ecuación.

Ejemplo 1

Al resolver ecuaciones de estructura multiplicativa, conviene tener en cuenta la siguiente equivalencia.

Si:	Dividendo	Divisor
	Residuo	Cociente

se prueba que:

$$\text{Dividendo} = \text{Cociente} \cdot \text{Divisor} + \text{Residuo}$$

De acuerdo con lo anterior, para resolver una ecuación como $x \div (-9) = 12$, se puede encontrar la multiplicación equivalente.

$$x \div (-9) = 12 \text{ es equivalente a } x = (-9) \cdot 12$$

Por lo tanto, al resolver la última ecuación se obtiene que:

$$x = (-9) \cdot 12 = -108; \text{ es decir, } x = -108.$$

Actividades resueltas

Ejercitación

- Resuelve la ecuación $-13x + 65 = 39$.

● Solución:

Se observa que la ecuación propuesta tiene una estructura a la vez aditiva y multiplicativa. Entonces:

$$-13x + 65 = 39 \quad \leftarrow \text{Ecuación dada.}$$

$$\Leftrightarrow -13x + 65 - 65 = 39 - 65 \quad \leftarrow \text{Se adiciona el opuesto de 65 en ambos lados de la ecuación.}$$

$$\Leftrightarrow -13x + 0 = -26 \quad \leftarrow \text{Propiedad invertiva de la adición.}$$

$$\Leftrightarrow -13x = -26 \quad \leftarrow \text{Propiedad modulativa de la adición.}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (-13) \div (-13) = -26 \div (-13) \quad \leftarrow \text{Se divide por } -13 \text{ en ambos lados de la igualdad.}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow x = 2 \quad \leftarrow \text{Propiedad modulativa de la multiplicación.}$$

App

Operaciones con números enteros

Abre la aplicación *Orco* y practica las operaciones con números enteros.



Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.

Resolución de problemas

- 2 El cociente exacto entre dos números enteros es 134. Si el divisor es -28 , ¿cuál es el dividendo?

Solución:

Si se designa con x al dividendo, entonces se puede plantear la siguiente ecuación:

$$x \div (-28) = 134$$

A su vez, esta ecuación es equivalente a:

$$x = 134 \cdot (-28)$$

Por lo cual,

$$x = -3752$$

Ten en cuenta

Dos ecuaciones se denominan equivalentes si tienen la misma solución.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 3 Determina cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones multiplicativas y cuáles no. Justifica tu respuesta.

a. $40x = -120$

b. $2 + 60 + x = 83$

c. $x - 89 = 46$

d. $100x = 100\,000$

e. $x + 25 = -45$

f. $-14x = 112$

- 4 Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.

a. $24x = -48$ () -48

b. $-2x = 96$ () 4

c. $24 = x \cdot 6$ () 8

d. $58x = 464$ () 5

e. $12x = 60$ () -2

f. $5x = -120$ () -24

g. $36x = -180$ () -5

- 5 Resuelve cada ecuación. Luego, verifica la solución hallada.

a. $5x = 25$

b. $2x = -234$

c. $-120 = x \cdot 8$

d. $-24x = -96$

e. $68x = -204$

f. $-5x = -9x - 24$

g. $5 + 2x = 5x - 7$

h. $1 + 4x - 3 = 6x + 8$

i. $25x = 120 - 5x + 10x$

j. $8 \cdot (x - 2) = 4 \cdot (x + 3)$

Modelación

- 6 Traduce los siguientes enunciados en ecuaciones y resuélvelas.

a. El doble de un número es 48.

b. Si a 800 se le resta el doble de cierto número, se obtiene 670.

c. El triple de un número adicionado con -7 equivale a -19 .

d. El triple de un número disminuido en 12 es igual al número menos 4.

e. Dos veces un número disminuido en 8 equivale a 12.

f. El duplo de un número equivale al mismo número disminuido en 8.

Resolución de problemas

- 7 Si al dinero que tengo le sumo su doble y le resto \$ 3 500, me quedan \$ 19 000. ¿Cuánto dinero tenía?

- 8 En una finca se va a construir una piscina de dos metros de profundidad, doce metros de largo y x metros de ancho. Si el volumen de la piscina será de 192 m^3 . ¿Cuál será la medida del ancho de la piscina?

- 9 ¿Cuál es el área de un triángulo que tiene 9 cm de base y 18 cm de altura?

- 10 Un padre tiene 38 años y su hijo 10. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

- 11 Dos ciudades A y B distan 300 km entre sí. A las 9 de la mañana parte de la ciudad A un automóvil hacia la ciudad B con una velocidad de 80 km/h, y de la ciudad B parte otro hacia la ciudad A con una velocidad de 70 km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán los automóviles y qué hora será en ese momento?

Ejercitación

3. a. Sí b. No c. No
d. Sí e. No f. Sí
4. a. -2 b. -48
c. 4 d. 8
e. 5 f. -24
g. -5
5. a. $x = 5$ b. $x = -117$
c. $x = -15$ d. $x = 4$
e. $x = -3$ f. $x = -6$
g. $x = 4$ h. $x = -5$
i. $x = 6$ j. $x = 7$

Modelación

6. a. $2x = 48$, sol: $x = 24$
b. $800 - 2x = 670$, sol: $x = 65$
c. $3x - 7 = -19$, sol: $x = -4$
d. $3x - 12 = x - 4$, sol: $x = 4$
e. $2x - 8 = 12$, sol: $x = 10$
f. $2x = x - 8$, sol: $x = -8$

Resolución de problemas

7. Tenía \$ 7 500
8. 8 m
9. $A = 81 \text{ cm}^2$
10. En 4 años
11. Los automóviles se encontrarán al cabo de 2 y serán las 11:00 a.m

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Las operaciones combinadas son actividades matemáticas donde se procede a efectuar más de una operación de cálculo, tres operaciones de cálculo y hasta 6 operaciones de cálculo. Los cálculos se desarrollan por orden según las operaciones que aparezcan en la operación.

Existen diferentes formas de resolver las operaciones combinadas puesto que en algunas aparecen los signos de agrupación con el objetivo de agrupar varias operaciones y de esta forma te indica el orden para calcular; y las operaciones combinadas donde solo aparecen las operaciones de cálculo para proceder.

Las operaciones combinadas sin signos de agrupación se resuelven respetando el orden operacional, primero, la potenciación y radicación en el orden en que aparezcan, luego la multiplicación y división en el orden en que aparezcan y por último la adición y sustracción en el orden en que aparezcan.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analiza varias operaciones combinadas en el pizarrón, proponga a los estudiantes resolver la primera en forma grupal, teniendo en cuenta que ya los estudiantes conocen la regla de los signos y conocen el orden operacional, luego compruebe la solución repitiendo en voz alta el ejercicio para que los estudiantes interpreten el procedimiento.
- Proponga que los propios estudiantes en grupos resuelvan el próximo ejercicio en el pizarrón con la ayuda del docente.

13

Operaciones combinadas con números enteros

13.1 Operaciones sin paréntesis

Para resolver operaciones combinadas con números enteros, se les da prioridad a algunas operaciones con respecto a otras; es decir, existe una jerarquía de las operaciones que indica el orden en que estas deben ser efectuadas.

En este caso, el orden correcto en el que se debe resolver la operación presentada es: primero se realiza la división y luego la adición.

$$15 + 18 \div (-3) \\ = 15 + (-6) = 9$$

Para efectuar **operaciones combinadas con números enteros**, se sigue este orden:

- Se resuelven las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Se resuelven las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Observa el orden en el que se realizan las operaciones en cada caso.

$$\begin{aligned} & 12 + 3 \cdot 18 - 29 \\ & = 12 + 54 - 29 \quad \leftarrow \text{Se resuelve primero la multiplicación.} \\ & = 37 \quad \leftarrow \text{Se efectúan la adición y la sustracción.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 96 \div 4 - 2 \cdot (-9) \\ & = 24 + 18 \quad \leftarrow \text{Se resuelven primero la división y la} \\ & = 42 \quad \leftarrow \text{multiplicación de izquierda a derecha.} \\ & \quad \leftarrow \text{Se efectúa la adición.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-7) \cdot (-4) + 9 \cdot (-3) \\ & = 28 - 27 \quad \leftarrow \text{Se resuelven las multiplicaciones.} \\ & = 1 \quad \leftarrow \text{Se efectúa la adición.} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Cuando en un polinomio aritmético hay dos o más operaciones del mismo orden, estas se efectúan según aparezcan de izquierda a derecha, como en el siguiente caso.

$$\begin{aligned} & (-30) \div 5 \cdot 3 \\ & = (-6) \cdot 3 \quad \leftarrow \text{Se realiza primero la división.} \\ & = -18 \quad \leftarrow \text{Se resuelve la multiplicación.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Ten en cuenta el proceso para resolver la siguiente operación.

$$\begin{aligned} & 2 + 20 \div 5 + 5 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 4 - 8 + 4 \cdot 2 - 16 \div 4 \\ & = 2 + 4 + 15 + 4 - 20 - 8 + 8 - 4 \\ & = 2 + 4 + 15 + 4 + 8 - 20 - 8 - 4 \\ & = 33 - 32 \\ & = 1 \end{aligned}$$

Explora

Observa cómo se resuelve la siguiente operación de dos maneras distintas.

$$\begin{aligned} \text{I. } 15 + 18 \div (-3) \\ & = 33 \div (-3) \\ & = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } 15 + 18 \div (-3) \\ & = 15 + (-6) \\ & = 9 \end{aligned}$$

- ¿Cuál es el resultado correcto de la operación?

Ten en cuenta

Un **polinomio aritmético** es una expresión en la que intervienen varias multiplicaciones y/o divisiones ligadas por los signos $+$ y $-$.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Realizar operaciones combinadas en Z aplicando el orden de operación y verificar resultados utilizando la tecnología.

13.2 Operaciones con paréntesis

Cuando hay **operaciones combinadas** en las que aparecen signos de agrupación, el orden para resolverlas es el siguiente:

1. Se realizan las operaciones que están dentro de los paréntesis. Si hay unos dentro de otros, se empieza por los internos.
2. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
3. Se realizan las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 4

Observa cómo se efectúa esta operación.

$$\begin{aligned} & (15 - 6) + 3 - [(20 - 5 \cdot 2) + (5 + 24 \div 4)] - (-3) \\ & (15 - 6) + 3 - [(20 - 10) + (5 + 6)] - (-3) \\ & = 9 + 3 - [(20 - 10) + (5 + 6)] - (-3) \quad \leftarrow \text{Se aplica la jerarquía de las operaciones en los paréntesis.} \\ & = 9 + 3 - [10 + 11] - (-3) \quad \leftarrow \text{Se continúa con las operaciones que se encuentran entre paréntesis.} \\ & = 9 + 3 - 21 - (-3) \quad \leftarrow \text{Se resuelven las operaciones de los corchetes.} \\ & = 9 + 3 - 21 + 3 \quad \leftarrow \text{Se eliminan los signos de agrupación.} \\ & = -6 \quad \leftarrow \text{Se efectúan adiciones y sustracciones.} \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Ten en cuenta cómo los signos de agrupación determinan el resultado de una operación combinada con números enteros, a pesar de tener los mismos términos.

$$\begin{array}{ll} \bullet 16 - 7 \cdot 2 & \bullet (16 - 7) \cdot 2 \\ = 16 - 14 & = 9 \cdot 2 \\ = 2 & = 18 \end{array}$$

Cuando delante de un paréntesis hay un signo menos, el paréntesis se puede eliminar de dos maneras, sin alterar el resultado de la operación contenida en él.

- Se efectúan primero las operaciones contenidas en el paréntesis y se halla el opuesto del resultado.
- Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y se cambia el signo de los sumandos.

Actividad resuelta

Comunicación

- 1 Efectúa la operación $-3 - (-7 + 12)$ de dos formas distintas.

• Solución:

$$\begin{array}{ll} \bullet -3 - (-7 + 12) & \bullet -3 - (-7 + 12) \\ = -3 - (5) & = -3 + 7 - 12 \\ = -3 - 5 & = -8 \\ = -8 & \end{array}$$

Ten en cuenta

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como una sola cantidad.

Estos signos se eliminan uno a uno, empezando por el que esté situado más adentro, y siguiendo el orden propio de las operaciones que hay que efectuar, es decir, despejar de adentro hacia afuera.

Ten en cuenta

El signo menos (-) antes de un paréntesis es la forma abreviada de multiplicar por (-1). Esto es:

$$-(a + b) = -1 \cdot (a + b).$$

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Solicite a los estudiantes que resuelvan operaciones combinadas donde apliquen los conocimientos adquiridos en clases, por ejemplo:
 $-32 + 215 : 5 \times (-3) + 300.$

Analice con los estudiantes las operaciones que hay que desarrollar en la operación y el orden en que se debe proceder. Realice todos los análisis correspondientes para que los estudiantes interioricen e interpreten el contenido. En la operación aparecen las operaciones de división y multiplicación, adición y sustracción. Los estudiantes deben aplicar el orden operacional de esta forma obteniendo como resultado:

$$215 : 5 = 43; 43 \times (-3) = -129.$$

Una vez realizada la división y multiplicación se procede a resolver la adición y sustracción en el orden en que aparece:

$$-32 + (-129) + 300 = -161 + 300 = 139$$

2. Solicite a los estudiantes que mencionen las operaciones de cálculo y sus formas de resolución en presencia de las demás operaciones por ejemplo: cuando sumamos dos números enteros; integrando las propiedades obtenemos; un tercer número entero pero hay que tener en cuenta los signos, si son iguales mantiene el signo en el resultado si son diferentes se resta y se coloca el signo del número que tiene mayor módulo.

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar la siguiente página web:

http://www.vitutor.com/di/e/a_10.html

Ejercitación

2. a. -32 b. 15
c. 22 d. -87
e. -5 f. 0
3. a. 2 b. -55
c. -3 d. 10
e. 12 f. -33
g. -306

Comunicación

4. a. F b. F
c. V d. V
e. F f. F

Razonamiento

5. a. $a = -5$
b. $a = -18$
c. $a = -2$
d. $a = 6$
e. $a = -3$
f. $a = -3$

13

Operaciones combinadas con números enteros

Matemáticas

Efectúa operaciones combinadas en la calculadora

Con ayuda de la calculadora científica puedes observar cómo varía el valor de un polinomio aritmético cuando se incorporan o no paréntesis.

- Observa cómo se efectúa una operación sin signos de agrupación, con ayuda de la calculadora.

Para calcular el valor de $5 + 7 \cdot 2 + 12 \div 3$, se digita la secuencia:

5 + 7 x 2 + 12 ÷ 3 =

En este caso, las operaciones son efectuadas en orden jerárquico: primero las multiplicaciones y divisiones que aparecen de izquierda a derecha, y luego, las adiciones.

De esta manera, se obtiene en la pantalla:

5+7x2+12÷3

23

- Cuando el polinomio tiene signos de agrupación, son estos los que determinan el orden en el cual se efectúan las operaciones.

La secuencia que permite calcular el valor del polinomio $[(5 + 7) \cdot 2 + 12] \div 3$, es la siguiente:

((5 + 7) x 2 + 12) ÷ 3 =

En este polinomio, el orden de las operaciones es definido por los paréntesis: primero aquellas operaciones que están en los paréntesis contenidos en otros, y luego las operaciones con los resultados de las primeras, en orden jerárquico.

Con lo anterior, en la calculadora se obtiene:

((5+7)x2+12)÷3

12

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Realiza cada operación teniendo en cuenta su jerarquía.
- $(-15) \cdot 2 - (-16) \div (-8)$
 - $(-12) + (-9) \cdot 6 \div (-2)$
 - $7 - 3 \cdot (-4) - 27 \div (-9)$
 - $(-45) - (-49) \div 7 \cdot (-6)$
 - $(-20) + 6 \cdot (-5) \div (-2)$
 - $54 \div (-3) \cdot 2 - 9 \cdot (-4)$
3. Calcula el resultado de cada operación.
- $(3 - 8) + [5 - (-2)]$
 - $5 - [63 - 2 - (12 - 8) - 3 + 6]$
 - $18 \div [12 \div (-2)]$
 - $(5 + 3 \cdot 2 \div 6 - 4) \cdot (4 \div 2 - 3 + 6)$
 - $(7 - 2 + 4) - (2 - 5)$
 - $(-12) \cdot 3 + 18 \div (-12 \div 6 + 8)$
 - $6 \cdot \{3 \cdot [-9 + 4(5 \cdot 3 - 9)] - 3 \cdot (40 - 8)\}$

Comunicación

4. Indica si son ciertas las siguientes igualdades.
- $15 + 18 \div 3 = (15 + 18) \div 3$
 - $96 \div [(4 - 2) \cdot 6] = 96 \div 4 - 2 \cdot 6$
 - $7 - (12 - 9) = 7 - 12 + 9$
 - $29 + [35 \div (-5)] = 29 + 35 \div (-5)$
 - $72 \div [(-9 + 3) \cdot 6] = 72 \div (-9) + 3 \cdot 6$
 - $36 \div [(-2) - (-8)] = 36 \div (-2) + (-8)$

Razonamiento

5. Sustituye la a por el número entero que haga que la igualdad sea cierta.
- $(-15) \cdot (-8 + 3) = (-15) \cdot a$
 - $12 \div 6 \cdot (-9) + (-2) \cdot 8 = a - 16$
 - $17 - (18 - 12) \div (-3) = 17 - a$
 - $6 - 4 \cdot 9 + 30 = 6 - a$
 - $(-26) \cdot (-7 + 4) = (-26) \cdot a$
 - $(-6) \cdot (5 - 4) \cdot (-3) = (-6) \cdot a$

Bloque de Álgebra y Funciones
Deduce y aplica las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en operaciones numéricas.

Ejercitación

6. Ubica los paréntesis donde sea preciso para obtener cada resultado.

- $10 \cdot 100 - 100 \div 10 = 990$
- $15 \div 5 + 3 \cdot 5 + 9 \div 3 = 21$
- $15 + 3 + 2 \div (-2) + 4 \cdot 3 - 2 = 14$
- $18 \div (3 \cdot 2) + 6 \cdot (-5) + 3 = -9$

7. Realiza las operaciones y escribe el valor absoluto de cada resultado en los círculos de la Figura 1, de tal manera que la suma de cada lado sea 20.

- $9 - [(240 + 220) \cdot (19 - 19)]$
- $29 - 20 + 14 - 19$
- $(-25 - 17 + 40) + (35 - 16 - 20)$
- $2 + 5 + 8 - 7 - 3$
- $3 \cdot 4 + (6 + 5 - 13) - 12 \div 4$
- $(-25 + 18 - 45 + 12) \div (26 - 20 + 46 - 32)$
- $35 - 24 - 35 + 23$
- $(2 \cdot 4 + 10) \div (6 - 3)$
- $(2 \cdot 4 - 4) \cdot (6 - 4)$

11. Obtén los números del 1 al 10 combinando la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. Utiliza como única cifra el número 5, como se muestra en el ejemplo.

$$(-5) \div (-5) = 1$$

Modelación

12. Escribe una expresión matemática que represente cada situación. Luego, responde las preguntas.

- Alvaro ganó el lunes \$ 250, el martes duplicó esta cantidad y el miércoles obtuvo tanto como la suma de lo que obtuvo el lunes y el martes. ¿Cuánto ganó en los tres días?
- En la madrugada la temperatura estaba en 5°C bajo cero, a las 8 a. m. la temperatura aumentó en 7°C y a las 9 a. m. bajó 3°C . ¿Qué temperatura había a las 9 de la mañana?
- Gustavo tenía diez canicas, ganó cuatro en un día y durante los siguientes tres días perdió dos canicas por día. El último día ganó tres veces la mitad de la cantidad de canicas con las que inició. ¿Con cuántas canicas quedó Gustavo?
- Si debía \$ 800, el mes pasado pagué \$ 120 y en este mes pagué \$ 350, ¿cuánto debo aún?

Resolución de problemas

13. En un conjunto residencial viven 13500 personas. Hay un robble por cada 90 personas y cuatro pinos por cada 120 personas. ¿Cuántos árboles de cada clase hay en el conjunto residencial?

14. Doris recibió \$ 700 de sueldo el día lunes y pagó \$ 110 que debía. El miércoles su hermano le devolvió \$ 57 que le había prestado. El jueves, Doris gastó en compras el doble de lo que le devolvió su hermano el día anterior. ¿Cuánto dinero tiene ahora Doris?

Razonamiento

8. Combina operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con signos de agrupación cuando sea necesario, para obtener un resultado de 31.

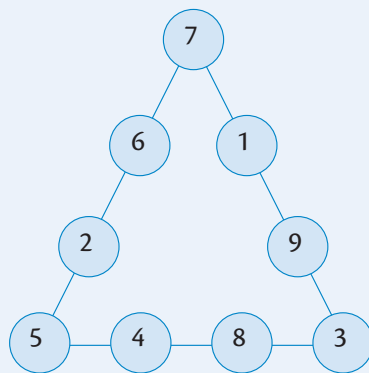
9. Combina las operaciones básicas para obtener 25 como resultado. Escribe cinco combinaciones, y en algunas de ellas usa paréntesis.

10. Explica cómo se puede obtener, a partir de la operación $3 + 8 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + 1$, el número 20 como resultado.

Figura 1

Ejercitación

- $(10 \cdot 100) - (100 \div 10) = 990$
 - $(15 \div 5) + (3 \cdot 5) + (9 \div 3) = 21$
 - $(15 \div 3) + (2 \div (-2)) + (4 \cdot 3) - 2 = 14$
 - $18 \div (3 \cdot 2) + 6 \cdot [(-5) + 3] = -9$
- $|9| = 9$
 - $|4| = 4$
 - $|-3| = 3$
 - $|5| = 5$
 - $|7| = 7$
 - $|-2| = 2$
 - $|-1| = 1$
 - $|6| = 6$
 - $|8| = 8$



Razonamiento

- Múltiples respuestas, por ejemplo.
 $(20 \cdot 2) - (18 \div 3) + (6 \div 3) - 5 = 31$
- Una solución es $17 + (3 \cdot (-2)) + (7 \cdot 2) = 25$
- Realizando primero las multiplicaciones y luego las adiciones y sustracciones.

11. $5 \div 5 = 1$

$$(5 \div 5) + (5 \div 5) = 2$$

$$5 - [(5 \div 5) + (5 \div 5)] = 3$$

$$5 - (5 \div 5) = 4$$

$$5 \cdot (5 \div 5) = 5$$

$$5 + (5 \div 5) = 6$$

$$5 + (5 \div 5) + (5 \div 5) = 7$$

$$5 + 5 - [(5 \div 5) + (5 \div 5)] = 8$$

$$5 + 5 - (5 \div 5) = 9$$

$$5 + 5 = 10$$

Modelación

- Alvaro ganó \$ 1 500
 - -1°C
 - 23 canicas
 - Debo \$ 330

Resolución de problemas

- Hay 150 robles y 450 pinos.
- Doris tiene \$ 533
- 18 chocolates

Ampliación conceptual

Para desarrollar una potencia se tiene en cuenta la base y el exponente, pues el exponente indica la cantidad de veces que debe multiplicarse la base para lograr el resultado final.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes qué es una potencia y qué elementos la componen.
- Determine en clases para qué podemos utilizar una potencia y cómo podemos desarrollarla conociendo su base y su exponente. Realice preguntas sencillas donde los estudiantes puedan vincular las potencias con la vida práctica.
- Socialice con los estudiantes el desarrollo de una potencia de base entera y exponente natural. Por ejemplo:

$$256 = 28 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
- Proponga a los estudiantes ejercicios sencillos para la familiarización del tema sobre el desarrollo exponencial de potencias de base entera y exponente natural.

- Analice con los estudiantes el signo de cada ejercicio propuesto pues influye en el resultado final. Por ejemplo: si la base de la potencia es positiva no importa la paridad de los exponentes igual el resultado será siempre positivo; pero si la base es negativa y el exponente es impar el resultado será negativo. Exponga varios ejemplos a los estudiantes para su familiarización con el tema y su posterior desarrollo con el trabajo de potencias.

14

Potencias de base entera y exponente natural

Para responder la pregunta, se puede realizar el análisis que se presenta en la Tabla 1.

Tiempo en minutos	Número de bacterias
1	$1 \cdot 2$
2	$2 \cdot 2$
3	$2 \cdot 2 \cdot 2$
4	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
5	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
6	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
7	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Tabla 1

El producto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ se puede escribir como una potencia porque:

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

La potencia se representa así:

$$\begin{array}{ccc} \text{Exponente} & & \text{Potencia} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^7 & = & 128 \\ \uparrow & & \\ \text{Base} & & \end{array}$$

Por lo tanto, en 7 minutos habrá 128 bacterias en total.

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales. La **base** de la potencia es el factor que se repite. El **exponente** es el número de veces que se repite.

Ejemplo 1

Observa cómo se obtienen algunas potencias.

- $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$
- $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
- $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

Ten en cuenta

Existe otra manera poco usual de hallar la potencia cuadrada de un número sin utilizar explícitamente dicha definición.

Por ejemplo:

- $3^2 = 1 + 3 + 3 = 9$
- $6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$
- Halla 2^2 y 5^2 con este método.

14.1 Potencias de base un número entero negativo

- Si la base es negativa y el exponente es par, el valor de la potencia es positivo.
- Si la base es negativa y el exponente es impar, el valor de la potencia es negativo.

Ejemplo 2

- $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$, ya que la base es negativa y el exponente impar.
- $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$, puesto que la base es negativa y el exponente es par.
- $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$, porque la base es negativa y el exponente es par.
- $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$, pues la base es negativa y el exponente es impar.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales.

14.2 Operaciones con potencias de la misma base

El **producto de potencias de la misma base** es igual a otra potencia de la misma base y con el exponente igual a la suma de los exponentes de los factores. En general, se cumple que:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 3

María tiene un restaurante y quiere saber cuántos platos se utilizan en él, para lo cual compra 27 estantes, cada estante con nueve divisiones y en el que caben tres platos por división. Una manera de calcular la cantidad total de platos consiste en realizar la siguiente multiplicación.

$$27 \cdot 9 \cdot 3 = 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^{3+2+1} = 3^6 = 729$$

Por lo tanto, en el restaurante de María se utilizan 729 platos en total.

El **cociente de potencias de la misma base** es igual a otra potencia de la misma base y con el exponente igual a la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor. En general, se cumple que:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}; \text{ si } a \neq 0$$

Ejemplo 4

De acuerdo con la propiedad anterior, el cociente $(-5)^6 \div (-5)^4$ se puede calcular como se muestra a continuación.

$$(-5)^6 \div (-5)^4 = (-5)^{6-4} = (-5)^2 = 25$$

La **potencia de una potencia** es igual a la misma base elevada al producto de los exponentes. En general, se cumple que:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo 5

Para comprender mejor la propiedad anterior, se puede analizar esta secuencia.

$$[(-7)^2]^3 = (-7)^2 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^2 = (-7)^{2+2+2} = (-7)^6$$

Ejemplo 6

Observa cómo resolver la potencia $\frac{[(-2)^3]^4 \cdot 4^4 \cdot [(-2)^{12}]^2 \cdot (4^3)^3}{(-2)^6 \cdot 4^7}$.

$$\begin{aligned} \frac{[(-2)^3]^4 \cdot 4^4 \cdot [(-2)^{12}]^2 \cdot (4^3)^3}{(-2)^6 \cdot 4^7} &= \frac{(-2)^{12} \cdot 4^4 \cdot (-2)^{24} \cdot 4^9}{(-2)^6 \cdot 4^7} \\ &= \frac{(-2)^{18} \cdot 4^{13}}{(-2)^6 \cdot 4^7} = (-2)^{12} \cdot 4^6 \end{aligned}$$

Ten en cuenta

El número 365 es un número curioso, ya que es el único que cumple con la propiedad

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

Ten en cuenta

Todo número diferente de cero elevado a la 0 es igual a 1. En general:

$$a^0 = 1; \text{ si } a \neq 0$$

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Proponga a los estudiantes que realicen actividades donde materialicen el contenido impartido por el docente sobre las potencias de bases enteras y exponente natural.
2. Analice con los estudiantes las propiedades de las potencias, pues les serán útiles para la resolución de ejercicios más integradores por ejemplo: $a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$. Esta propiedad se lee de la siguiente manera: producto de potencias de igual base, donde se mantiene la base y se suman los exponentes.
3. Analice con los estudiantes el cociente de potencias de bases iguales donde se mantiene la base y restan los exponentes ejemplos: $a^4 : a^2 = a^{4-2} = a^2$.
4. Analice con los estudiantes la propiedad de potencia de una potencia donde la potencia está elevada a una potencia y se expresa de esta forma: $(a^4)^2 = a^{4 \times 2} = a^8$.
5. Analice con los estudiantes la propiedad fundamental de la potencia, todo número elevado a la cero es igual a 1. Ejemplo: $32^0 = 1$
6. Reafirme a los estudiantes que todo número elevado a la 1 es igual al mismo número. Ejemplo: $21^1 = 21$
7. Analice con los estudiantes las potencias de exponente iguales y sus propiedades.

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar las siguientes páginas web:

- <http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Potenciabaseentera.htm>
- http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-22524_recurso_pdf.pdf

■ Actividades colaborativas

Proponga un taller donde los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos sobre el estudio de las potencias y puedan mostrar sus habilidades en la resolución de ejercicios donde apliquen las propiedades de las potencias estudiadas; escriba en una esquina del pizarrón las propiedades pero incompletas para que los estudiantes las completen, una vez completas las propiedades, proponga ejercicios donde apliquen dichas propiedades y realice un encuentro de conocimiento donde los estudiantes deban resolver los siguientes ejercicios.

1. Escribe los siguientes productos como potencias:

- a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$
- b) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10}$
- c) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

2. Mencione los signos de cada potencia sin resolver las operaciones.

- a) $(-4)^3 =$ Negativo;
- b) $(5)^4 =$ Positivo;
- c) $(6)^3 =$ Positivo

3. Aplica las propiedades de la potencia y compara los resultados

- a) 43 y $34 = 64 < 81$
- b) 23 y $(-3)^2 = 8 < 9$
- c) $(-3)^3$ y $(-4)^2 = -27 < 16$

4. Expresa el producto como una sola potencia.

- a) $23 \times 22 \times 2 \times 24 \times 25 = 23 + 2 + 1 + 4 + 5 = 215$
- b) $53 \times 55 \times 56 = 53 + 5 + 6 = 514$
- c) $76 \times 73 \times 72 = 76 + 3 + 2 = 711$

14

Potencias de base entera y exponente natural

14.3 Operaciones con potencias del mismo exponente

El producto de potencias con el mismo exponente es una potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases. En general, se cumple que:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ejemplo 7

La multiplicación $(-2)^3 \cdot 3^3$ se puede calcular de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} (-2)^3 \cdot 3^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= [(-2) \cdot 3] \cdot [(-2) \cdot 3] \cdot [(-2) \cdot 3] \\ &= [(-2) \cdot 3]^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 8

Para efectuar en forma abreviada un producto de potencias con igual exponente, se aplica la anterior definición, así:

$$(-7)^2 \cdot 3^2 = (-7 \cdot 3)^2 = (-21)^2 = 441$$

El cociente de potencias con el mismo exponente es una potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases. En general, se cumple que:

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n; \text{ si } b \neq 0$$

Ejemplo 9

En la división $(-6)^4 \div 3^4$, el dividendo y el divisor son potencias que tienen diferente base y el mismo exponente. Para obtener el cociente, se puede proceder así:

$$\begin{aligned} (-6)^4 \div 3^4 &= [(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)] \div (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= [(-6) \div 3] \cdot [(-6) \div 3] \cdot [(-6) \div 3] \cdot [(-6) \div 3] \\ &= [(-6) \div 3]^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 10

Para efectuar en forma abreviada un cociente de potencias con igual exponente, se aplica la anterior definición, así:

$$(-4)^3 \div 2^3 = (-4 \div 2)^3 = (-2)^3 = -8$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve.

- a. $(-4)^8 \div (-4)^3$
- b. $[(-3)^4 \cdot 2^4] \div (-6)^3$
- c. $[(-5)^9]^3 \div [(-5)^2 \cdot (-5)^6]$

Solución:

$$\text{a. } (-4)^8 \div (-4)^3 = (-4)^{8-3} = (-4)^5$$

$$\begin{aligned} \text{b. } [(-3)^4 \cdot 2^4] \div (-6)^3 &= [(-3) \cdot 2]^4 \div (-6)^3 \\ &= (-6)^4 \div (-6)^3 \\ &= (-6)^{4-3} = (-6)^1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } [(-5)^9]^3 \div [(-5)^2 \cdot (-5)^6] &= (-5)^{9 \cdot 3} \div [(-5)^{2+6}] \\ &= (-5)^{27} \div (-5)^8 \\ &= (-5)^{27-8} \\ &= (-5)^{19} \end{aligned}$$

Cálculo mental

Multiplicar por potencias de 10

Para calcular el resultado de la multiplicación de un número por una potencia de 10, se deja el mismo número y se añaden tantos ceros como indique el exponente de la potencia de 10. Por ejemplo:

$$-25 \cdot 10 = -250$$

$$53 \cdot 10^2 = 5\,300$$

$$7 \cdot 10^3 = 7\,000$$

- Calcula $-12 \cdot 10^4$ y $2 \cdot 10^5$.

Ten en cuenta

En la potenciación:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

$$(a - b)^n \neq a^n - b^n$$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Indica el signo de cada potencia sin efectuar la operación.

a. $(-3)^8$ b. $(-5)^{10}$ c. $(-4)^{12}$

3. Escribe los siguientes productos como potencias.

a. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ b. $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$
 c. $(-4) \cdot (-4)$ d. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
 e. $10 \cdot 10 \cdot 10$ f. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

4. Completa la Tabla 2.

Potenciación	Base	Exponente	Potencia
$(-2)^7$			-125
$(-3)^5$			
		3	-64
	6		36
$(-1)^2$			
3^2			

5. Expresa cada potencia como producto y calcula su valor.

a. $(-13)^2$ b. 4^4 c. $(-6)^3$
 d. $(-3)^7$ e. 2^4 f. 0^8
 g. $(-8)^3$ h. 3^5 i. $(-1)^4$

6. Completa la Tabla 3. Observa el ejemplo.

Operación	Aplicando propiedades	Sin aplicar propiedades
$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2$	$2^{3+4+2} = 2^9$	$8 \cdot 16 \cdot 4 = 512$
$(-3)^2 \cdot (-3) \cdot (-3)^3$		
$(-3)^2 \cdot (-3)$		
$[(-2)^3]^2$		
$(-7)^2 \div (-7)^3$		
$(-6)^4 \div 3^2$		

7. Expresa como una sola potencia.

a. $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2$ b. $[(-7)^2]^3$
 c. $(-10)^2 \cdot (-2)^3 \cdot 5^2$ d. $a^3 \div a^5$
 e. $(-5)^2 \div (-5)^3 \cdot (-5)$ f. $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$

8. Resuelve cada par de potencias y compara los resultados.

a. $(-3)^2$ y $(-4)^3$ b. 2^3 y 5^2
 c. $(-2)^2$ y -2^4 d. $(-3)^3$ y -3^3

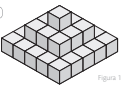
Razonamiento

9. Aplica las propiedades de la potenciación para simplificar las siguientes expresiones.

a. $(-5)^2 \cdot 4^2 \cdot (-5)^2$
 $4 \cdot (-5)^2$
 b. $\frac{[(-2)^3]^2 \cdot (2^2)^3 \cdot [(-3)^2]^3}{2^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^2}$
 c. $\frac{(-5)^2 \cdot 3^2 \cdot (-5) \cdot 3^2}{3^2 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^2}$

10. Completa la expresión para calcular el número de cubos que forman la pirámide de la Figura 1.

$1 + 3^2 + 5^2 = \square$



Si la base de la Figura 1 es una de las caras de un cubo, ¿cuántos cubos pequeños hacen falta para completar el cubo más grande?

11. Halla el valor de la x en cada caso, de tal forma que las igualdades sean ciertas.

a. $(-2)^2 \cdot (-2)^x = (-2)^7$
 b. $x^2 = -27$
 c. $(-5)^2 \div [(-5)^2]^x = (-5)^3$
 d. $3^x \cdot x^2 = (-6)^2$
 e. $[(-3)^2]^3 \div (-3)^2 = (-3)$
 f. $(-4)^2 \cdot (-4)^x = x^4$

Resolución de problemas

12. Sonia trajo de su viaje tres paquetes con tres cajas. Cada uno, cada caja tiene tres bolsas, y cada bolsa, dos lápices. ¿Cuántos lápices trajo Sonia de su viaje?

13. En origami se toma una hoja de papel y se dobla por la mitad, determinando así dos regiones. Luego se vuelve a doblar una vez más y se obtienen cuatro regiones. Si se continúa el procedimiento hasta hacer ocho dobleces, ¿cuántas regiones se obtienen?

14. En una investigación respecto a cómo aumenta el número de conejos con el tiempo, se comienza con tres conejos que se triplican al mes. ¿Cuántos conejos habrá a los cuatro meses si la población continúa creciendo de la misma forma?

Ejercitación

2. a. Negativo
b. Positivo
c. Positivo
3. a. 2^5 b. $(-8)^3$
c. $(-4)^2$ d. 5^4
e. 10^3 f. $(-1)^3$

4.

Potenciación	Base	Exponente	Potencia
$(-5)^3$	-5	3	-125
$(-2)^7$	-2	7	128
$(-3)^5$	-3	5	243
$(-4)^3$	-4	3	-64
6^2	6	2	36
$(-1)^6$	-1	6	1
3^2	3	2	9

5. a. 169 b. 64 c. 1 296
d. -2 187 e. 256 f. 0
g. -8 h. 243 i. 1

6.

Aplicando propiedades	Sin aplicar propiedades
$2^3 + 4 + 2 = 2^9 = 512$	$8 \cdot 16 \cdot 4 = 512$
$(-3)^2 + 1 + 35(-3)^6 = 729$	$9 \cdot (-3) \cdot (-27) = 729$
$(-3)^{2+1} = (-3)^3 = -27$	$9 \cdot (-3) = 227$
$(-2)^{4+3} = (-2)^{12} = 4096$	$(16)^3 = 4096$
$(-7)^{5-3} = (-7)^2 = 49$	$(-16807) \div (-343) = 49$
$(-2 \cdot 3)^4 \div 3^4 = (-2)^4 \cdot 3^4 \div 3^4 = (-2)^4 \cdot 3^{4-4} = 16$	$1296 \div 81 = 16$

7. a. 2^{16} b. $(-7)^{15}$
c. $(-10)^8$ d. a^5
e. $(-5)^4$ f. $(a \cdot b \cdot c)^5$

Comunicación

8. a. 81 y -64 b. 32 y 25
c. 16 y -16 d. Ambas dan -27

Razonamiento

9. a. $(-5) \cdot 4^5$
b. $(-2)^7 \cdot 2$
c. $(-5)^2 \cdot 3^6$
10. $1 + 3^2 + 5^2 = 35$, hacen falta 125 cubos pequeños.
11. a. $x = 2$ b. $x = -3$
c. $x = 2$ d. $x = -2$
e. $x = 4$ f. $x = -4$

Resolución de problemas

12. 54 lápices
13. 256 regiones.
14. 243 conejos

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Cuando se habla de radicación no se puede dejar de mencionar la raíz cuadrada como la operación inversa de la potencia. La radicación se utiliza para determinar bases exactas de números que al multiplicarse por él mismo varias veces se obtiene una base exacta tal es el caso de 16 su raíz cuadrada es 4 porque $4 \times 4 = 16$; 25 sus bases exactas son 5 x 5; 100 sus bases exactas son 10 x 10 y así sucesivamente. Podemos encontrar el 4, 9, 36, 49, 64, 81 etc.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes el concepto de raíz cuadrada para que los mismos puedan interpretar para qué les sirve y cómo utilizar las raíces cuadradas en las operaciones de cálculo.
- Utilice la potenciación como operación inversa de la raíz para familiarizar ambos términos en la resolución de operaciones combinadas.
- Demuestre con ejemplos sencillos que la raíz cuadrada exacta de un número es otro número que multiplicado por el mismo se obtiene dicho resultado.
- Explique a los estudiantes que todo número que tenga una raíz exacta tiene dos raíces cuadradas por ejemplo: 144 tiene como raíz cuadrada $12 \times 12 = 144$ y $(-12) \times (-12) = 144$.
- Identifique con los estudiantes las raíces cuadradas de varios números que no sean las más conocidas y estudiadas para obtener mejor destrezas a la hora de encontrar sus raíces.

15

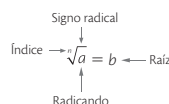
Raíces cuadradas

Explora

Se dispone de un espacio cuadrado de 25 cm de lado para ubicar una pintura.



• Si la pintura, también de forma cuadrada, tiene un área de 400 cm^2 , ¿es posible ubicarla en el espacio disponible?



Ten en cuenta

La radicación es una operación inversa de la potenciación, con la cual se busca la base conociendo el exponente y la potencia.

Ten en cuenta

Para hallar raíces cuadradas es importante conocer los cuadrados perfectos. Si se quiere calcular el cuadrado de un número, solo hay que multiplicarlo por sí mismo.

15.1 Raíz cuadrada exacta

Para modelar la situación, es preciso recordar que el área de un cuadrado de lado L viene dada por:

$$\text{Área} = L^2$$

En este caso,

$$400 = L^2$$

Entonces, para calcular el valor de L , se puede hacer uso de la radicación. Es decir:

$$L = \sqrt{400}$$

Lo anterior significa que se debe hallar un número cuyo cuadrado sea 400.

El número buscado es 20, ya que $20^2 = 400$.

Esto quiere decir que el lado de la pintura es 20 cm. Según esto, se deduce que sí se puede ubicar la pintura en el espacio disponible.

La **raíz cuadrada exacta** de un número es otro número que multiplicado por sí mismo sea igual al primer número. Se expresa así:

$$\sqrt{a} = b \leftrightarrow b^2 = a$$

Hallar la raíz de un número a significa encontrar un número b que, multiplicado por sí mismo, sea igual a a .

Ejemplo 1

El número 36 tiene dos raíces cuadradas, ya que hay dos números, 6 y -6 , que cumplen que $6^2 = (-6)^2 = 36$.

Ejemplo 2

Como se sabe que $5 \cdot 5 = 25$ y $(-5) \cdot (-5) = 25$, entonces:

La raíz cuadrada positiva de 25 es 5. Se escribe: $\sqrt{25} = +5$

La raíz cuadrada negativa de 25 es -5 . Se escribe: $\sqrt{25} = -5$

15.2 Raíz cuadrada entera

La **raíz cuadrada entera** de un número es el mayor entero cuyo cuadrado es menor que dicho número.

El **residuo de la raíz cuadrada entera** de un número es la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera.

Las **raíces cuadradas enteras** son aquellas en las que el resultado no es exacto y, al igual que en la división, tienen un residuo.

Ejemplo 3

Para hallar la raíz cuadrada de 18, se tiene que los cuadrados más cercanos son $4^2 = 16$ y $5^2 = 25$. Se toma 4^2 porque no excede al 18. Entonces, el residuo es la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz entera, $18 - 16 = 2$. Por tanto, $\sqrt{18} = 4$ y su residuo es 2. Gráficamente se representa así:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \overline{) 180000} \\ \underline{16} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \rightarrow \text{Sobran 2}$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas.

15.3 Producto de raíces cuadradas

En el **producto de raíces cuadradas** se multiplican los radicandos y se mantiene el índice de la raíz. En general, se cumple que:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Ejemplo 4

En las siguientes operaciones se verifica la propiedad anterior.

$$a. \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} \quad b. \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = \pm 10$$

Ejemplo 5

El producto $5 \cdot \sqrt{18} \cdot 4 \cdot \sqrt{8}$ se puede calcular efectuando primero el producto de los números y, a continuación, el producto de las raíces cuadradas.

$$5 \cdot \sqrt{18} \cdot 4 \cdot \sqrt{8} = 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{18 \cdot 8} = 20 \cdot \sqrt{144} = 20 \cdot 12 = 240$$

Ejemplo 6

En ocasiones se hace necesario invertir la regla. Observa.

$$\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$$

Ejemplo 7

Para resolver la operación $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ se aplica la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{18} - \sqrt{6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6} \end{aligned}$$

15.4 Cociente de dos raíces cuadradas exactas

En el **cociente de raíces cuadradas** se dividen los radicandos y se mantiene el índice de la raíz. En general, se cumple que:

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}; \text{ si } b \neq 0$$

Ejemplo 8

En la división $\sqrt{18} \div \sqrt{2}$, el dividendo y el divisor son raíces cuadradas. Para obtener el cociente, se procede así:

$$\sqrt{18} \div \sqrt{2} = \sqrt{18 \div 2} = \sqrt{9} = 3$$

Ten en cuenta

La radicación no es distributiva con respecto a la adición y a la sustracción.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Proponga a los estudiantes que reconozcan cuáles de las siguientes raíces son exactas o tienen residuos:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{36}$ = Raíz exacta | b) $\sqrt{49}$ = Raíz exacta |
| c) $\sqrt{3}$ = Residuo | d) $\sqrt{2}$ = Residuo |
| e) $\sqrt{625}$ = Raíz exacta | f) $\sqrt{7}$ = Residuo |
| g) $\sqrt{8}$ = Residuo | h) $\sqrt{9}$ = Raíz exacta |
| i) $\sqrt{16}$ = Raíz exacta | j) $\sqrt{4}$ = Raíz exacta |

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar las siguientes páginas web, para una mayor fuente de apoyo que sirve a demás para el adquirir conocimientos y habilidades sobre el estudio de las raíces cuadradas exactas y no exactas:

- <http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/cuadrados-raices-cuadradas.html>
- <http://www.aulafacil.com/cursos/l10762/ciencia/matematicas/potencias-y-raices/operaciones-con-raices-cuadradas>

■ Actividades colaborativas

Proponga actividades a los estudiantes donde enlacen las propuestas de raíces exactas y no exactas que el docente le proponga en el pizarrón. En la izquierda del pizarrón el docente les propondrá las siguientes raíces 35; 64; 49; 121, 144, 625, 16, y al otro lado del pizarrón ubicará cuadrados para que los enlacen por ejemplo ubicará el 8; 4; 11; 12; 25. los estudiantes deben enlazar las respuestas correctas y el docente evaluará el nivel de asimilación respecto al tema impartido que han adquirido los estudiantes.

Comunicación

2. a. Sí b. No c. Sí
d. Sí e. No f. Sí

Ejercitación

3. a. 12 b. 11 c. 9
d. 25 e. 1 f. 14
4. a. Raíz = 7; residuo = 8
b. Raíz = 6; residuo = 3
c. Raíz = 3; residuo = 4
d. Raíz = 7; residuo = 6
e. Raíz = 10; residuo = 10
f. Raíz = 8; residuo = 2
5. a. 231 b. 688 c. 784
d. 153 e. 229

Razonamiento

6. a. Entera b. Exacta
c. Exacta d. Entera
e. Entera f. Exacta
g. Entera h. Exacta
i. Entera j. Entera

15

Raíces cuadradas

15.5 Potencia de una raíz cuadrada

Al elevar una raíz cuadrada a un exponente m , se obtiene otra raíz cuadrada con el radicando elevado a m . En general, se cumple que:

$$(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$$

Ejemplo 11

Para comprender mejor la propiedad anterior, analiza las siguientes operaciones.

$$a. (\sqrt{36})^5 = \sqrt{36^5} = \sqrt{(6^2)^5} = \sqrt{6^{10}} = 6^5 = 6^5$$

$$b. (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Mariana tiene un terreno de forma cuadrada, con un área de 169 m^2 .
● Como desea cercarlo, necesita saber cuántos metros de malla metálica debe comprar.

Solución:

Como el terreno tiene forma cuadrada y se sabe que el área del cuadrado se halla elevando al cuadrado la longitud del lado: $A = \text{lado}^2$, entonces se tiene que $169 = l^2$ y, por tanto, $l = \sqrt{169} = 13$. Esto significa que el lado del terreno mide 13 m.

Por último, para saber cuántos metros de malla metálica debe comprar Mariana, es necesario calcular el perímetro del terreno. Como el perímetro es la suma de los lados o $4 \cdot l$, tenemos que $4 \cdot 13 = 52 \text{ m}$.

Mariana tiene que comprar 52 m de malla metálica.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 2 Indica si son o no cuadrados perfectos los siguientes números.
a. 64 b. 70
c. 100 d. 225
e. 111 f. 144

Ejercitación

- 3 Calcula las siguientes raíces.
a. $\sqrt{144}$ b. $\sqrt{121}$
c. $\sqrt{81}$ d. $\sqrt{625}$
e. $\sqrt{1}$ f. $\sqrt{196}$

- 4 Calcula la raíz cuadrada entera y el residuo de los siguientes números.
a. 57 b. 39
c. 13 d. 55
e. 110 f. 66

- 5 Averigua a qué números se les halló la raíz cuadrada para que se obtuvieran las siguientes raíces enteras y residuos.
a. Raíz = 15, residuo = 6
b. Raíz = 26, residuo = 12
c. Raíz = 28, residuo = 0
d. Raíz = 12, residuo = 9
e. Raíz = 15, residuo = 4

Razonamiento

- 6 Indica si las raíces cuadradas de los siguientes números son exactas o enteras.
a. 68 b. 169
c. 36 d. 82
e. 56 f. 81
g. 72 h. 100
i. 24 j. 75

Destina con criterio de desarrollo: Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas.

Bloque de Álgebra y Funciones.

7. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

- a. El producto de dos cuadrados perfectos es un cuadrado perfecto. ()
- b. La suma de dos cuadrados perfectos es un cuadrado perfecto. ()
- c. La raíz cuadrada exacta de un cuadrado perfecto es el mismo. ()
- d. El residuo de una raíz cuadrada exacta es 0. ()
- e. $\sqrt{81} = \pm 8$ ()
- f. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}$ ()
- g. $\sqrt{64} = \pm 8$ ()

8. Analiza cada situación y responde las preguntas.

- a. ¿Existe un número entero que elevado al cuadrado dé -17 ? ¿ $17 - 4$? ¿ $17 - 9$?
- b. ¿Por qué no existe un número entero que corresponda a la raíz cuadrada de un entero negativo?
- c. ¿Cuántas raíces cuadradas tiene 121?
- d. ¿Cómo se puede justificar que -2 es una raíz cuarta de 16?
- e. El cubo de un cuadrado perfecto, ¿es otro cuadrado perfecto?

9. Resuelve aplicando las propiedades de la radicación.

- a. $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}$
- b. $\sqrt{756} \div \sqrt{16}$
- c. $(\sqrt{81})^3$
- d. $\sqrt{32} \div \sqrt{2}$
- e. $(\sqrt{27})^3 \div \sqrt{16}$
- f. $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^3}$
- g. $\sqrt{25 \cdot 36 \div 25}$
- h. $\sqrt{3600}$
- i. $\sqrt{100 \div 4 \cdot 49}$
- j. $\sqrt{36^3}$

10. Determina el número por el que se debe sustituir la letra x para que sean ciertas las igualdades.

- a. $\sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{x}$
- b. $\sqrt{x} \div \sqrt{49} = \sqrt{16}$
- c. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{36}$
- d. $\sqrt{x} = \sqrt{64} \div \sqrt{16}$
- e. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{100}$

Resolución de problemas

- 11. ¿Cuál es el menor número de años que deben transcurrir desde el 2016 para que el año sea un cuadrado perfecto? ¿Cuántos años del tercer milenio son cuadrados perfectos?
- 12. Se quiere alambicar una parcela cuadrada de 1225 metros cuadrados de superficie. ¿Cuántos metros de malla metálica hay que comprar?
- 13. Se quiere construir un cuadrado con cuadraditos de un centímetro de lado. ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado que se construye con 121 cuadraditos?
- 14. El número de páginas de un libro es un cuadrado perfecto más 13, y si se le suma 20 se obtiene el cuadrado perfecto siguiente. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
- 15. Un grupo de estudiantes va a construir unas señales informativas que tengan forma cuadrada. Deben hacerlas de forma que su área sea de 355216 mm². ¿Cuántos milímetros debe medir el lado de cada señal?
- 16. ¿Cuál es la máxima distancia, en línea recta, que podrá recorrer un jugador en un campo de fútbol de 20 m de largo y 15 m de ancho? (Aplica el Teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$).
- 17. Se quiere construir un tablero cuadrado que tenga una superficie de 576 cm² y que a su vez contenga 144 casillas iguales. ¿Cuánto medirá el lado de cada casilla?
- 18. El área de un terreno de forma cuadrada es 256 m². ¿Cuánto medirá el perímetro del terreno?
- 19. La mitad del cuadrado de la distancia que recorre un ciclista en 30 minutos es 162 km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá el ciclista en 2 horas?
- 20. Un cuadro tiene un área de 400 cm². Si se aumenta un centímetro por lado, ¿cuál será el perímetro del nuevo cuadro?
- 21. Un álbum se llena con 180 láminas y tiene 20 páginas. Si en cada página hay el mismo número de láminas, dispuestas en igual número de columnas y de filas, ¿cuántas láminas hay en cada columna?

- 7. a. V b. F
- c. F d. V
- e. F f. F
- g. V

8. a. No

b. Porque al multiplicar dos números iguales siempre da positivo.

c. Dos

d. Porque $(-2)^4 = 16$

e. Sí

- 9. a. 20 b. 4
- c. 216 d. 64
- e. 4 f. 27
- g. 6 h. 60
- i. 35 j. 216

- 10. a. $x = 144$ b. $x = 784$
- c. $x = 9$ d. $x = 4$
- e. $x = 35$

Resolución de problemas

- 11. Deben pasar 9 años. En el tercer milenio hay 10 años que son cuadrados perfectos.
- 12. 140 m
- 13. 11 cm
- 14. 269 páginas.
- 15. 596 mm
- 16. 25 m
- 17. 2 cm
- 18. 64 m
- 19. 72 km
- 20. 84 cm
- 21. Tres láminas en cada columna.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

La jerarquía, es el orden que se debe seguir para lograr un objetivo propuesto y más si el objetivo, tiene que realizarse siguiendo un determinado algoritmo de trabajo.

En la jerarquía de las operaciones mucho tiene que ver el orden operacional pues se debe seguir el mismo para obtener el resultado correcto.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique a los estudiantes nuevamente el orden a seguir cuando para cuando se realiza una operación combinada con signos de agrupación.
- Analice con los estudiantes que en presencia de los signos de agrupación primero se deben realizar las operaciones que se encuentran dentro del signo del medio para ir eliminando los signos de adentro hacia fuera y teniendo en cuenta el signo que se encuentra delante de cada signos de agrupación, si el signo es negativo cambian todos los que están dentro del signo de agrupación cuando se elimina, si el signo es positivo se mantiene todos los signos dentro de ese signo de agrupación.
- Explique a los estudiantes que independientemente a los signos de agrupación que se encuentren en la operación combinada hay que mantener el orden operacional dentro de ellos, por lo que primero se realiza la potenciación y la radicación en el orden en que aparezcan, multiplicación y división en el orden en que aparezcan y la adición y sustracción en el orden en que aparezcan.

16

Jerarquía de las operaciones con potencias y raíces

Explora

Sandra debe solucionar la siguiente operación combinada:

$$14 - \{3 + 4 \cdot 3 - [(-2)^2 \cdot 2 - 7]\} + (3^2 + 6 - 6 \cdot 3) + 3 - (6 - 2^3 \div 2).$$

Como no sabe cómo empezar, le pide ayuda a su amigo Luis.

- ¿Qué le responde Luis a Sandra?

Ten en cuenta

Si un paréntesis que no tiene potencia va precedido del signo +, se suprimirá manteniendo el signo de los términos que contenga.

Si un paréntesis que no tiene potencia va precedido del signo -, al suprimir el paréntesis hay que cambiar el signo a todos los términos que contenga.



TECNOLOGÍAS de la comunicación

http://escuela2punto0educarex.es/Matematicas/Matematicas-ESO-Extremadura/Numeros_enteros_Jerarquia_de_las_operaciones
Refuerza el tema de jerarquía de las operaciones.

Luis le dice a Sandra que para este tipo de ejercicios matemáticos, donde intervienen paréntesis y varias operaciones, lo primero que se resuelve son las potencias, así:

$$14 - \{3 + 4 \cdot 3 - [(-2)^2 \cdot 2 - 7]\} + (3^2 + 6 - 6 \cdot 3) + 3 - (6 - 2^3 \div 2) \\ = 14 - \{3 + 4 \cdot 3 - [4 \cdot 2 - 7]\} + (9 + 6 - 6 \cdot 3) + 3 - (6 - 8 \div 2)$$

Luego, se calculan los productos y cocientes como se muestra a continuación.

$$= 14 - \{3 + 12 - [8 - 7]\} + (9 + 6 - 18) + 3 - (6 - 4)$$

Finalmente, se calculan las sumas y diferencias; primero las que están dentro de los paréntesis y después las que se obtienen de izquierda a derecha.

$$= 14 - \{15 - 1\} + (-3) + 3 - 2$$

$$= 14 - 14 + (-3) + 3 - 2 = -2$$

Para efectuar operaciones combinadas con potencias y raíces, se sigue este orden:

- Se efectúan las potencias y raíces.
- Se resuelven las operaciones que estén dentro de los signos de agrupación. Si hay varios, unos dentro de otros, se empieza por los internos.
- Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Se calculan las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Al resolver la operación $[(-2)^2]^3 + (-36) \div \sqrt{9}$, se verifica el orden mencionado.

- Se resuelve la potencia y la raíz. $= 4^3 + (-36) \div 3$
- Se realiza la potencia y la división. $= 64 + (-12)$
- Se calcula la suma. $= 52$

Ejemplo 2

Para solucionar la operación $300 - [\sqrt{121} + (-3)^2] + 12^2 \div 2^4$, se aplica la jerarquía de las operaciones.

- Se efectúa la raíz y las potencias. $= 300 - [11 + 9] + 144 \div 16$
- Se resuelve el corchete y la división. $= 300 - 20 + 9$
- Se calcula la diferencia y la suma. $= 289$

Ejemplo 3

Observa cómo se resuelve la siguiente operación.

$$2 \cdot (3 - 5)^3 + [12 \cdot \sqrt{12 - 3} \div 6 \cdot (-2)^2 - 12] \\ = 2 \cdot (-2)^3 + [12 \cdot \sqrt{9} \div 6 \cdot 4 - 12] \\ = 2 \cdot (-8) + [12 \cdot 3 \div 6 \cdot 4 - 12] \\ = -16 + [36 \div 6 \cdot 4 - 12] \\ = -16 + [6 \cdot 4 - 12] \\ = -16 + [24 - 12] \\ = -16 + 12 \\ = -4$$

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño:

Calcular raíces de números enteros no negativos en la solución de ejercicios numéricos con operaciones combinadas, atendiendo la jerarquía de la operación.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Pedro recibió de su padre \$ 6 250 y de su madre \$ 350. A la mitad de lo que recibió, él agregó \$ 520 para pagarle a su hermana Claudia una deuda. ¿Cuánto dinero le debía Pedro a Claudia?

Solución:

Para responder la pregunta, se realiza el siguiente procedimiento.

$$\begin{array}{lcl} 6\,250 + 350 & \leftarrow & \text{Dinero que recibe Pedro de sus padres.} \\ (6\,250 + 350) \div 2 & \leftarrow & \text{Mitad del dinero que recibió Pedro.} \\ [(6\,250 + 350) \div 2] + 520 & \leftarrow & \text{Pedro agregó \$ 520 a la mitad del dinero que recibió.} \end{array}$$

El valor de la expresión anterior se halla como sigue.

$$\begin{aligned} [(6\,250 + 350) \div 2] + 520 &= [6\,600 \div 2] + 520 \\ &= 3\,300 + 520 \\ &= 3\,820 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Pedro le debía a su hermana \$ 3 820.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Resuelve las siguientes operaciones.
- $-\{-(28 \div 7) \cdot (44 \div 4)\}$
 - $(-7 + 4)^4 \div 3^2 - \sqrt{25} \cdot (-2)$
 - $9 + 3 \cdot \{32 \div 8 + 4 \cdot [2 \cdot (4 \div 4 + 1)]\} - 2$
 - $-5 - \{[(-3)^3 \div \sqrt{9}] - 12 \div (-2)^2\} + \sqrt{4^3}$
 - $[(-14 - 4) \div 2 + (-13 - 3) \div 4] + 9 \cdot 6 \div 18$
 - $(-8 + 3) \cdot 4 - 35 \div (-3 - 2) + 8 \cdot 6 \div 4$
- 3 Determina el punto de fusión de los siguientes elementos químicos (medidas dadas en grados Celsius).
- Hierro: $(2 \cdot 10^3) - 462$
 - Calcio: $(9 \cdot 10^2 - 13) - (9 \cdot 5)$
 - Cobre: $10^3 + (10 \cdot 9) - 7$
 - Azufre: $(2 \cdot 100) - 9^2 + (-4)$
 - Oro: $10^3 + (9 \cdot 8) - 8$

Razonamiento

- 4 Identifica el error de la operación y corrígela.
- $$\begin{aligned} 3 \cdot 9 - 5 + 48 \cdot 3 - 8 + 6 \cdot 2 \\ &= 27 - 5 + 144 - 8 + 6 \cdot 2 \\ &= 27 - 5 + 144 - 2 \cdot 2 \\ &= 27 - 5 + 144 - 4 = 162 \end{aligned}$$

Resolución de problemas

- 5 Laura y Lina han resuelto cada una la siguiente expresión: $5 + 3 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$. ¿Cuál de las dos la ha resuelto correctamente?

Laura	Lina
$5 + 3 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$	$5 + 3 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$
$8 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$	$5 + 12 + 10 - 6$
$32 + 10 - 2 \cdot 3$	$17 + 10 - 6$
$42 - 2 \cdot 3$	$27 - 6$
$40 - 3$	21
120	

- 6 Amanda recibe cierta cantidad de dinero, que se triplica con respecto a la cantidad recibida el día anterior. Si el primer día Amanda recibe \$ 10, ¿cuánto dinero recibirá al cabo de cinco días?
- 7 Andrea desea comprar un libro. Ella tiene \$ 12, su papá le duplicó esta cantidad, pero ella gastó \$ 2 con sus amigas. Luego, recibió la mitad de lo que tenía en ese momento su mamá. Si la mamá tenía en ese instante \$ 8, ¿cuánto dinero tiene Andrea para el libro?
- 8 Un autobús hace tres paradas: en la primera se suben trece personas, en la segunda se bajan siete y se suben nueve, y en la tercera se suben cinco pasajeros. ¿Cuántos pasajeros quedan después de la tercera parada?

Ejercitación

- a. 44
 - b. 19
 - c. 67
 - d. -10
 - e. 4
 - f. -1
- a. Hierro: 1538 °C
 - b. Calcio: 842 °C
 - c. Cobre: 1083 °C
 - d. Azufre: 115 °C
 - e. Oro: 1064 °C

Razonamiento

4. 170

Resolución de problemas

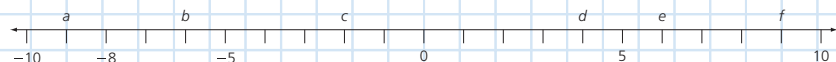
- Lina
- \$ 1 210
- \$ 26
- 20

UNIDAD 1

Evaluación sumativa

- Ordenando de mayor a menor -9, 15, 28, 11, -7, 0, -3, 5 la respuesta correcta es:
 A. -9, 28, 0, -3, 5, 15, 11, 7.
 B. 28, 15, 11, 5, 0 -3, -7, -9.
 C. 28, 15, 11, 0, 5, -9, -7, -3
 D. 15, 11, 28, -9, -7, -3, 5, 0

- Realiza lo que se indica en cada literal.
 A. ¿Qué números enteros están asociados con los puntos a, b, c, d, e y f, en la siguiente recta numérica?



- Utiliza la información de la siguiente tabla para hallar:

Volcanes en Ecuador	Altura en metros	Volcanes en Ecuador	Altura en metros
V. Altar	5 319 m	V. Cotopaxi	5 898 m
V. Carihuairaz	5 020 m	V. Cusin	4 012 m
V. Cerro del Callo	3 169 m	V. Cuicocha	3 377 m
V. Chimborazo	6 310 m	V. Mojanda	4 290 m

- La diferencia entre el volcán más alto y el más bajo de los registrados en la tabla.
- La diferencia entre el volcán Altar y el volcán Cusin.
- La diferencia entre el volcán Mojanda y el volcán Chimborazo
- La diferencia entre el volcán más bajo y volcán Cuicocha.

Nombre:

Grado: Fecha:

- Calcula aplicando propiedades de las igualdades.

A. $32 + 21 = 53$ Multiplica ambos miembros por 3

B. $25 + 5 = 30$ Divide ambos miembros por 5

C. $1 + 1 = 2$ Resta 2 a cada miembro

D. $15 \times 3 = 45$ Adiciona 5 a cada miembro.

- Realice las siguientes operaciones.

A. $25787 + 12556 + 13654$

B. $(158-79) \times (95-88) \times (16-9)$

C. $(129 - 34 + 19) \times (155 - 117)$

5. Escribe el signo $>$, $<$ o $=$ según corresponda a cada expresión.

A. $89 \boxed{} - 79$.

B. $45 \boxed{} - 17$

C. $-96 \boxed{} 63$

D. $124 \boxed{} 278$

E. $245 \boxed{} 245$

F. $-9678 \boxed{} 9678$

6. Calcule utilizando la definición.

A. $2^3 =$

B. $(-4)^2 =$

C. $(-5)^3 =$

7. Resuelve inecuación y representa el resultado en una semirrecta numérica.

$$7 \times p + 5 \leq 40$$

8. Resuelve el siguiente problema.

Al sustraer 16 a cierto número se obtiene 32. ¿Cuál es el número?

9. Resuelve cada inecuación y dibuja su solución sobre una semirrecta numérica.

A. $-7 > x$

B. $h - 15 > 10$

C. $m \times 5 \leq 15$

D. $p + 36 \geq 18 \times 3$

10. Resuelve la inecuación y representa su resultado en la semirrecta numérica.

$$y - 35 \geq 10$$

UNIDAD

2

Evaluación diagnóstica

Nombre:

Grado: Fecha:

1. Arturo y Miguel presentaron la evaluación de admisión para el colegio "Sucre". Si Arturo contestó bien quince de 18 preguntas y Miguel contestó ocho de doce preguntas, ¿cuál de los dos obtuvo mayor puntaje?

2. Se sabe que Andrés escribió únicamente números que corresponden a fracciones con denominador 10 y Camila escribió los que corresponden a fracciones con denominador 100. ¿Quién de los dos escribió más cifras?

A. Encierra con rojo los números decimales que escribió Camila y con azul los que escribió Andrés.

0,34	567,8	456,6	789,9
8,9	67,89	0,7	57,4
35,67	45	496,89	78,9

B. Halla las sumas de los números que escribió cada uno.

3. Representa los siguientes números en la recta numérica.

A. $4; 7; -8; 0; -3; \frac{4}{5}; \sqrt{25}; \sqrt{81}$

B. $\sqrt{16}; -23; 3; -8; 8; 9; 0; -9$

C. $14; -14; 16; -16; \frac{3}{6}; -\frac{2}{7};$

4. Los siguientes números $(-4; 5; 3,2; \frac{6}{7}; -\frac{1}{2}; 8; 0; 54; -2)$ ordenados de mayor a menor son:

A. $5; \frac{6}{7}; -\frac{1}{2}; 3,2; 8; 0; 54; -2; -4$

B. $54; 8; 5; 3,2; \frac{6}{7}; 0; -\frac{1}{2}; -2; -4$

C. $54; 8; \frac{6}{7}; 5; 3,2; 0; -4; -2; -\frac{1}{2}$

5. Si $(3x + 2) - (x - 4) = x + 12$, el valor de x es:

A. 5 B. 6

C. -7,2 D. 42

6. Al resolver $(-3) - (-10) + (-6,5) - (-2,4) - (-3)$, se obtiene:

A. 18,9 B. -18,9

C. 5,9 D. -17,3

7. Cuatro que comparten un apartamento compran una computadora de escritorio en \$ 952, un televisor en \$ 1000, una computadora portátil en \$ 756 y un refrigerador \$ 750. El monto total lo pagarán por partes iguales en 40 mensualidades. Cada amigo debe aportar mensualmente:

A. \$ 22,00

B. \$ 21,61

C. \$ 21,00

D. \$ 20,50

8. El resultado de la operación, $6 + 36 \div 6 + 5 - 6 \times 6 + 4 - 8,5$ es:

A. 10 B. 15,5

C. -23,5 D. 20

9. El resultado de la operación: $(4-7) \times (-3 + |-5+3| -1) \div (3,2 \times 1)$ es:

A. 3 B. 1,875

C. -2 D. -3

Propósito de la unidad

Bloque de álgebra y funciones

En esta unidad se abordarán los números racionales, donde los estudiantes aprenderán a reconocer las fracciones equivalentes e irreducibles, estudiarán los números decimales exactos y los decimales periódicos, estudiarán además la fracción generatriz de una expresión decimal exacta, de una expresión decimal periódica pura, y de una expresión decimal periódica mixta.

Estudiarán los números racionales y su aplicación en las cuatro operaciones de cálculo por ejemplo: utilizarán la adición y sustracción de números racionales en expresión fraccionaria, adición de números racionales en expresión decimal así como la multiplicación y división de números racionales en expresión fraccionaria y la multiplicación y división de números racionales en expresión decimal.

Se especificará el concepto del conjunto numérico de los números racionales sus propiedades y características, representarán los números racionales en la semirrecta numérica aplicando los nuevos conocimientos. Estudiarán el orden de los números enteros y el uso de los signos de agrupación para la resolución de problemas y ecuaciones utilizando además, las propiedades de la potenciación y radicación, resolverán las operaciones combinadas teniendo en cuenta la regla de los signos y aplicarán sus conocimientos en cuanto a la simplificación de los signos de agrupación.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar los conceptos en los que se pueden encontrar dificultades. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo que se proponen diferentes actividades para asegurar las bases para un excelente desarrollo, por parte del docente y comprensión por parte de los estudiantes. Se evaluarán temas correspondientes a los dominios numéricos ya que en la unidad se introducen los números enteros donde están incluidos los naturales.

Formativa

Para desarrollar las destrezas con criterios de desempeño, enfocado a los dominios numéricos, los niños deberán identificar cuando se está en presencia de los enteros negativos y los enteros positivos, se les evaluarán los conocimientos adquiridos para el trabajo con los signos, y la introducción de las igualdades, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita y de primer grado, resolverán las operaciones de cálculo atendiendo a las características de los temas evaluados.

Se les evaluarán los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas que conducen a ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita.

Sumativa

Para evidenciar si los niños desarrollaron las destrezas con criterio de desempeño propuestas en esta unidad se

evaluarán los temas impartidos mediante la misma con ejercicio sencillo e integradores donde los estudiantes serán capaces de aplicar los nuevos conocimientos y desarrollar las destrezas adquiridas sobre los temas evaluados.

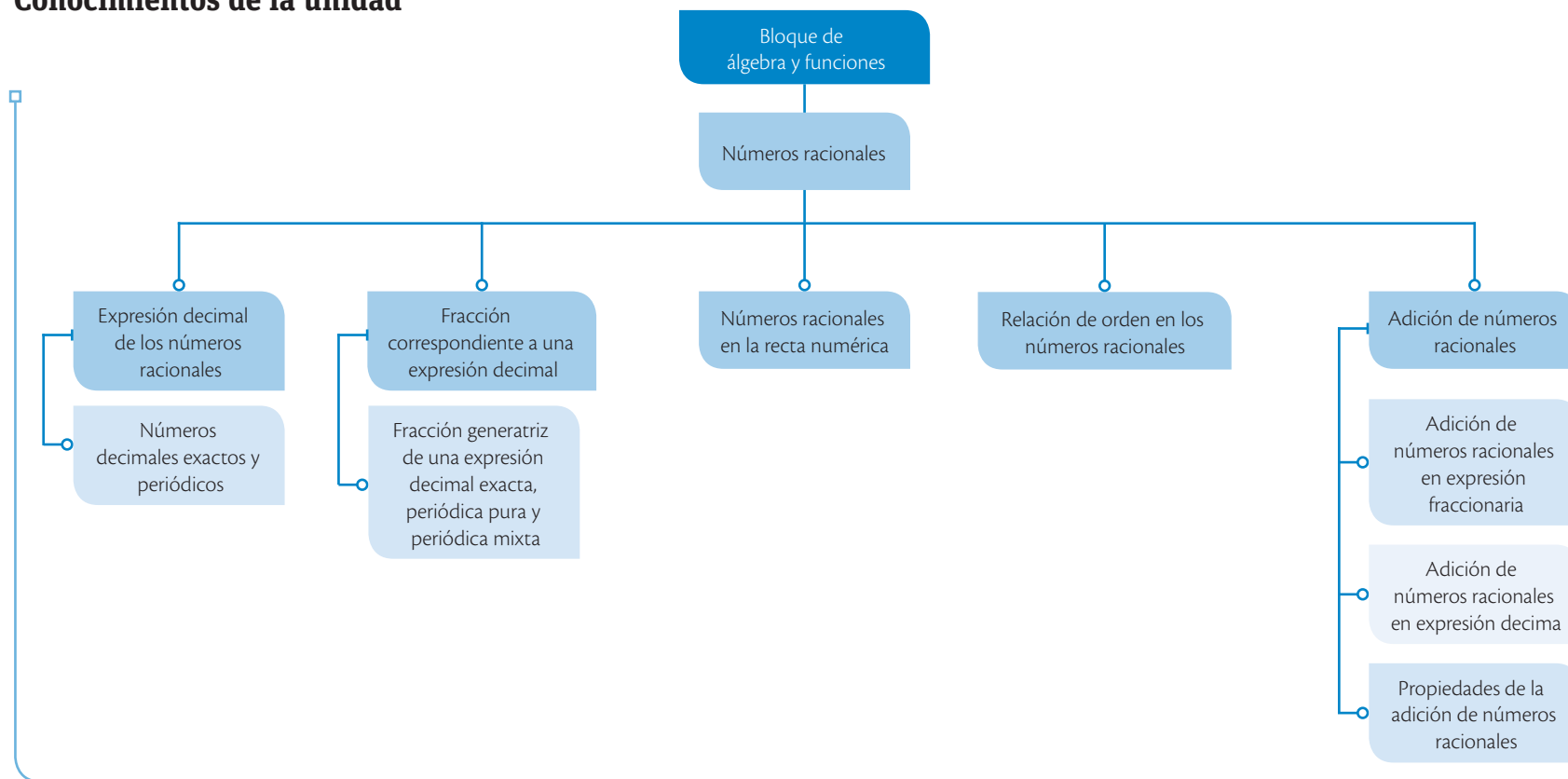
Respuestas

Evaluación diagnóstica

1. Arturo $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$; Miguel $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Arturo obtuvo mayor mayor puntaje: 0,8333333333
2. A. Verificar validez de la respuesta.
B. Camila $0,34 + 35,67 + 67,89 + 496,89 = 600,79$; Andrés $8,9 + 567,8 + 456,6 + 0,7 + 789,9 + 57,4 + 78,9 = 1960,2$
3. Verificar validez de la respuesta,
4. 54; 8; 5; 3,2; $\frac{6}{7}$; 0; $-\frac{1}{2}$; -2; -4
5. 6
6. 5,9
7. \$ 21,61
8. -23,5
9. 1,875

Esquema conceptual

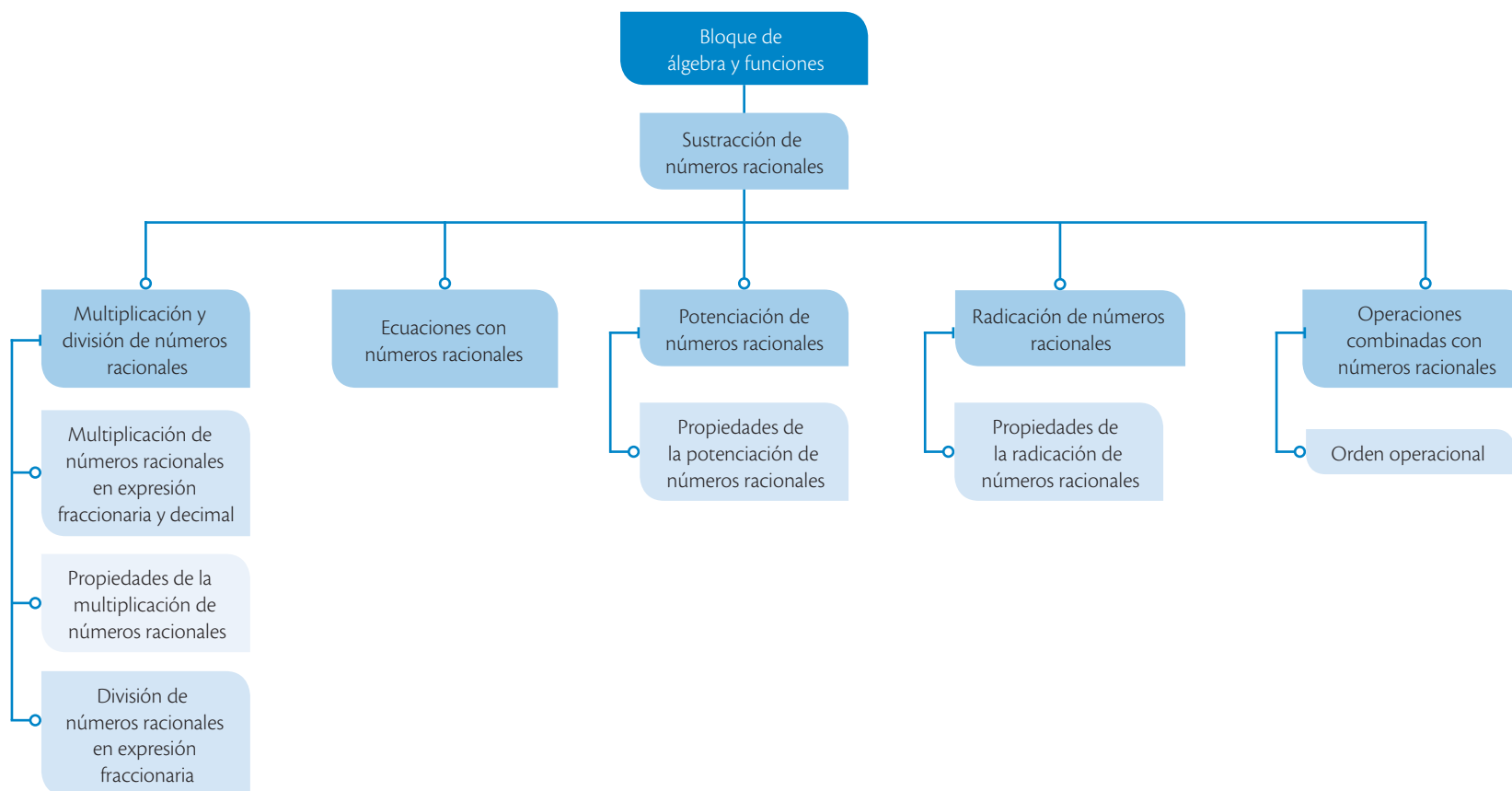
Conocimientos de la unidad



Cultura del Buen Vivir

■ Valor: La confianza

La confianza es la seguridad que alguien tiene en sí mismo, en otra persona o en algo.



■ Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad y la aplicación del nuevo conjunto numérico, los estudiantes se sentirán en confianza de resolver problemas donde los resultados de las operaciones no sean resultados exactos y ellos tengan la confianza que con la aplicación de este nuevo conjunto y la comprobación de la operación realizada esté correcta sin miedo a cometer errores. Además este nuevo contenido les servirá para aplicarlo en la vida práctica cuando tengan que encontrar alguna parte de un número y de ella conocer su resultado como expresión decimal.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 2: números racionales				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.1. – OG.M.6.		O.M.4.2.		
Objetivos de subnivel		Valores		
OI.4.1. – OI.4.12.		La confianza (I.2.),		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.1.		I.M.4.1.4.		
Objetivos de la unidad				
- Interpretar los números racionales mediante ejemplos seleccionados de la vida práctica para una mayor familiarización y aplicación de los mismos con el medio en que viven. - Resolver problemas que conduzcan a la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, en los números racionales, mediante el método deductivo a un nivel reproducido-aplicativo. - Aplicar los conocimientos adquiridos en el orden operacional en el conjunto de los números racionales, mediante la resolución de operaciones combinadas con y sin signos de agrupación.				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	- Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos. - Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción. - Representar y reconocer a los números racionales en la recta numérica. - Establecer relaciones de orden en el conjunto de números racionales utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$).	- Socialice con los estudiantes el concepto de conjunto. - Active el conocimiento sobre los conjuntos estudiados y sus características dentro de los racionales. - Converse con los estudiantes sobre el orden de la metodología para resolver una ecuación lineal con una incógnita en otros conjuntos estudiados; pregunte a los estudiantes: ¿Cómo resolver una ecuación en el conjunto de los números naturales, enteros y racionales?	- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números racionales. - Aplica las operaciones con números racionales en la resolución de problemas.	Actividad: resuelve problemas que conducen a la resolución de ecuaciones lineales con números racionales

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	- Operar en $\mathbb{Q}$ (adición) resolviendo ejercicios numéricos. - Operar en $\mathbb{Q}$ (sustracción) resolviendo ejercicios numéricos. - Operar en $\mathbb{Q}$ (multiplicación y división) resolviendo ejercicios numéricos. - Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{Q}$ en la solución de problemas sencillos. - Calcular potencias de números racionales con exponentes enteros. - Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos. - Realizar operaciones combinadas en $\mathbb{Q}$ atendiendo la jerarquía de la operación. - Aplicar las propiedades algebraicas para la suma y la multiplicación de números racionales en la solución de ejercicios numéricos.	- Haga alusión al algoritmo de solución y a la comprobación a realizar en otros conjuntos numéricos y aclare la necesidad de realizarla en el conjunto de los racionales. - Pídales que mencionen los pasos a seguir para resolver una ecuación lineal. - Pídales que mencionen los pasos a seguir para cuando están en presencia de un problema donde su resolución nos conlleve a una ecuación lineal. - Solicite a los estudiantes que resuelvan problemas que conducen a la aplicación de las ecuaciones lineales en el conjunto de los números racionales. Y pida que traigan para el próximo encuentro un problema con dichas características elaborados por ellos mismos en el conjunto de los números racionales.	- Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división, efectúa operaciones combinadas con números racionales. - Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.	Técnica: observación. Instrumento: registro descriptivo.

Recursos: Gráficas de diferentes funciones. Conjuntos numéricos estudiados. Pasteles. Naranjas. Frutas que se puedan representar como una parte del todo.

Bibliografía: Libro de texto matemática octavo grado. <http://html.rincondelvago.com/numeros-rationales.html>

http://www.vitutor.com/di/r/a_10.html

<http://definicion.de/numeros-rationales/>

<http://www.sangakoo.com/es/temas/expresion-decimal-de-numeros-rationales>

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Llamamos números racionales al conjunto formado por todos los números enteros y todos los fraccionarios, se le designa por Q y se lo denomina conjunto de los números racionales. Número racional es el que se puede expresar como cociente de dos números enteros, es decir, en forma de fracción. Los números enteros son racionales, pues se pueden expresar como cociente de ellos mismos por la unidad: $a = a/1$. Los números racionales no enteros se llaman fraccionarios. El conjunto de todos los números racionales se designa por Q .

Así como en el conjunto Z de los números enteros cada número tiene un siguiente (el siguiente al 7 es el 8, el siguiente al -5 es el -4), no pasa lo mismo con los racionales, pues entre cada dos números racionales existen infinitos números. $Q = \{m/n, m \in Z, n \in Z, n \neq 0\}$ Los números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse y el resultado es un número racional.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes que los números racionales sirven para expresar medidas, ya que al comparar una cantidad con su unidad el resultado es, frecuentemente, fraccionario. Explique que al expresar un número racional, no entero, en forma decimal se obtiene un número decimal exacto o bien un número decimal periódico.
- Muestre a los estudiantes que si la fracción es irreducible y en la descomposición factorial del denominador sólo se encuentran los factores 2 y 5, entonces la fracción es igual a un número decimal exacto, pero si en el denominador hay algún factor distinto de 2 o 5 la expresión decimal es periódica.

1

Números racionales

Explora

Dos buses escolares transportan cada uno 24 estudiantes. En el primero, $\frac{1}{4}$ de los pasajeros son niñas y en el segundo, $\frac{3}{12}$ lo son.

- ¿Qué se puede afirmar con respecto a la cantidad de niñas que se transportan en cada bus?

Ten en cuenta

- Para simplificar una fracción, se dividen tanto el numerador como el denominador por un divisor común a ambos.
- Cuando para simplificar se elige justo el máximo común divisor, la fracción que se obtiene es irreducible.

En la calculadora

Simplificar fracciones

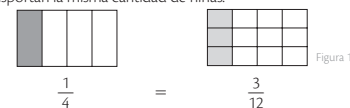
Para simplificar $\frac{24}{36}$ usando la calculadora, sigue esta secuencia.

2 4 = 3 6 EXE

- Simplifica las fracciones $\frac{54}{108}$ y $\frac{18}{54}$.

1.1 Fracciones equivalentes y fracciones irreducibles

Si en cada bus se hacen grupos de tal forma que en cada grupo haya el mismo número de estudiantes del mismo género, en el primero se pueden constituir cuatro grupos con seis estudiantes, en uno de los cuales solamente habrá niñas; entretanto, en el segundo grupo se pueden hacer doce grupos con dos estudiantes y en tres de ellos habrá solo niñas, para un total de seis niñas. Por consiguiente, ambos buses transportan la misma cantidad de niñas.



Se denominan **fracciones equivalentes** aquellas fracciones que representan la misma cantidad o parte del todo. En general, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$.

Ejemplo 1

Al simplificar la fracción $\frac{9}{27}$ se obtiene $\frac{1}{3}$, que es equivalente a la primera fracción.

Es decir, $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Se denominan **fracciones irreducibles** aquellas fracciones en las que el máximo común divisor entre el numerador y el denominador es 1; o, de otra forma, aquellas que están simplificadas al máximo.

Ejemplo 2

Para escribir fracciones irreducibles a $\frac{30}{45}$ y $\frac{48}{72}$, se halla el máximo común divisor del numerador y del denominador en cada caso.

Como m. c. d. $(30, 45) = 15$, entonces $\frac{30 \div 15}{45 \div 15} = \frac{2}{3}$.

Como m. c. d. $(48, 72) = 24$, entonces $\frac{48 \div 24}{72 \div 24} = \frac{2}{3}$.

Observa que en ambos casos se ha obtenido la misma fracción irreducible, así que $\frac{30}{45} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$.

1.2 El conjunto de los números racionales

Un **número racional** es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Se toma como representante de este número la fracción irreducible.

El **conjunto de los números racionales** (Q) está formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$, en donde a y b son números enteros y b es diferente de 0. Este conjunto contiene a los números enteros que, a su vez, contiene a los naturales, tal como se muestra en la Figura 2.

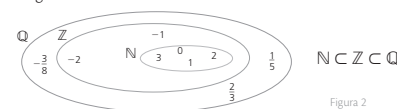


Figura 2

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos.

Para determinar el signo de un número racional, basta con observar los signos del numerador y del denominador: si son iguales, el racional es positivo; si no lo son, el racional es negativo.

Ejemplo 3

Los números racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{-8}{-13}$ son positivos, ya que tanto el numerador como el denominador tienen el mismo signo. En este caso, el racional $\frac{-8}{-13}$ se puede escribir simplemente como $\frac{8}{13}$.

Por su parte, los números racionales $\frac{7}{-15}$ y $\frac{-1}{3}$ son negativos, pues el numerador y el denominador tienen signos distintos. Estos racionales se pueden escribir como $-\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{3}$, respectivamente.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Leonardo consume $\frac{12}{4}$ de litro de agua a la semana. ¿Cuánta agua consume en un mes?

Solución:

Para averiguar la cantidad de litros de agua que consume Leonardo en una semana, primero se realiza la simplificación de la fracción $\frac{12}{4}$.

$$\frac{12}{4} = \frac{12 \div 4}{4 \div 4} = \frac{3}{1} = 3$$

Entonces, Leonardo consume tres litros de agua a la semana y $4 \cdot 3 = 12$ litros de agua al mes.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 2 Escribe cada expresión como un número racional.
- a. El numerador es el doble del denominador, que es 4.
 - b. El denominador es el triple del numerador disminuido en 2 y el numerador es el menor múltiplo de 5 diferente de 0.
 - c. El numerador es cuatro veces menor que el denominador, que corresponde al resultado de $8 \cdot 2$.
 - d. El denominador es la quinta parte de 25 y el numerador es el mínimo común múltiplo de 3 y 4.
 - e. El numerador es el cociente de dividir 8 entre 2, y su denominador es el primer múltiplo de 6 diferente de 0.

Ejercitación

- 3 Escribe tres números racionales equivalentes a cada racional dado.
- a. $\frac{2}{5}$ b. $-\frac{1}{7}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{9}{5}$ e. $-\frac{3}{2}$
- 4 Halla la fracción irreducible equivalente a cada número racional.
- a. $\frac{24}{48}$ b. $-\frac{18}{9}$ c. $\frac{16}{48}$ d. $\frac{3}{9}$ e. $-\frac{12}{36}$

Razonamiento

- 5 Clasifica cada número racional como positivo o negativo.
- a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{0}{-9}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{1}{7}$ e. $-\frac{5}{6}$
- 6 Identifica el número racional que no pertenece a cada conjunto de fracciones equivalentes.
- a. $\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{5}{20}, \frac{4}{16}, \frac{5}{15}\right\}$
- b. $\left\{\frac{12}{2}, \frac{24}{4}, \frac{36}{6}, \frac{46}{9}, \frac{60}{10}, \frac{72}{12}\right\}$
- 7 Completa cada equivalencia.
- a. $-\frac{4}{6} = -\frac{32}{\square}$ b. $-\frac{12}{11} = -\frac{\square}{44}$

Resolución de problemas

- 8 Un quinto de los 125 espectadores de una película salieron satisfechos. ¿Cuántos no salieron satisfechos?
- 9 En un hospital se atienden diariamente doce personas de la tercera edad por cada cuatro niños. ¿Cuántas personas de la tercera edad fueron atendidas en el mes, si durante ese tiempo se atendieron 120 niños?

Ten en cuenta

Para saber si un racional es positivo o negativo, se aplica la ley de los signos.

$$\begin{array}{ll} (+) = + & (-) = + \\ (+) = - & (-) = - \\ (-) = - & (+) = - \end{array}$$

Comunicación

2. a. $\frac{8}{4}$ b. $\frac{5}{13}$ c. $7\frac{4}{16}$ d. $\frac{12}{5}$ e. $\frac{4}{6}$

Ejercitación

3. a. $\frac{1}{2}$ b. $-\frac{2}{1} = -2$ c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{3}$ e. $-\frac{1}{3}$
4. a. $\frac{4}{10}, \frac{6}{15}$ y $\frac{8}{20}$ b. $-\frac{2}{14}, -\frac{3}{21}$ y $-\frac{4}{28}$
- c. $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ y $\frac{12}{18}$ d. $\frac{18}{10}, \frac{27}{15}$ y $\frac{36}{20}$
- e. $\frac{6}{4}, -\frac{9}{6}$ y $-\frac{12}{8}$

Razonamiento

5. a. Racional positivo.
- b. Ni positivo ni negativo, $\frac{0}{(-9)} = 0$.
- c. Racional positivo.
- d. Racional positivo.
- e. Racional negativo.

6. a. $\frac{5}{15}$ b. $\frac{46}{9}$

7. a. $-\frac{4}{6} = -\frac{32}{48}$ b. $-\frac{12}{11} = -\frac{48}{44}$

Resolución de problemas

8. 100 espectadores
9. Se atendieron 360 personas de la tercera edad.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Analice con los estudiantes que todo número racional puede expresarse en base decimal. Esta expresión es, por decirlo coloquialmente, lo que la mayoría de las personas entienden por un número con coma. Muestre brevemente con el siguiente ejemplo:

El número racional $1/2$ puede escribirse como 0,5. Y entonces leemos cero coma cinco en vez de un medio. Esta expresión es útil si nos estamos refiriendo, por ejemplo a un precio o longitud, donde es necesario hacerse una idea del valor del número racional.

b. Explique que esta expresión en base decimal no puede ser siempre exacta ya que por ejemplo $1/3=0,33333...$ y deberíamos escribir infinitos 3, lo que nos llevaría demasiado tiempo. En este caso se mostrará que el resultado es cero coma tres periódico. Siempre que digamos periódico nos referiremos a que el número debe ser repetido infinitas veces. Lo escribimos poniendo una barra encima del número periódico. En nuestro ejemplo $1/3 = 0,3$.

Muestre a los estudiantes que el período no tiene por qué involucrar todos los números detrás de la coma. El período también puede ser un número de más de una cifra. Por ejemplo: $1/55=0,018181818...=0,018\overline{18}$. En este caso el período es 18 y el cero no pertenece a él. Deberíamos leer cero coma cero con dieciocho periódico. Explique que dado un número con período podemos recuperar la expresión como cociente utilizando el procedimiento que aparece en el texto.

2

Expresión decimal de los números racionales

Explora

La profesora Andrea escribió en el tablero las siguientes expresiones:

$$\frac{8}{10}, \frac{10}{100} \text{ y } \frac{13}{1000}$$

• ¿Qué características tienen en común esas fracciones?

Ten en cuenta

Un número mixto está formado por un número entero y un número racional, por ejemplo: $2\frac{3}{5}$ o $-4\frac{1}{7}$.

Al observar las cantidades que escribió la profesora, se puede ver que cada denominador es una potencia de 10; es decir, son **fracciones decimales**.

Cuando se efectúan los cocientes indicados en cada caso, se obtiene 0,8; 0,1 y 0,013, los cuales se conocen como decimales exactos.

2.1 Números decimales exactos

Un **número decimal exacto** es aquel que tiene una cantidad finita de cifras decimales y corresponden a fracciones decimales o a fracciones equivalentes a una fracción decimal.

Ejemplo 1

A partir de las fracciones $\frac{1}{10}$, $\frac{45}{1000}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{16}$ se obtienen los decimales exactos 0,1; 0,045; 0,4 y 0,4375, en su orden.

Observa que $\frac{1}{10}$ y $\frac{45}{1000}$ tienen como denominador una potencia de 10, mientras que $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{16}$ se pueden amplificar por 2 y por 625, respectivamente, para obtener las fracciones decimales $\frac{4}{10}$ y $\frac{4375}{10000}$.

2.2 Números decimales periódicos

Un **número decimal periódico** es un número racional caracterizado por tener un **período** (cifras decimales que se repiten indefinidamente). Este período puede constar de una o varias cifras.

Ejemplo 2

El número racional $\frac{13}{3}$ es equivalente a un decimal en el que la cifra 3 se repite de manera indefinida. Para notar ese hecho se ubica un arco encima de dicha cifra.

$$\frac{13}{3} = 13 \div 3 = 4,3333... = 4,3\overline{3}$$

Ejemplo 3

Los números decimales $0,1314$; $0,2\overline{7}$ son periódicos. En el primero se repiten las cifras 1314 y en el segundo, el número 7.

Los números **decimales periódicos puros** son aquellos que presentan el período inmediatamente después de la coma, en tanto que en los **periódicos mixtos** el período no aparece inmediatamente después de esta.

Ejemplo 4

El número decimal $4,8$ es puro y su período es 8, mientras que $3,4\overline{672}$ es mixto, pues su período, que es 672, no aparece inmediatamente después de la coma. En este número la cifra decimal 4 que no se repite se denomina **anteperíodo**.

La Figura 1 resume la clasificación de los números racionales en su expresión decimal.

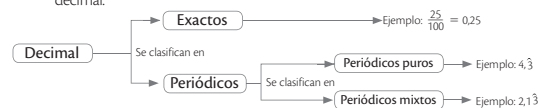


Figura 1

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Para cocinar una torta, María utilizará los ingredientes que se mencionan abajo. ¿Cuál bolsa contiene cada ingrediente?

- a. Harina: $\frac{3}{4}$ de kilogramo
b. Sal: $\frac{4}{10}$ de kilogramo
c. Mantequilla: $\frac{1}{8}$ de kilogramo
d. Azúcar: $\frac{1}{5}$ de kilogramo



Figura 2

Solución:

Se toma la fracción que indica la cantidad de cada ingrediente y se efectúa la división que corresponde para hallar su expresión decimal.

- a. Harina: $\frac{3}{4}$ de kilogramo $= 3 \div 4 = 0,75$ kilogramos
b. Sal: $\frac{4}{10}$ de kilogramo $= 4 \div 10 = 0,4$ kilogramos
c. Mantequilla: $\frac{1}{8}$ de kilogramo $= 1 \div 8 = 0,125$ kilogramos
d. Azúcar: $\frac{1}{5}$ de kilogramo $= 1 \div 5 = 0,2$ kilogramos

Así, la harina está en la última bolsa, la sal en la tercera, la mantequilla en la primera y el azúcar en la segunda.

Cálculo mental

Denominador 9, 99, 999, 9999...

Si el denominador de una fracción está compuesto por nueves, el número decimal correspondiente es periódico y su periodo tiene tantas cifras como nueves hay en el denominador.

$$\frac{2}{9} = 0,2\overline{2} \quad \frac{32}{999} = 0,032\overline{32}$$

• Expresa como número decimal los números racionales $\frac{12}{99}$ y $\frac{25}{999}$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Escribe la expresión decimal correspondiente a cada uno de los siguientes números racionales.

- a. $\frac{13}{5}$ b. $-\frac{13}{5}$ c. $\frac{5}{11}$
d. $-\frac{8}{12}$ e. $-\frac{63}{7}$ f. $\frac{11}{9}$
g. $-\frac{5}{10}$ h. $\frac{43}{1000}$ i. $\frac{121}{10}$
j. $-\frac{723}{100}$ k. $\frac{472}{100}$ l. $\frac{639}{1000}$

Razonamiento

- 3 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
• a. La expresión decimal de $\frac{150}{10}$ es 1,5. ()
b. $-3,45$ es la expresión decimal de $-\frac{345}{100}$. ()
c. $-\frac{32}{100}$ es equivalente a $-3,2$. ()
d. $45,6$ es la expresión decimal de $\frac{456}{10}$. ()

Comunicación

- 4 Relaciona cada fracción con su expresión decimal.

a. $\frac{1}{4}$	2
b. $\frac{8}{4}$	$0,1\overline{6}$
c. $\frac{1}{6}$	0,25

Resolución de problemas

- 5 Andrea, Natalia, Juan, Carlos y Fernanda desean ingresar a la "Casa encantada", a la cual pueden ingresar personas con al menos 1,60 metros de estatura. Decide cuáles de ellos pueden ingresar si sus estaturas son:
Andrea $\frac{3}{2}$ de metro, Natalia $\frac{5}{3}$ de metro, Juan $\frac{4}{2}$ de metro, Carlos $\frac{4}{3}$ de metro y Fernanda $\frac{9}{5}$ de metro.

Comunicación

2. a. 2,6 b. $-2,6$
c. $0,4\overline{5}$ d. $-0,6$
e. -9 f. $1,2$
g. $-0,5$ h. 0,043
i. 12,1 j. $-7,23$
k. 4,72 l. 0,639

Ejercitación

3. a. F b. V
c. F d. V

4. a. $\frac{1}{4}$ (0,25)
b. $\frac{8}{4}$ (2)
c. $\frac{1}{6}$ ($0,1\overline{6}$)

Razonamiento

5. Natalia, Juan y Fernanda

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- a. Explique a los estudiantes que como todo número racional puede escribirse como fracción, admite también una representación decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador entre el denominador. De esta forma se pueden comparar sus expresiones decimales. Por ejemplo $1/2$ tiene como expresión decimal 0,5 y $1/3 = 0,3333...$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \mid 2 \\ 0 \mid 0,5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ 0 \mid 2 \\ 2 \ 0 \mid 0,33 \\ 2 \end{array}$$

Esto da lugar a dos tipos de expresiones decimales, las de período cero y las de período diferente de cero.

- b. Muestre varios ejemplos para que se familiaricen con el tema, por ejemplo: $1/2 = 0,50$ representa una expresión decimal de período 0. Observe que el período es 0, pues después de la cifra 5 siguen infinitos ceros. $1/3 = 0,3$ representa una expresión decimal de período diferente de 0. El período es 3 y se puede representar escribiendo el número y una raya encima.
- c. Explique otro caso, analice y muestre otra expresión decimal por ejemplo: $1/7$. Al dividir uno por siete se obtiene 0,142857 donde el período es 142857. Siempre que el período sea distinto de cero estará formado por un número finito de cifras diferentes. Podríamos preguntarnos ¿si toda expresión decimal es un número Racional?
- d. Explique a los estudiantes que existen expresiones decimales no periódicas que no se pueden expresar en forma de fracción. Por ejemplo podemos construir el número 97,18312917..... donde las cifras decimales no se repiten nunca de la misma manera, es decir no hay una ley de formación.

3

Fracción correspondiente a una expresión decimal

Si en el recipiente se vierte agua hasta la marca 0,5, se habrá ocupado la mitad de su capacidad; así que $\frac{1}{2} = 0,5$.

Cuando se divide 1 entre 2, se obtiene 0,5. Por tanto, se dice que la fracción $\frac{1}{2}$ es equivalente al número decimal 0,5.

La **fracción generatriz** de un número decimal es una fracción en la que al dividir el numerador entre el denominador arroja como cociente ese número.

3.1 Fracción generatriz de una expresión decimal exacta

La **fracción generatriz** de un **decimal exacto** tiene como numerador el número sin decimales y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

Una vez obtenida la fracción generatriz, se simplifica si es posible.

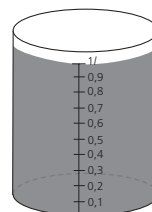


Figura 1

Ejemplo 1

Para hallar la fracción generatriz de 0,345 se sigue este procedimiento:

1. Se escribe el número sin decimales en el numerador.

$$0,345 = \frac{345}{1000}$$

2. Se escribe en el denominador la potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión decimal dada (en este caso, 3).

$$0,345 = \frac{345}{1000}$$

3. Se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

$$0,345 = \frac{345}{1000} = \frac{69}{200}$$

Entonces, la fracción generatriz de la expresión decimal 0,345 es $\frac{69}{200}$.

Ejemplo 2

Para hallar la fracción generatriz de 43,78 se procede así:

1. Se escribe como numerador la expresión dada pero sin coma.

$$43,78 = \frac{4378}{100}$$

2. Se escribe como denominador la potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión decimal dada.

$$43,78 = \frac{4378}{100}$$

3. Se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

$$43,78 = \frac{4378}{100} = \frac{2189}{50}$$

Así, la fracción generatriz de la expresión decimal 43,78 es $\frac{2189}{50}$.

En la calculadora

Fracción generatriz de un número decimal

En la calculadora puedes utilizar la tecla $\frac{\square}{\square}$ para calcular fracciones generatrices. Si quieres hallar la fracción generatriz de 1,8, digita la secuencia:

1 $\cdot$ 8 $\frac{\square}{\square}$ EXE $\frac{\square}{\square}$

- Comprueba con la calculadora los resultados obtenidos en los ejemplos 1 y 2.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

3.2 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura

La fracción generatriz de un decimal periódico puro cuya parte entera es 0, es una fracción que tiene como numerador el mismo periodo y como denominador tantos nueves como cifras decimales tiene el periodo.

Ejemplo 3

Para hallar la fracción generatriz del decimal puro $0,\overline{25}$ se procede así:

1. Como la parte entera del decimal es 0, se escribe en el numerador el periodo del decimal.

$$0,\overline{25} = \frac{25}{\square}$$

2. Se escriben tantos nueves en el denominador como cifras tiene el periodo.

$$0,\overline{25} = \frac{25}{99}$$

Por tanto, la fracción generatriz de $0,\overline{25}$ es $\frac{25}{99}$.

Ejemplo 4

Para determinar la fracción generatriz de $4,\overline{15}$ se siguen estos pasos:

1. Se escribe el número como la suma de la parte entera más la parte decimal.

$$4,\overline{15} = 4 + 0,\overline{15}$$

2. Se halla la fracción que corresponde a la parte decimal.

$$0,\overline{15} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

3. Se escribe el número mixto correspondiente y se expresa como una fracción impropia.

$$4 + \frac{5}{33} = 4\frac{5}{33} = \frac{137}{33}$$

Así, la fracción generatriz del número decimal $4,\overline{15}$ es $\frac{137}{33}$.

3.3 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta

La fracción generatriz de un decimal periódico mixto tiene como numerador las cifras hasta completar un periodo, menos las cifras hasta el anteperiodo, y como denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.

Ejemplo 5

Observa cómo se halla la fracción generatriz de $8,4\overline{13}$.

$$8,4\overline{13} = \frac{8,413 - 8,4}{990} = \frac{8,329}{990}$$

Por consiguiente, la fracción generatriz del número $8,4\overline{13}$ es $\frac{8,329}{990}$.

Ten en cuenta

Para expresar un número mixto como fracción, aplica los siguientes pasos:

- a. Multiplica el número entero por el denominador.
- b. Al resultado anterior, súmale el numerador.
- c. Construye la fracción escribiendo el resultado anterior como numerador y deja el mismo denominador.

$$\text{Ejemplo: } 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

CULTURA del Buen Vivir

La confianza

En matemáticas es importante confiar en los algoritmos establecidos a través del tiempo para resolver diversos problemas, por ejemplo, para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal. Así como debes confiar en tales operaciones, debes confiar en las normas o reglas que se han mantenido a través de los años en nuestra comunidad, colegio, ciudad o país.

- ¿En tu diario vivir, qué reglas o normas has asumido con total confianza para conservar una sana convivencia?

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida los estudiantes que demuestren lo que han aprendido y apliquen sus conocimientos en la resolución de los siguientes ejercicios:
 - a) Determina la fracción generatriz de las siguientes expresiones: $0,435$. Los estudiantes deben aplicar los métodos indicados por el docente; deben convertir esta expresión en una fracción equivalente a la misma, por ejemplo los estudiantes deben colocar en el denominador la potencia de 10 con tantos ceros como indiquen los lugares después de la coma quedando de la siguiente forma; $435/1000$ los estudiantes deben simplificar tanto como sea posible hasta obtener una fracción irreducible $87/200$ por tanto la fracción generatriz de la expresión $0,435$ es $87/200$.

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar las siguientes páginas web:

- <http://www.educ.ar/recursos/ver?id=14950>
- <http://gaussianos.com/expressar-un-numero-decimal-en-forma-de-fraccion/>

■ Actividades colaborativas

Proponga una actividad donde los estudiantes consoliden los conocimientos adquiridos sobre las expresiones decimales, mediante la elaboración de varios equipos y la participación de todos sus miembros. Elabore tarjetas con varias expresiones decimales para que los estudiantes en el pizarrón encuentren la fracción generatriz de todas las expresiones propuestas por el docente.

Comunicación

2. Respuesta abierta 3. Respuesta abierta
4. Respuesta abierta

Ejercitación

5. a. Número decimal periódico puro, $\frac{3269}{99}$
 b. Número decimal periódico puro, $\frac{1000}{999}$
 c. Número decimal exacto, $\frac{324}{1000}$
 d. Número decimal exacto, $\frac{329923}{1000}$
 e. Número decimal periódico puro, $\frac{40}{9}$
 f. Número decimal exacto, $\frac{23010}{1000}$
 g. Número decimal periódico puro, $\frac{240}{9}$
 h. Número decimal exacto, $\frac{963}{1000}$
 i. Número decimal periódico puro, 1
 j. Número decimal exacto, $\frac{1202}{100}$
 k. Número decimal periódico puro, $\frac{253}{9}$
 l. Número decimal exacto, $\frac{1752}{100}$

Comunicación

6. a. $\frac{304}{100}$; $\frac{3004}{1000}$; $\frac{3044}{1000}$; $\frac{30404}{10000}$
 b. $\frac{9690069}{10000}$; $\frac{696096}{1000}$; $\frac{69906}{100}$
 c. $\frac{123663}{1000}$; $\frac{1236663}{10000}$; $\frac{12366663}{100000}$
 d. $\frac{321091}{9999}$; $\frac{317912}{9900}$; $\frac{320802}{9990}$
 e. $\frac{10091}{999}$; $\frac{10101}{1000}$; $\frac{9091}{900}$

7. a. F b. V c. F

3

Fracción correspondiente a una expresión decimal

Actividad resuelta

Razonamiento

- 1 Relaciona cada número decimal con la fracción generatriz que le corresponde.

- | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| a. 0,55 | b. 2,38 | c. 1,45 | d. 0,39 |
| () $\frac{13}{33}$ | () $\frac{119}{50}$ | () $\frac{11}{20}$ | () $\frac{16}{11}$ |

Solución:

- | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| a. 0,55 | b. 2,38 | c. 1,45 | d. 0,39 |
| (d) $\frac{13}{33}$ | (b) $\frac{119}{50}$ | (a) $\frac{11}{20}$ | (c) $\frac{16}{11}$ |

Matemáticas

Halla expresiones decimales con la calculadora científica

Cuando se usa la calculadora para hallar la expresión decimal de un número racional, es necesario tener presente que esta mostrará una cantidad determinada de dígitos después de la coma (esto depende del modelo de la calculadora).

Para hallar la expresión decimal del número racional $\frac{1}{11}$, se digita la secuencia:

1 ÷ 11 =

El resultado con diez cifras decimales aparece en la pantalla así:

1 ÷ 11
0.0909090909

El periodo en este caso es 09, así que la forma de expresar el número decimal es $0,0\overline{9}$.

Para convertir $-\frac{12}{11}$ a expresión decimal, se digita:

- 1 2 ÷ 1 1 =

El resultado que muestra la calculadora en la pantalla es:

-12 ÷ 11
-1.09090909091

Como se observa, aparece el número 1 al final. Esto no significa que el periodo ha cambiado, sino que la calculadora ha redondeado el valor. Por tanto, la forma de expresarlo es $-1,0\overline{9}$.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 2 Explica qué entiendes por periodo en los números decimales. Escribe cinco ejemplos.
- 3 Explica qué es una fracción generatriz. Escribe tres ejemplos.
- 4 Señala la diferencia entre números decimales puros y números decimales mixtos.

Ejercitación

- 5 Clasifica las siguientes expresiones decimales y determina la fracción generatriz correspondiente.

- | | | |
|-----------------------|----------|-----------|
| a. 33,02 | b. 1,001 | c. 0,324 |
| d. 329,923 | e. 4,4 | f. 23,010 |
| g. $-0,3\overline{9}$ | h. 0,963 | i. 0,9 |
| j. 12,02 | k. 28,1 | l. 17,52 |

- 6 Halla la fracción generatriz de cada una de las expresiones decimales.

- a. 3,04; 3,004; 3,044 y 3,0404
- b. 969,0069; 696,096 y 699,06
- c. 123,663; 123,6663; 123,66663
- d. 32,1123; 32,1123; 32,1123
- e. 10,101; 10,101; 10,101

- 7 Indica si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- a. La fracción generatriz de $3,4$ es $\frac{3}{4}$. ()
- b. $\frac{183}{25}$ es la fracción generatriz de 7,32. ()
- c. La fracción generatriz de $-7,2\overline{7}$ es $-\frac{727}{100}$. ()

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Razonamiento

8. Halla la fracción generatriz del número decimal 0,5 y luego fracciones equivalentes a esta que satisfagan la condición enunciada en cada caso.
- Una cuyo denominador sea 8.
 - Una que tenga como numerador el número 15.
 - Una cuyo numerador sea 36.
 - Una que tenga un número primo como numerador.
 - Una en la que la suma del numerador y el denominador sea 120.
9. Halla la fracción generatriz del número decimal 0,75. Luego, escribe fracciones equivalentes a esta que cumplan las condiciones que se citan en cada caso.
- Una cuyo numerador y denominador sean negativos.
 - Una con numerador 9.
 - Una en la que la suma del numerador y el denominador sea 14.
 - Una cuyo denominador sea una potencia de 10.
 - Una que tenga como denominador el número 28.
10. Determina si los siguientes números son iguales o no. Justifica tus respuestas.
- $66,1\overline{96}$ y $66,1\overline{9}$
 - $3,14\overline{7}$ y $3,14\overline{74}$
 - $21,12\overline{1}$ y $21,12\overline{121}$
 - $5,3\overline{2}$ y $5,3\overline{22}$
 - $4,1\overline{8}$ y $4,1\overline{8}$

Modelación

11. Colorea el cuadrado de la Figura 2 como se indica.

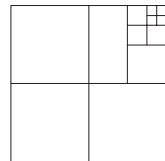


Figura 2

- Con azul 0,5 del cuadrado.
- Con verde 0,125 del cuadrado.
- Con amarillo 0,046875 del cuadrado.
- Con morado 0,0625 del cuadrado.
- Con rojo 0,25 del cuadrado.

12. Colorea el círculo de la Figura 3 según las indicaciones.
- 0,3 con azul
 - 0,16 con verde
 - 0,083 con amarillo

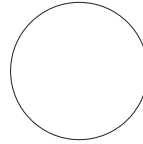


Figura 3

13. Estima la fracción del círculo que quedó sin colorear en la actividad anterior y escríbela en su expresión decimal.

14. Observa en la Figura 4 cómo Mario coloreó con azul dos de las tres partes en las que dividió un círculo. ¿Se puede afirmar que él coloreó aproximadamente 0,6 del círculo?

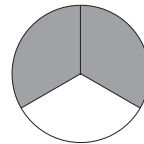


Figura 4

Resolución de problemas

15. Un análisis químico indicó que $\frac{4}{7}$ mL de una sustancia era gasolina, mientras que un segundo estudio concluyó que 0,572 mL de la sustancia correspondía a ese combustible. ¿Cuál de los dos análisis mostró mayor cantidad de gasolina? Justifica tu respuesta.
16. $\frac{3}{7}$ de los estudiantes del curso 7A son hombres y en 7B la expresión decimal de los estudiantes de ese género es 0,4. Si ambos cursos tienen la misma cantidad de estudiantes, ¿cuál curso tiene más hombres? Justifica tu respuesta.
17. Un libro de ciencias indica que $\frac{7}{10}$ de la superficie de la Tierra está cubierta por agua, mientras que en una enciclopedia se lee que 0,71 del planeta está cubierto por ese líquido. Según estudios oficiales, el 70 % del planeta está cubierto por agua. Con base en la información de los estudios oficiales, indica cuál de los dos textos (el de ciencias o la enciclopedia) brinda la información más cercana a la realidad.



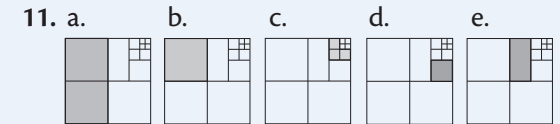
SM Ediciones

Razonamiento

8. Fracción generatriz: $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$
 - $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$
 - $\frac{1}{2} = \frac{36}{72}$
 - $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
 - $\frac{1}{2} = \frac{40}{80}$
9. Fracción generatriz: $\frac{3}{4}$
- $\frac{3}{4} = \frac{-6}{-8}$
 - $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$
 - $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$
 - $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$
 - $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$

Razonamiento

10. a. No b. No c. Sí d. Sí e. No



12. Verificar validez de la respuesta.

13. $\frac{5}{12} = 0,41\overline{6}$

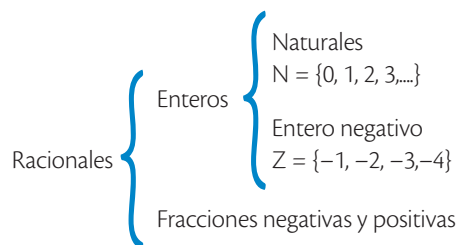
14. Sí se puede afirmar. Verificar validez.

Resolución de problemas

15. El segundo análisis, porque $0,572 > \frac{4}{7}$.
16. El curso 7A tiene más hombres, porque $\frac{3}{7} > 0,4$.
17. El libro de ciencias brinda información más cercana a la realidad.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes los conjuntos numéricos estudiados y su representación en la recta numérica ya fuesen enteros positivos, ubicándose a la derecha del cero, o los enteros negativos a la izquierda del cero. Muestre a los estudiantes que los conjuntos numéricos estudiados hasta el momento son subconjunto de los números racionales y que esa relación se puede representar.
- Proponga a los estudiantes ejemplos sencillos donde apliquen los conocimientos adquiridos de los conjuntos numéricos estudiados y proponga que los ubiquen en la recta numérica; por ejemplo: pídale que ubiquen en la recta numérica los números 16; -16; 3; -3; 7; -7; 10; -10 y 0.
- Analice el orden en que los estudiantes representaron los números naturales y enteros en la recta ahora introduzca los números racionales de forma sencilla para que los estudiantes asimilen el procedimiento, por ejemplo pídale que representen las siguientes fracciones: $5/2$; $5/5$; $-4/7$; $8/3$; 0; $-9/10$; $-3/2$; $5/3$; $-5/3$.



Números racionales en la recta numérica

Explora

En la Figura 1 se observa el peso de cinco costales

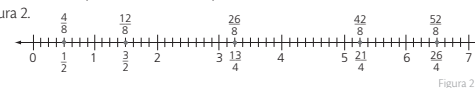


• ¿Cómo podría representarse en la recta numérica el peso de cada costal?

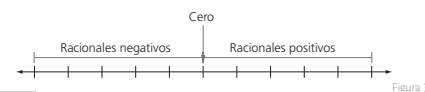
Para representar el peso de cada costal en la recta numérica, primero se debe expresar cada peso en fracciones con el mismo denominador.

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \quad \frac{3}{2} = \frac{12}{8} \quad \frac{13}{4} = \frac{26}{8} \quad \frac{21}{4} = \frac{42}{8} \quad \frac{26}{4} = \frac{52}{8}$$

Posteriormente, se divide cada unidad de la recta según lo que indica el denominador (ocho partes iguales) y se toman tantas partes como indique el numerador. La representación de los pesos en la recta numérica se observa en la Figura 2.

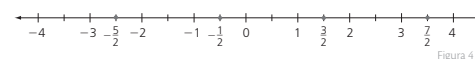


Los números racionales se ubican en la **recta numérica** tanto a la izquierda como a la derecha del 0. A la derecha se hallan los racionales positivos y a la izquierda los racionales negativos.



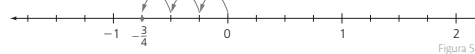
Ejemplo 1

Si se divide en dos partes iguales cada segmento unidad en la recta numérica, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tenga como denominador 2. En la recta numérica de la Figura 4 se observa la representación de los números racionales $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$.



Ejemplo 2

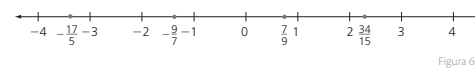
De igual manera, si se divide en cuatro partes iguales cada segmento unidad en la recta, se pueden ubicar los números racionales cuya representación fraccionaria tenga como denominador 4. Observa cómo se ha ubicado $-\frac{3}{4}$ sobre la recta numérica de la Figura 5.



También se pueden representar los números racionales en la recta numérica considerando su expresión decimal y ubicando estos decimales en forma aproximada en la recta.

Ejemplo 3

Para representar los racionales $\frac{7}{9}$, $\frac{34}{15}$, $-\frac{9}{7}$ y $-\frac{17}{5}$, se pueden hallar sus expresiones decimales (0,7; 2,26; -1,285714 y -3,4, respectivamente) y ubicar de manera aproximada cada punto sobre la recta (Figura 6).



Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales en la recta numérica.

Actividad resuelta

Razonamiento

- 1 Relaciona cada punto de la recta numérica de la Figura 7 con el número racional que le corresponde.

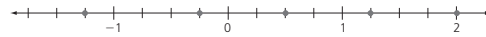


Figura 7

- a. $\frac{2}{1}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{4}$ d. $-\frac{1}{4}$ e. $-1\frac{1}{4}$

Solución:

En este caso, conviene expresar cada número racional con una fracción cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores.

- a. $\frac{8}{4}$ b. $\frac{2}{4}$ c. $\frac{5}{4}$ d. $-\frac{1}{4}$ e. $-\frac{5}{4}$

Luego, se ubican los puntos correspondientes a cada número racional tal como se muestra en la Figura 8.



Figura 8

TECNOLOGÍAS
de la comunicación

https://es.khanacademy.org/math/arithmetic/fractions/mixed_numbers/el/fractions_on_the_number_line_3
Representa números racionales en la recta numérica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Representa en la recta numérica cada número racional.

- a. $\frac{3}{5}$ b. $-\frac{4}{2}$ c. $-\frac{6}{4}$
d. $\frac{7}{3}$ e. $\frac{2}{8}$ f. $-\frac{3}{7}$

Razonamiento

- 3 Califica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

- a. El número racional $-\frac{11}{3}$ se ubica en la recta entre -3 y -4 . V
b. En la recta, el número racional $\frac{27}{9}$ coincide con el número 3. V
c. El número mixto $8\frac{4}{5}$ se ubica en la recta entre 8 y 9. V
d. El número racional $-\frac{13}{5}$ se ubica en la recta a la derecha de -2 . F
e. En la recta, el número racional $\frac{24}{6}$ coincide con el número -4 . F
f. En la recta, el número racional $\frac{8}{2}$ coincide con el número 5. F
g. El número racional $-\frac{11}{5}$ se ubica en la recta entre -1 y -2 . F

- 4 Encierra con un círculo azul los números que se ubican en la recta numérica a la derecha del 0 y con un círculo verde, los que se sitúan a su izquierda.

- a. $-\frac{13}{10}$ b. $\frac{5}{10}$ c. $\frac{3}{9}$
d. $-\frac{9}{3}$ e. $-\frac{7}{35}$ f. $\frac{23}{7}$

Resolución de problemas

- 5 Para facilitar la ubicación de las pesas del laboratorio, se ha decidido organizarlas de la más pesada a la más liviana.

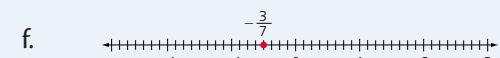
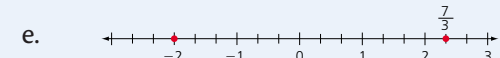
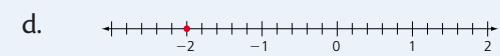
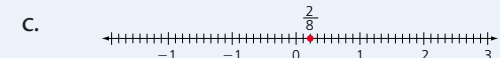
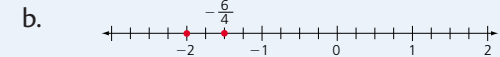
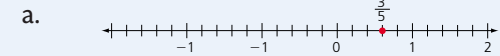


Figura 9

- a. Representa en una recta numérica los pesos indicados en la Figura 9.
b. Escribe la expresión decimal correspondiente a cada uno de los pesos.
c. Expresa en gramos cada uno de los pesos, sabiendo que 1 kilogramo equivale a 1 000 gramos.

Ejercitación

2.



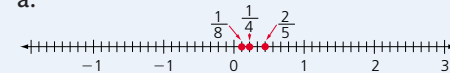
3. a. V b. V c. V
d. F e. F f. F
g. F h. V

Comunicación

4. Verificar validez de la respuesta

Resolución de problemas

5. a.



- b. 1; 0,4; 0,25; 0,1254, respectivamente.
c. 1 000, 400, 250 y 125, respectivamente.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes los criterios sobre los números racionales y la relación de orden que se debe establecer para su representación, por ejemplo, en una recta numérica.
- Determine con los estudiantes los criterios que se deben tener en cuenta para establecer el orden de varias fracciones y a su vez representarlas en una recta numérica, por ejemplo:
Muéstreles que en toda fracción donde sus denominadores sean iguales es mayor la que tiene mayor denominador, es recomendable demostrárselo como expresión decimal, por ejemplo:

$$\frac{6}{8} > \frac{3}{8};$$

Como expresión decimal donde $\frac{6}{8} = 0,75$ y $\frac{3}{8} = 0,375$ por tanto el resultado de la división de la primera fracción, donde el primer numerador es mayor que el segundo numerador con los denominadores iguales, es mayor que el resultado de la segunda división queda demostrado de la siguiente forma $0,75 > 0,375$. Por lo que queda demostrado el criterio de denominadores iguales en las fracciones positivas.

- Aplique ejemplos similares para demostrar cada uno de los criterios que aparecen en el libro de texto, por ejemplo plantee a los estudiantes que: si dos números racionales (fracciones) positivos tiene iguales numeradores es mayor el que tiene menor denominador proponga ejemplos para socializar el criterio. Por ejemplo $5/9$ y $5/11$ por el criterio ya los estudiantes deducen que $5/9$ es mayor pero es recomendable llevarlas a expresiones decimales.

5

Relación de orden en los números racionales

Explora

El profesor Camilo preguntó a sus 32 estudiantes acerca de su deporte favorito y anotó la fracción de los que eligieron cada deporte en la Tabla 1.

Deporte	Fracción
Fútbol	$\frac{4}{16}$
Natación	$\frac{3}{8}$
Tenis	$\frac{1}{4}$
Béisbol	$\frac{4}{32}$

Tabla 1

- ¿Cuál es el orden de popularidad de los deportes?

Ten en cuenta

$\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, ya que $\frac{3}{5}$ está a la izquierda de $\frac{4}{5}$, pero $-\frac{3}{5} > -\frac{4}{5}$ porque $-\frac{3}{5}$ está a la derecha de $-\frac{4}{5}$.

De manera análoga:

$\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$, pero $-\frac{3}{7} > -\frac{3}{4}$.

En resumen: al comparar dos números racionales, el menor es el que está a la izquierda del otro, cuando se los ubica en la recta numérica.

Para responder la pregunta, se puede construir una recta numérica como la de la Figura 1 y ubicar en ella cada fracción. El orden de mayor a menor preferencia corresponde a las fracciones ubicadas de derecha a izquierda.

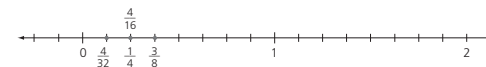


Figura 1

De acuerdo con el criterio indicado, el orden de los deportes desde el de mayor aceptación al menos popular es: primero natación, luego tenis y fútbol (con el mismo grado de aceptación), y por último, béisbol.

Dados los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se verifica una y solo una de las siguientes relaciones: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Para comparar dos números racionales, se deben tener en cuenta varios criterios:

- Todo número racional positivo es mayor que cualquier racional negativo.
- Todo número racional negativo es menor que 0.
- Si dos números racionales positivos tienen igual denominador, es menor el que tiene menor numerador.

Por ejemplo: $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$

- Si dos números racionales positivos tienen el mismo numerador, es menor el que tiene mayor denominador.

Por ejemplo: $\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$

- Si dos números racionales tienen distinto denominador, se debe buscar una fracción equivalente a cada una de las fracciones dadas, con el mismo denominador, y compararlas teniendo en cuenta los criterios anteriores.

Ejemplo 1

Para comparar los números racionales $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{9}$ se pueden seguir estos pasos:

- Se encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores; esto es, 90.
- Se amplifican las fracciones para expresarlas con denominador 90.

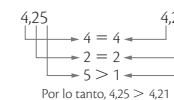
$$\frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 9}{10 \cdot 9} = \frac{27}{90} \text{ y } \frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{10}{90}$$

$$\text{Como } \frac{10}{90} < \frac{27}{90}, \text{ entonces } \frac{1}{9} < \frac{3}{10}.$$

Si se quiere comparar dos números racionales escritos en su forma decimal, se pueden hallar sus fracciones generatrices y proceder a compararlas de acuerdo con alguno de los criterios mencionados. También se pueden ubicar sobre la recta numérica, o bien, se pueden comparar sus partes enteras y decimales hasta donde difieran.

Ejemplo 2

Para comparar las expresiones decimales 4,25 y 4,21, se comparan sus cifras de izquierda a derecha hasta donde sea necesario.



Por lo tanto, $4,25 > 4,21$

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en el conjunto de números racionales utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=$, $<$, $>$, $>=$, $<=$).

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 En una competencia de patinaje, los tres competidores que se disputaban el paso a la final registraron los siguientes tiempos: Juan $\frac{3}{4}$ de hora, Camilo $\frac{1}{2}$ de hora y Fernando $\frac{8}{15}$ de hora. ¿Cuál de los tres llegó en primer lugar?

Solución:

Para resolver el problema, se amplifican las fracciones correspondientes a los tiempos de los competidores para obtener fracciones homogéneas con denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores que es 60.

$$\text{Así, } \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{45}{60}, \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 30}{2 \cdot 30} = \frac{30}{60}, \frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{32}{60}.$$

Luego, se escoge la menor de todas las fracciones obtenidas, que es $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, ya que corresponde al menor de los tiempos. De esta forma, Camilo fue quien llegó en primer lugar por haber gastado el menor tiempo.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Escribe $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

- a. $\frac{7}{5}$ $\frac{8}{3}$ b. $\frac{5}{4}$ $\frac{10}{8}$
c. $2\frac{3}{2}$ $2\frac{7}{4}$ d. $\frac{1}{3}$ $2\frac{1}{3}$
e. $3\frac{1}{2}$ $2\frac{5}{4}$ f. $\frac{2}{3}$ $2\frac{1}{3}$

- 3 Ordena de menor a mayor los números racionales de cada lista.

- a. $\frac{3}{5}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$
b. $2\frac{5}{6}, \frac{13}{10}, 2\frac{1}{5}, \frac{10}{10}$
c. $\frac{22}{42}, -\frac{4}{14}, -\frac{8}{30}, \frac{14}{18}$
d. $\frac{39}{21}, \frac{75}{24}, \frac{27}{15}, \frac{9}{12}$

Razonamiento

- 4 Escribe un número natural en cada espacio vacío, de tal forma que se satisfaga la desigualdad correspondiente.

- a. $2\frac{1}{4} < 2\frac{\square}{\square}$ b. $\frac{\square}{5} < \frac{4}{10}$
c. $\frac{3}{\square} > \frac{1}{2}$ d. $2\frac{2}{4} > \frac{\square}{5}$

Ejercitación

- 5 Ordena de menor a mayor cada grupo de números.

- a. 0,5; -0,5; 1,75; 4,55; 4,5; 4,5; 0
b. 1,2; 1,2; 1,07; 1,7; 3,3; -5,6
c. $\frac{3}{5}$; 0,6; 0,63; -0,6; -0,66

Resolución de problemas

- 6 Responde las preguntas a partir de la información de la Tabla 2.

Alimento	Cantidad aproximada de calorías
Papas fritas	$\frac{127}{450}$
Gaseosa personal	$\frac{230}{550}$
Porción de pizza	$\frac{30}{75}$
Hamburguesa	$\frac{120}{80}$

Tabla 2

- a. ¿Cuál es el alimento que tiene menos calorías?
b. ¿Cuál es el alimento con mayor cantidad de calorías?
c. Entre la hamburguesa y la porción de pizza, ¿cuál tiene más calorías?
d. ¿Qué combinación tiene menos calorías, la gaseosa y las papas fritas o la gaseosa y la porción de pizza?

- 7 Para el diseño hidráulico de un edificio, el ingeniero utilizará tubería de tres diámetros diferentes: tubería tipo A, de media pulgada; tubería tipo B, de tres octavos de pulgada, y tubería tipo C, de tres cuartos de pulgada. ¿Cuál es el orden de menor a mayor de los tres tipos de tubería, de acuerdo con la magnitud de su diámetro?

Ejercitación

2. a. $<$ b. $=$ c. $<$
d. $<$ e. $>$ f. $<$

3. a. $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}$
b. $\frac{10}{10}, \frac{13}{10}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{5}{5}$
c. $-\frac{4}{14}, -\frac{8}{30}, \frac{22}{42}, \frac{14}{18}$
d. $\frac{9}{12}, \frac{27}{15}, \frac{39}{21}, \frac{75}{24}$

Razonamiento

4. a. $2\frac{1}{4} < 2\frac{6}{11}$ b. $\frac{1}{5} < \frac{4}{10}$
c. $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ d. $2\frac{2}{4} > \frac{9}{5}$
5. a. -0,5; 0; 0,5; 1,75; 4,5; 4,55; 4,5
b. -5,6; 1,07; 1,2; 1,2; 1,7; 3,3.
c. $-0,\overline{66}$; $-0,\overline{6}$; $\frac{3}{5}$; $0,\overline{6}$; $0,\overline{63}$

Resolución de problemas

6. a. Papas fritas b. Hamburguesa
c. Hamburguesa d. Gaseosa y papas fritas
7. Tubería B, tubería A y tubería C.

Recomendaciones para desarrollar la lección

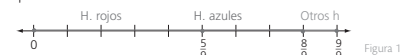
- Socialice con los estudiantes las propiedades para realizar la suma de los números naturales y enteros como método de aseguramiento del nivel de partida para introducir dichas propiedades en la adición de los números racionales.
- Analice cada propiedad con ejemplos sencillos de forma que los estudiantes se familiaricen con la operación de adición en el conjunto de los racionales y las interioricen para luego aplicarlas y obtener los resultados esperados al concluir cada ejercicio.
- Explique a los estudiantes el algoritmo para resolver una adición de números racionales, cuando están en presencia de una expresión fraccionaria. Indique a los estudiantes la necesidad de interpretar e interiorizar las propiedades de la adición de números racionales para aplicarlas en la solución de las sumas de fracciones para cada ejemplo planteado por el docente.
- Explique a los estudiantes el algoritmo para resolver las adiciones con números racionales en expresión decimal. Enfatice con los estudiantes que para realizar la adición con expresiones decimales deben colocar coma debajo de coma, parte entera debajo de parte entera y parte decimal debajo de la parte decimal. Se recomienda siempre a los estudiantes que la suma se realice en forma vertical para poder ubicar cada parte del número correctamente.

Adición de números racionales

6.1 Adición de números racionales en expresión fraccionaria

Para saber qué parte del estadio estuvo ocupada, se puede hacer uso de una recta numérica como la de la Figura 1. Primero, se divide la unidad en nueve partes iguales; luego, se ubica el punto que corresponde a $\frac{5}{9}$; a partir de este punto se cuentan $\frac{3}{9}$ más y se llega a $\frac{8}{9}$. Por último, a partir de $\frac{8}{9}$ se avanza $\frac{1}{9}$ más y se llega a 1.

Como $\frac{9}{9}$ corresponde a la ocupación total, significa que los hinchas de los tres equipos ocuparon todo el estadio.



Para sumar dos números racionales con el mismo denominador, se suman los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Ejemplo 1

Para calcular $\frac{1}{5} + \frac{6}{5}$ se procede así:

1. Se suman los numeradores y el resultado es el numerador de la fracción suma.

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1+6}{5} = \frac{7}{5}$$

2. Se deja el mismo denominador, que será el denominador de la fracción suma.

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1+6}{5} = \frac{7}{5}$$

Para sumar dos números racionales con diferente denominador, se buscan fracciones equivalentes a los números racionales dados, que tengan el mismo denominador; luego se adicionan las fracciones equivalentes obtenidas como en el caso anterior.

Ejemplo 2

Para resolver la suma $\left(-\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{3}$ se sigue este procedimiento:

1. Se hallan racionales equivalentes a los dados, cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores, que en este caso es 24.

$$-\frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 3} = -\frac{6}{24} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$$

2. Se suman las fracciones obtenidas.

$$\left(-\frac{6}{24}\right) + \frac{8}{24} = \frac{-6+8}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Por tanto, $\left(-\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Ejemplo 3

María preparó arroz con leche. Ella usó la media libra que había en una bolsa y el cuarto de libra que quedó en otra. Para saber cuánto arroz usó, ella suma así:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Entonces, María usó $\frac{3}{4}$ de libra de arroz en su preparación.

Explora

Las entradas para un partido de fútbol se vendieron así:

- $\frac{5}{9}$ para los hinchas del equipo rojo,
- $\frac{3}{9}$ para los hinchas del equipo azul y
- $\frac{1}{9}$ para hinchas de otros equipos.



• ¿Qué parte del estadio estuvo ocupada durante el partido?



Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (adición) resolviendo ejercicios numéricos.

6.2 Adición de números racionales en expresión decimal

Para sumar dos números racionales en expresión decimal, se sigue el procedimiento que se indica a continuación:

- Se escriben los sumandos en posición vertical, garantizando que las comas queden una debajo de la otra.
- Se resuelve la suma como si se tratara de números enteros.
- Se ubica la coma de la suma alineada con la coma de los sumandos.

Ejemplo 4

Para hallar $45,67 + 3,8$:

Se escriben los sumandos en posición vertical, de tal forma que las comas queden alineadas una debajo de la otra. En el segundo sumando se puede escribir 0 en el lugar de las centésimas para que ambos números queden con la misma cantidad de cifras decimales.

$$\begin{array}{r} 45,67 \\ + 3,80 \\ \hline 49,47 \end{array}$$

Por tanto, $45,67 + 3,8 = 49,47$

Ejemplo 5

Para llegar al colegio cada mañana, Teresa recorre 5,07 km en su patineta y 1,4 km en taxi. Para saber cuántos kilómetros recorre Teresa en total, se debe efectuar la suma $5,07 + 1,4$:

$$\begin{array}{r} 5,07 \\ + 1,40 \\ \hline 6,47 \end{array}$$

Teresa recorre en total 6,47 km hasta el colegio.

6.3 Propiedades de la adición de números racionales

Propiedad	Enunciado	Ejemplo
Clausurativa	La suma de dos números racionales siempre es un número racional.	$\frac{5}{4} + \left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
Conmutativa	El orden en el que se suman dos números racionales no altera la suma.	$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
Modulativa	La suma de todo número racional con 0 da como resultado el mismo número racional. El 0 es el módulo de la adición.	$\frac{8}{3} + 0 = \frac{8}{3}$ $\left(-\frac{9}{7}\right) + 0 = 0 + \left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{9}{7}$
Invertiva	Todo número racional sumado con su opuesto aditivo da como resultado 0.	$\frac{12}{9} + \left(-\frac{12}{9}\right) = 0$
Asociativa	Cuando se suman más de dos números racionales, estos se pueden agrupar sin importar el orden y siempre se obtiene el mismo resultado.	$\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3}$ $\frac{3}{5} + \left(\frac{19}{12}\right) = \left(\frac{17}{20}\right) + \frac{4}{3}$ $2\frac{11}{60} = 2\frac{11}{60}$

En la calculadora

Suma de expresiones decimales

Para resolver $3,85 + 2,37$ en la calculadora, digita la secuencia:

$$\begin{array}{c} 3 \cdot + \cdot 8 \cdot 5 \cdot + \\ 2 \cdot + \cdot 3 \cdot 7 \cdot = \end{array}$$

- Verifica con la calculadora los ejemplos de la página.



Ten en cuenta

El opuesto aditivo de un número racional $\frac{a}{b}$ es otro racional $-\frac{a}{b}$, de manera que $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$.

Tabla 1

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Solicite a los estudiantes que resuelvan las siguientes sumas:

- a) $\frac{4}{5}z + \frac{3}{2}$; para realizar las sumas los estudiantes deben encontrar el divisor común entre el 5 y el 2 que en este caso es el menor divisor y es precisamente el 10 quedando como fracción la siguiente suma en el numerador con 10 como denominador común para dicha suma; $\frac{8+15}{10}; = \frac{23}{10}$; y de esta forma se resuelve esta suma fraccionaria y todas las que tengan igual desarrollo.

b) Pida a los estudiantes que sumen los siguientes números racionales en expresión decimal para que apliquen los conocimientos adquiridos y encuentren las semejanzas y diferencias en sumar números racionales tanto en fracción como en expresión decimal por ejemplo:

1.1- $35,5 + 3,4$ es conveniente que los estudiantes planteen estas sumas con expresiones decimales en forma vertical para que se observe con mayor claridad el algoritmo de trabajo donde deben plantear coma debajo de coma, parte entera debajo de parte entera y decimal debajo de decimal. En este caso quedaría de la siguiente forma

c) Pida a los estudiantes que resuelvan las siguientes sumas y que una vez realizada la suma de las fracciones la expresen como expresión decimal: $7/2 + 9/2$; $6/8 + 9/4$ y que comparen el resultado de la primera fracción y el de esta suma $3,5 + 4,5$.

6

Adición de números racionales

Ten en cuenta

En la antigüedad los egipcios escribían las fracciones como una suma de varias fracciones con numerador igual a 1. Por ejemplo, escribían

$$\frac{8}{15} \text{ como } \frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Para ir de una ciudad A a una ciudad B en tres días, Santiago hace los siguientes recorridos: el primer día recorre $\frac{2}{7}$ de km, el segundo día avanza $\frac{9}{4}$ de km más, y el tercer día recorre $\frac{1}{4}$ de km más que el primer día. ¿Cuál es la distancia entre la ciudad A y la ciudad B?

Solución:

Para responder la pregunta, se suman los recorridos diarios que realiza Santiago, y de esta manera se obtiene la distancia entre las dos ciudades.

Entonces, la distancia entre las ciudades A y B es:

$$\frac{2}{7} + \frac{9}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{7}\right) = \frac{8+63+7+8}{28} = \frac{86}{28} = \frac{43}{14}$$

Por lo tanto, entre las ciudades A y B hay $\frac{43}{14}$ km o 3,07 km.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Resuelve las siguientes adiciones y simplifica el resultado cuando sea posible.

a. $-\frac{5}{9} + \frac{3}{7}$

b. $\frac{8}{25} + \frac{12}{45}$

c. $\frac{4}{24} + \frac{5}{32}$

d. $-\frac{15}{9} + \frac{1}{24}$

e. $\frac{9}{18} + \frac{2}{14}$

f. $-\frac{4}{12} + \frac{6}{30}$

g. $-\frac{5}{12} + \left(-\frac{2}{15}\right)$

h. $-\frac{4}{9} + \left(-\frac{11}{7}\right)$

i. $\frac{4}{17} + \left(-\frac{6}{46}\right)$

j. $\frac{10}{12} + \frac{4}{15}$

Razonamiento

- 3 Construye una operación en la que uses las propiedades de la adición de números racionales que se indican en cada caso.

- Propiedad asociativa y propiedad modulativa.
- Propiedad modulativa, propiedad invertiva y propiedad clausurativa.
- Propiedad clausurativa, propiedad conmutativa y propiedad modulativa.

- 4 Lee y responde.

- Andrés afirmó que todas las propiedades de la adición de números enteros se satisfacen también en los números racionales. ¿Por qué puede asegurar eso Andrés? ¿Se satisfacen todas las propiedades de la adición de números racionales en la adición de números naturales?

Ejercitación

- 5 Relaciona cada operación de la izquierda con el resultado que le corresponde a la derecha.

a. $\frac{7}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{3}$

(b.) $\frac{79}{24}$

b. $\frac{3}{8} + \frac{4}{6} + \frac{9}{4}$

(c.) $\frac{11}{4}$

c. $\frac{2}{6} + \frac{5}{12} + \frac{8}{4}$

(a.) $\frac{79}{12}$

- 6 Realiza las siguientes adiciones entre decimales.

- 1,8 + 5,4
- 22,167 + 3,18
- 3,75 + 5
- 2,13 + 23,20
- 22,167 + 23,18
- 3,405 + 5,04

- 7 Calcula el perímetro de los triángulos de la Figura 2, si las medidas están dadas en centímetros.

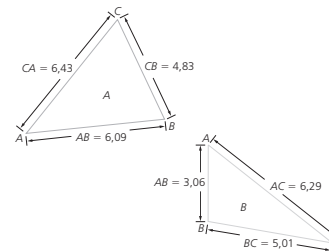


Figura 2

APLICA © EDICIONES SM

Ejercitación

- $-\frac{8}{63}$
 - $\frac{44}{75}$
 - $\frac{31}{96}$
 - $-\frac{13}{8}$
 - $\frac{9}{14}$
 - $-\frac{2}{15}$
 - $-\frac{11}{20}$
 - $-\frac{127}{63}$
 - $\frac{41}{391}$
 - $\frac{11}{10}$

Razonamiento

- Respuesta abierta
- Respuesta abierta

Ejercitación

- (b) $\frac{79}{24}$
 - (c) $\frac{33}{12}$
 - (a) $\frac{79}{12}$
- 7,2
 - 25,347
 - 8,75
 - 25,33
 - 45,347
 - 8,445
- 7,2
 - 25,347

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (adición) resolviendo ejercicios numéricos.

Bloque de Álgebra y Funciones

Razonamiento

8. Completa las pirámides de las figuras 3 y 4, sabiendo que el valor de cada ladrillo corresponde a la suma de los números de los ladrillos que tiene justo debajo.

a.

Figura 3

b.

Figura 4

9. Determina si cada igualdad es correcta o no.

a. $5,2 + 1,6 = 1,8$
b. $4,6 + 3,444 = 8,044$
c. $3,02 + 1,14 = 4,16$
d. $33,3 + 10,4 = 200,8$
e. $2,3456 + 0,003 = 2,00849$
f. $5,8 + 34,2 = 40$

10. Indica el error que se cometió en cada caso.

a. $-\frac{9}{7} + 0 = \frac{9}{7}$
b. $\frac{12}{9} + (-\frac{12}{9}) = -\frac{24}{9}$
c. $\frac{5}{4} + (-\frac{2}{4}) = 3$
d. $\frac{4}{6} + \frac{3}{8} + \frac{9}{4} = 0$
e. $\frac{3}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{15}{18}$

Ejercitación

11. Halla el número decimal que falta para completar cada igualdad.

a. $\square + 0,16 = 1,08$
b. $4,36 + \square = 7,19$
c. $7,08 + 8,34 = \square$
d. $\square + 15,4 = 29,8$
e. $2,54 + \square = 4,49$

Resolución de problemas

12. En la Figura 5 se muestran los pesos de algunos alimentos que se guardan en la alacena de una cocina. Halla los pesos combinados de los productos que se indican en cada caso.

Figura 5

a. Arroz, leche y café
b. Café y leche
c. Arroz y harina
d. Harina, leche y café

13. César realizó las siguientes compras en el supermercado:

a. ¿Cuánto pesan todas las frutas que compró?
b. ¿Cuánto pesaron en total todas las carnes?
c. ¿Cuánto pesó todo el mercado que hizo César?

14. Para ayudar a una fundación, algunos estudiantes de grado séptimo decidieron reunir alimentos y donarlos. Andrea aportó 2,5 kg de arroz, Mateo llevó $\frac{4}{2}$ kg de frijol, Catalina ayudó con $\frac{3}{9}$ kg de arroz y Juan cooperó con 3,75 kg de frijol.

a. ¿Cuánto arroz y cuánto frijol recogieron en total?
b. ¿Qué recogieron más, arroz o frijol?

15. De un depósito con agua se sacan 184,5 litros, después se sacan 128,75 litros y luego se sacan 84,5 litros. Al final quedan en el depósito 160 litros. ¿Qué cantidad de agua había en el depósito?

Razonamiento

8. a.

9. a. Incorrecta

b. Correcta

c. Correcta

d. Incorrecta

e. Incorrecta

f. Correcta

10.

a. Se aplicó mal la propiedad del elemento neutro o modulativa.

b. Se aplicó mal la propiedad de opuesto aditivo.

c. Se sumó en vez de restar.

d. Todos los racionales son mayores que 0, así que la suma no puede ser 0.

e. Solo se sumaron los dos primeros racionales

Ejercitación

11. a. 0,92

b. 2,83

c. 15,42

d. 14,4

e. 1,95

Resolución de problemas

12. a. $\frac{13}{10}$ kg

b. $\frac{4}{5}$ kg

c. $\frac{3}{4}$ kg

d. $\frac{21}{20}$ kg

13. a. 4,125 kg

b. 2 kg

c. 6,125 kg

14. a. $2,8\bar{3}$ kg de arroz y 5,75 kg de frijol, para un total de $8,85\bar{3}$

b. Recogieron más frijol que arroz.

15. 557,75 litros.

Libro del alumno

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Solicite a los estudiantes que resuelvan las siguientes sustracciones aplicando los criterios estudiados y que finalmente comparen todos los resultados y los representen en una recta numérica:

a) $5,46 - 4,38$. Recuerde a los estudiantes que en este grado y por los contenidos impartidos deben saber aplicar la regla de los signos y que ellos pueden restar en este orden o restarle al menor el mayor teniendo en cuenta que el resultado lleva el signo del número que tiene mayor módulo, porque el conjunto numérico se los permite. Por tanto el resultado es 1,08. En el siguiente caso se procede de igual manera pero al resultado se coloca el signo del número que tiene mayor módulo por ejemplo: $49,32 - 63,8 = -14,48$

b) $\frac{3}{4} - \frac{5}{3}$ recuerde a los estudiantes el procedimiento para trabajar con fracciones, analice cuál es el menor divisor común entre el 3 y el 4 que son los denominadores y el menor divisor es el 12 por lo que el 12 es el menor divisor que los contiene a los dos por tanto el resultado es $9 - \frac{15}{12} = -\frac{6}{12}$; en este caso se simplifica el 12 entre 6 y el resultado es $-\frac{1}{2}$.

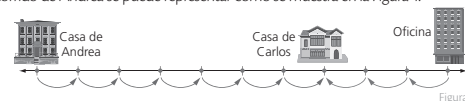
c) Pida a los estudiantes que finalmente representen en la recta numérica los resultados de los incisos anteriores ($1,08$; $-14,32$; $-\frac{1}{2}$).

7

Sustracción de números racionales

7.1 Sustracción de números racionales en expresión fraccionaria

El recorrido de Andrea se puede representar como se muestra en la Figura 1.



En este recorrido se han marcado puntos cada $\frac{1}{4}$ de kilómetro. Los arcos rojos indican la distancia de la oficina a la casa de Carlos, $\frac{2}{4}$ de km, y los azules la distancia entre la casa de Andrea y la de Carlos, que corresponde a $\frac{3}{4}$ de km. El resultado anterior se puede obtener sin ayuda de la Figura 3.24 resolviendo la sustracción $\frac{10}{4} - \frac{3}{4}$.

Para sustraer números racionales con igual denominador, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplo 1

La sustracción propuesta para solucionar la situación inicial se realiza así:

$$\frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

Para sustraer racionales con diferente denominador, primero se hallan fracciones equivalentes a los números racionales dados que tengan el mismo denominador; luego, se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 2

Para hallar $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ se siguen estos pasos:

1. Se hallan fracciones equivalentes a los números racionales dados cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ y $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

2. Se restan los racionales de igual denominador. $\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

Por tanto, $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

7.2 Sustracción de números racionales en expresión decimal

Para sustraer expresiones decimales, se escribe el sustraendo debajo del minuendo de tal manera que queden alineadas las cifras del mismo valor posicional; luego, se resta como en los números enteros. A la diferencia se le agrega la coma debajo de las comas.

Ejemplo 3

Observa cómo se sustrae 3428 de 12485.

$$\begin{array}{r} 124,85 \\ - 34,28 \\ \hline 90,57 \end{array}$$

Minuendo
Sustraendo
Diferencia

Explora

Andrea recorre $\frac{10}{4}$ de kilómetro en línea recta de su casa a la oficina. Ella siempre hace una parada para recoger a su compañero Carlos, que vive a $\frac{3}{4}$ de kilómetro de la oficina.

- ¿Cuál es la distancia entre la casa de Andrea y la de Carlos?

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \left(-\frac{c}{d}\right) &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) &= \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \end{aligned}$$

App

Representación y adición de números racionales

Abre la aplicación *Fraction Bingo* y practica la representación de fracciones y la adición de números racionales.



Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (sustracción) resolviendo ejercicios numéricos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 Los $\frac{5}{12}$ de los empleados de una empresa son mujeres. ¿Cuál es la fracción de los empleados que son hombres?

Solución:

La totalidad de los empleados de la empresa se representa con la fracción $\frac{12}{12}$. Para calcular la fracción de los trabajadores que son hombres, se debe efectuar la sustracción:

$$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Por lo tanto, la cantidad de hombres que tiene la empresa corresponde a $\frac{7}{12}$ del total de empleados.

Ten en cuenta

Toda fracción de la forma $\frac{a}{a}$, donde $a \neq 0$, representa la unidad o el todo.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Resuelve las siguientes sustracciones.

a. $\frac{8}{9} - \frac{3}{10}$ b. $-\frac{3}{5} - \frac{1}{3}$
c. $\frac{8}{15} - \left(-\frac{5}{12}\right)$ d. $\left(-\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{5}{18}\right)$
e. $\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{3}\right)$ f. $\frac{7}{2} - \left(-\frac{9}{4}\right)$

- 3 Relaciona cada operación con su respectivo resultado.

a. $\frac{6}{13} - \frac{4}{6} - \frac{1}{3}$ () $\frac{1}{2}$
b. $\frac{7}{6} - \left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{4}$ () $\frac{49}{60}$
c. $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right)$ () $\frac{59}{5}$
d. $\left(-\frac{13}{5}\right) - \left(-\frac{72}{5}\right)$ () $-\frac{7}{13}$
e. $\left(-\frac{21}{34}\right) - \left(-\frac{17}{9}\right)$ () $\frac{389}{306}$

Razonamiento

- 4 Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
- a. Siempre que se sustraen dos números racionales se obtiene otro número racional. ()
- b. La diferencia de dos números racionales siempre es menor que el minuendo y que el sustraendo. ()
- c. Para que sea posible sustraer dos números racionales estos siempre deben tener el mismo denominador. ()

Ejercitación

- 5 Escribe los números que faltan en las casillas verdes de la Figura 2 para que se cumpla cada igualdad.

1,5	-		=	0,7
-		-		-
	-		=	
=		=		=
0,6	-		=	3,8

Figura 2

Resolución de problemas

- 6 Una botella de 1,5 L está llena de agua. Si se consumen 0,330 L de agua, ¿cuántos litros de agua quedan en la botella?
- 7 La superficie de África está cerca de los 30221000 km². En la Tabla 1 se muestra la fracción aproximada de superficie que le corresponde a cada uno de los demás continentes.

Continente	Superficie
Europa	$\frac{1}{3}$
América	$\frac{141}{100}$
Oceanía	$\frac{17}{60}$
Asia	$\frac{148}{100}$
Antártida	$\frac{23}{50}$

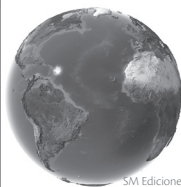


Tabla 1

- a. ¿Qué continente tiene la menor superficie?
- b. ¿Qué continente tiene la mayor superficie?
- c. ¿Cuál es la diferencia de las fracciones correspondientes a las superficies del continente más grande y del más pequeño?

Ejercitación

2. a. $\frac{53}{90}$ b. $-\frac{14}{15}$
c. $\frac{19}{20}$ d. $-\frac{1}{6}$
e. $\frac{37}{12}$ f. $\frac{23}{4}$
3. a. $-\frac{7}{13}$ b. $\frac{49}{60}$
c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{59}{5}$
e. $\frac{389}{306}$

Razonamiento

4. a. V b. F c. F
5.

1,5	-	0,8	=	0,7
-		-		-
0,9	-	4,0	=	-3,1
=		=		=
0,6	-	-3,2	=	3,8

Resolución de problemas

6. 1,17 L
7. a. Oceanía b. Asia
c. $\frac{359}{300}$

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes una multiplicación en los números enteros por ejemplo:
 15×4 ; el resultado ciertamente es 60; pero recuerde a los estudiantes que todo número natural (N); entero (Z); están representados en su forma simple, o sea su denominador es 1 por ejemplo: $1/1$; $2/1$; $3/1$; $4/1$; $5/1$ y así sucesivamente solo que no es necesario colocar el denominador pues la propiedad modulativa planeta que al multiplicar y dividir todo número, independientemente el conjunto que sea, el resultado final siempre es el mismo número por lo que todas esta divisiones anteriormente planteadas el resultado es el mismo número. Así en los racionales ocurre lo mismo salvo que el denominador de las fracciones no siempre es 1 y cuando esto ocurre ya deja de ser una fracción excepto se trate de una expresión decimal.
- Explique a los estudiantes cada una de las propiedades de la multiplicación en el conjunto de los números racionales, mediante ejemplos sencillos para que los mismos puedan familiarizarse con las propiedades y afianzar el contenido lo suficiente para resolver ejercicio de multiplicación y división y aplicarlas las propiedades en su totalidad.
- Proponga a los estudiantes ejercicios en los cuales apliquen todos los conocimientos adquiridos en todos los conjuntos numéricos y evalúe de forma oral y escrita el aprendizaje de los mismos, teniendo en cuenta su nivel de desarrollo.

8

Multiplicación y división de números racionales

8.1 Multiplicación de números racionales en expresión fraccionaria

Para saber cuántos litros de gaseosa vendió José, se suma nueve veces el contenido de gaseosa de un solo vaso.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Sumar nueve veces el número $\frac{1}{4}$ equivale a multiplicarlo por 9, así que:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{1} = \frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 1} = \frac{9}{4}$$

Por lo tanto, José vendió $\frac{9}{4}$ o 2,25 litros de gaseosa.

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Ejemplo 1

La constructora Miraceti construirá una nueva sede para sus oficinas en un terreno que mide $\frac{15}{2}$ m de ancho y $\frac{121}{5}$ m de largo. ¿Cuál es el área con que cuenta para construir el edificio?

$$A = \frac{15}{2} \text{ m} \cdot \frac{121}{5} \text{ m} = \frac{15 \cdot 121 \text{ m}}{2 \cdot 5} = \frac{1815}{10} \text{ m}^2 = \frac{363}{2} \text{ m}^2$$

El área del terreno es de $\frac{363}{2} \text{ m}^2$; es decir, 181,5 m².

Para **multiplicar tres o más números racionales** en su expresión fraccionaria, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

Ejemplo 2

Halla el producto de $\frac{3}{8} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2}$.

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 1}{8 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{27}{80}$$

8.2 Multiplicación de números racionales en expresión decimal

Para **multiplicar expresiones decimales**, se efectúa la multiplicación como si se tratara de números enteros, y se separa en el producto tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.

Ejemplo 3

Observa cómo se realiza la operación $45,87 \cdot 3,5$.

$$\begin{array}{r} 45,87 \\ \times 3,5 \\ \hline 22935 \\ 13761 \\ \hline 160,545 \end{array}$$

← Tres cifras decimales

↓
Tres cifras decimales

Explora

José vende vasos de gaseosa de $\frac{1}{4}$ de litro cada uno.



• Si el domingo vendió nueve vasos de gaseosa, ¿cuántos litros vendió en total?

Cálculo mental

Multiplicar números racionales

Antes de efectuar productos de números racionales, conviene simplificar al máximo. Por ejemplo:

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

Luego, se simplifica 2 y 4 entre 2 y se obtiene que:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

• Simplifica y calcula:

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{4}$$

Destreza con criterios de desempeño: Operar en $\mathbb{Q}$ (multiplicación y división) resolviendo ejercicios numéricos.

8.3 Propiedades de la multiplicación de números racionales

La multiplicación de números racionales cumple las propiedades que se enuncian en la Tabla 1.

Propiedad	Explicación
Clausurativa	El producto de dos o más números racionales es otro número racional.
Conmutativa	El orden de los factores no altera el producto.
Asociativa	Al multiplicar tres o más números racionales, estos se pueden agrupar de diferentes formas y el producto no se altera.
Modulativa	La multiplicación de un número racional con el número 1, da como resultado el mismo número racional.
Invertiva	El producto que se obtiene al multiplicar un número racional por su inverso multiplicativo es la unidad.
Anulativa	Todo número racional multiplicado por cero da como resultado cero.
Distributiva	El producto de un número racional por una suma de números racionales es equivalente a la suma de los productos del número racional por cada sumando.

Tabla 1

Ejemplo 4

Observa cómo se aplican dos de las propiedades de la multiplicación de números racionales expresados en forma fraccionaria y decimal.

a. Propiedad conmutativa

$$\left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{7}{6} \quad 63 \cdot (-1,5) = (-1,5) \cdot 63 = -9,45$$

b. Propiedad distributiva

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) \quad 5,4 \cdot (43 + 2) = (5,4 \cdot 43) + (5,4 \cdot 2)$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{13}{15} = \frac{3}{20} + \frac{1}{2} \quad 5,4 \cdot 63 = 23,22 + 10,8$$

$$\frac{13}{20} = \frac{13}{20} \quad 34,02 = 34,02$$

8.4 División de números racionales en expresión fraccionaria

Para dividir dos números racionales, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. En general, se cumple que:

$$\text{Si } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, \text{ entonces } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Ejemplo 5

Julián tenía en su nevera $\frac{3}{4}$ de kilogramo de queso y lo dividió en porciones de $\frac{1}{8}$ de kilogramo cada una. Para saber cuántas porciones obtuvo, es necesario dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{1}{8}$.

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{24}{4} = 6$$

Julián obtuvo seis porciones de queso.

En la calculadora

Para multiplicar números racionales en su expresión fraccionaria en la calculadora, se utilizan las teclas $\frac{a}{b}$ y $\times$.

Así, para multiplicar $\frac{1}{8}$ por $\frac{2}{3}$ se digita esta secuencia:

1 $\frac{a}{b}$ 8 $\times$ 2 $\frac{a}{b}$ 3 $=$

En la calculadora, se observa:

1.8 x 2.3 = 1.12

• Utiliza la calculadora para efectuar el siguiente producto.

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{4}$$

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional diferente de cero, entonces su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$ y el producto de ambos es 1.



SM Ediciones

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes que resuelvan los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de la multiplicación en los números racionales.

a) Calcule aplicando la propiedad conmutativa y plantee el resultado como expresión decimal. $35/8 \times 24/7$. (Los estudiantes deben tener en cuenta para realizar cada multiplicación que las fracciones se pueden simplificar tanto como sea posible, ya sea numerador con denominador en la misma fracción o numerador con el denominador de la otra fracción. Explique a los estudiantes que la multiplicación y la división de fracciones permite realizar simplificaciones para trabajar cómodamente y obtener el mismo resultado de forma más abreviada y sencilla por ejemplo en este caso el 35 es múltiplo de 7 por lo que $7 \times 5 = 35$. Por tanto se plantea $7/7 = 1$ y desaparece el denominador 7 y seguidamente $35/7 = 5$. Analice que siempre para realizar la simplificación hay que dividir ambos números que se vayan a simplificar por el mismo número en este caso el propio 7. Por tanto el 24 y el 8 también se pueden simplificar quedando como resultado 3 de la misma simplificación se obtiene $5 \times 3 = 3 \times 5$ y se aplica la propiedad conmutativa que plantea que el orden de los factores no altera el producto.

2. Proponga a los estudiantes ejercicios como los siguientes, en cada caso aplique la propiedad correspondiente.

Libro del alumno

Explique a los estudiantes al terminar cada ejercicio, otros procedimientos para obtener el mismo resultado, ya que todo ejercicio generalmente tiene más de una vía de solución.

a) Calcule y aplique las propiedades de la multiplicación en cada caso:

$$6/4 \times 3/8 = 3/8 \times 6/4 = 18/32 = \text{simplificando se obtiene } 9/16 = 0,5625 \text{ (conmutativa y clausurativa).}$$

$$37/93 \times 93/37 = 1 \text{ propiedad invertida}$$

$$4/3 \times 5/8 \times 2/9 = (4/3 \times 5/8) \times 2/9 \text{ ó } 4/3 \times (5/8 \times 2/9) = 40/216 = 10/54 = 0,1851 \text{ propiedad Asociativa.}$$

$$3/8 \times (5/3 + 2/9) = 3/8 \times 5/3 + 3/8 \times 2/9 = \text{(en este caso los estudiantes pueden multiplicar y al final simplificar o sencillamente ir simplificando para que les sea más fácil resolver la multiplicación por ejemplo: } 3/8 \times 5/3 = 5/8 \text{ y } 3/8 \times 2/9 = 1/12 \text{ por tanto}$$

$$5/8 + 1/12 = (15 + 2)/24 = 17/24 = 0,7083 \text{ en este caso se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecta a la adición.}$$

3. Solicite a los estudiantes que resuelvan la siguiente división en los racionales. $24/5 : 8/25$ demuestre a los estudiantes que la división de dos fracción es igual que multiplicar la primera por el recíproco de la segunda quedando de la siguiente forma: se mantiene la primera fracción tal cual $24/5$ y se multiplica por el recíproco de la segunda o sea de $8/25$; $25/8$ y se procede a la multiplicación donde se aplica la propiedad clausurativa: $24/5 \times 25/8 = 15$

8

Multiplicación y división de números racionales

Ejemplo 6

Andrés disponía de $\frac{5}{3}$ de litro de pintura para pintar las cuatro paredes de su alcoba. ¿Qué fracción de pintura usó en cada pared, si en cada una utilizó la misma cantidad?

Para saber la fracción de pintura que usó Andrés en cada pared, se debe encontrar el cociente de $\frac{5}{3} \div 4$.

$$\text{Al resolver, se tiene que: } \frac{5}{3} \div \frac{4}{1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Andrés usó $\frac{5}{12}$ de litro de pintura en cada pared.

Ejemplo 7

$$\text{Observa cómo se resuelve la operación } \frac{\frac{9}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{12} - \frac{3}{7}}.$$

$$\frac{\frac{9}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{12} - \frac{3}{7}} = \frac{\frac{35}{12} - \frac{7}{10}}{\frac{4}{12} - \frac{3}{7}} \quad \leftarrow \text{Se resuelven las operaciones del numerador y del denominador.}$$

$$= \frac{35}{12} \div \frac{17}{10} \quad \leftarrow \text{Se expresa la fracción compleja como una división.}$$

$$= \frac{35}{12} \cdot \frac{10}{17} = \frac{350}{204} = \frac{175}{102} \quad \leftarrow \text{Se dividen las fracciones y se simplifica el cociente.}$$

8.5 División de números racionales en expresión decimal

Para dividir dos números racionales en expresión decimal, se eliminan las comas decimales multiplicando el dividendo y el divisor por una misma potencia de 10. Luego, se efectúa la división entre los números enteros obtenidos.

Ejemplo 8

Al efectuar la división $0,3 \div 0,8$ se tiene en cuenta lo siguiente:

Como ambas expresiones decimales tienen una sola cifra decimal, se multiplica cada una por 10 para obtener números enteros ($0,3 \cdot 10 = 3$ y $0,8 \cdot 10 = 8$). Los números enteros obtenidos se dividen, como se muestra en la Figura 1.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- En la fiesta de cumpleaños de Juana, se sirvió jugo para los invitados en vasos de 0,25 L. Si en total se tienen 2,5 litros de jugo, ¿para cuántos invitados alcanzó?

Solución:

Para responder la pregunta, se debe dividir el total de jugo disponible entre la capacidad de cada vaso.

$$2,5 \div 0,25 = 250 \div 25 = 10$$

Por lo tanto, el jugo alcanzó para diez invitados.



$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 60} \\ 40 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 1

Cálculo mental

Dividir entre una potencia de 10

Para dividir un número decimal entre una potencia de 10, basta con escribir el número decimal y correr la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tenga la potencia de 10. Por ejemplo:

$$1,38 \div 100 = 0,0138$$

- Realiza la división $25,74 \div 1000$.

Bloque de Álgebra y Funciones

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Realiza las siguientes operaciones.

a. $\left(-\frac{3}{7}\right) \div \frac{4}{12}$ b. $\frac{41}{3} \div \frac{22}{5}$

c. $\frac{15}{11} \div \frac{4}{5}$ d. $\frac{17}{5} \div \frac{4}{3}$

e. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ f. $\left(-\frac{19}{8}\right) \div \left(-\frac{12}{7}\right)$

g. $\left(\frac{12}{5} \cdot \frac{2}{4}\right) \div \frac{3}{2}$ h. $\left(\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{3}\right)$

3. Resuelve las operaciones con expresiones decimales que se presentan a continuación.

a. $1,5 \cdot 0,35$ b. $62 \cdot 0,1$

c. $(-0,14) \div 2$ d. $(-27,778) \div 2,15$

e. $(-3,425) \cdot 1,7$ f. $(-43,4 \cdot 25) \div 3,7$

Comunicación

4. Explica a tus compañeros qué entiendes por inverso multiplicativo. Apoya tu exposición con dos ejemplos.

5. Indica, en cada caso, cuántas cifras decimales se deben separar en el producto al multiplicar cada par de factores.

a. Cada factor tiene dos cifras decimales.

b. Un factor tiene tres cifras decimales y el otro dos cifras decimales.

c. Un factor tiene dos cifras decimales y el otro una cifra decimal.

d. Un número entero negativo y un número decimal con dos cifras decimales.

Razonamiento

6. Une con una línea cada operación planteada en la izquierda con el cociente que le corresponde a la derecha.

a. Un sexto dividido tres $\frac{1}{3}$

b. Dos novenos dividido dos $\frac{1}{9}$

c. Tres medios dividido un medio $\frac{1}{18}$

d. Seis octavos dividido un tercio $\frac{18}{5}$

e. Tres quintos dividido un sexto $\frac{9}{4}$

f. Doce tercios dividido un cuarto $\frac{9}{10}$

g. Un décimo dividido un noveno $\frac{16}{1}$

7. Explica el error que se cometió en el desarrollo de la división y corrígelo.

$$\frac{44}{3} \div \frac{9}{2} = \frac{44}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{396}{6} = 66$$

8. Resuelve.

a. Alejandro escribió $\frac{1}{8} \div \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \div \frac{1}{8}$.
a. ¿Qué propiedad quería aplicar Alejandro con esta expresión?
b. ¿Se puede aplicar esta propiedad a la división? Explica tomando como base la igualdad que planteó Alejandro.
c. ¿Hay alguna propiedad de la multiplicación de números racionales que se cumple en esta división? Explica con ejemplos.

9. Escribe los números que satisfacen cada igualdad.

a. $(-0,5) \cdot \square = 5$ b. $100 \cdot \square = 3,75$

c. $\frac{3}{5} \div \square = 12$ d. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\square}{8}\right) = -\frac{1}{8}$

e. $\left(-\frac{15}{7}\right) \div \left(\frac{\square}{7}\right) = \frac{45}{7}$ f. $\left(\frac{\square}{6}\right) \div \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{2}{9}$

g. $0,75 \div \square = 0,25$ h. $(-0,8) \div \square = -2$

Resolución de problemas

10. Lee y responde las preguntas.

a. Se tienen dos pliegos y medio de cartón que se deben cortar en octavos de pliego. ¿Cuántos octavos se pueden cortar?

b. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro se pueden servir de un galón de agua que contiene $\frac{18}{8}$ de litro?

c. Un automóvil recorrió $\frac{8}{10}$ de kilómetro en nueve minutos. ¿Qué fracción de kilómetro recorrió en tres minutos?

d. Se reparten $\frac{6}{9}$ de pizza en partes iguales entre seis personas. ¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada persona?

e. Oscar dispone de $\frac{3}{4}$ de hora para resolver tres problemas de matemáticas. ¿Qué fracción de la hora le debe dedicar a cada problema si quiere usar el mismo tiempo para cada uno? ¿En cuántos minutos resuelve cada problema?

Ejercitación

2. a. $-\frac{9}{7}$ b. $\frac{205}{66}$
- c. $\frac{75}{44}$ d. $\frac{51}{20}$
- e. $\frac{3}{2}$ f. $\frac{57}{14}$
- g. $\frac{14}{5}$ h. $\frac{135}{88}$
3. a. 0,525 b. 0,62
- c. -0,07 d. -12,92
- e. -5,8225 f. -29,324

Comunicación

4. Respuesta abierta

5. a. Cuatro b. Cinco
- c. Tres d. Dos

Razonamiento

6. a. $\frac{1}{18}$ b. $\frac{1}{9}$
- c. 3 d. $\frac{9}{4}$
- e. $\frac{18}{5}$ f. 16
- g. $\frac{9}{10}$

7. $\frac{44}{3} \div \frac{9}{2} = \frac{44}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{88}{27}$

8. a. Conmutativa
- b. No se cumple para la división.
- c. Ninguna

9. a. -10 b. 0,0375
- c. 20 d. $-\frac{1}{4}$
- e. $-\frac{1}{3}$ f. $-\frac{1}{9}$
- g. 3 h. 0,4

Resolución de problemas

10. a. 20 octavos
- b. 9 vasos
- c. $\frac{4}{15}$ de km
- d. $\frac{1}{8}$ De pizza para cada uno
- e. $\frac{1}{4}$ de minuto

UNIDAD
2

Evaluación formativa

Nombre:

Grado: Fecha:

1. Resuelve las siguientes sumas..

A. $\frac{18}{7} + \frac{31}{4} + \frac{9}{21} + \frac{10}{7}$

B. $\frac{9}{2} + \frac{3}{11} + \frac{14}{22}$

C. $\frac{6}{19} + \frac{19}{76} + \frac{15}{38}$

D. $\frac{11}{15} + \frac{16}{45} + \frac{22}{5}$

2. Resuelve las siguientes restas.

A. $\frac{121}{4} - \frac{36}{11}$

B. $\frac{110}{9} - \frac{43}{27}$

C. $\frac{316}{15} - \frac{121}{10}$

D. $\frac{1522}{17} - \frac{816}{5}$

3. Representa los siguientes números en una recta numérica.

A. $\sqrt{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3} + 1$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E. $3\sqrt{2}$ F. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

4. En cada caso, compara las siguientes expresiones. Determina cuál es menor.

A. $\sqrt{3}$ y 2,23607

B. $\sqrt{20}$ y $\sqrt{21}$

C. $\sqrt{10}$ y $\sqrt{12}$

D. 1,414214 y $\sqrt{2}$

E. $-\sqrt{17}$ y $\sqrt{18}$

F. $-\sqrt{14}$ y 3,741657

5. El valor aproximado del número de oro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es 1,618033989. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene la expresión decimal más aproximada al número de oro?

$\frac{233}{144}$; $\frac{987}{610}$; $\frac{1597}{987}$; $\frac{144}{89}$

6. Halla el resultado de cada operación.

A. $\frac{13}{6} \times \frac{15}{26}$

B. $\frac{12}{27} \times \frac{63}{14}$

C. $\frac{18}{42} \div \frac{4}{35}$

D. $\frac{66}{55} \div \frac{77}{72}$

1. Resuelve las siguientes sumas..

A. $\frac{18}{7} + \frac{31}{4} + \frac{9}{21} + \frac{10}{7}$.

B. $\frac{9}{2} + \frac{3}{11} + \frac{14}{22}$

C. $\frac{6}{19} + \frac{19}{76} + \frac{15}{38}$

D. $\frac{11}{15} + \frac{16}{45} + \frac{22}{5}$

2. Resuelve las siguientes restas.

A. $\frac{121}{4} - \frac{36}{11}$

B. $\frac{110}{9} - \frac{43}{27}$

C. $\frac{316}{15} - \frac{121}{10}$

D. $\frac{1522}{17} - \frac{816}{5}$

3. Representa los siguientes números en una recta numérica.

A. $\sqrt{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3} + 1$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E. $3\sqrt{2}$ F. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

4. En cada caso, compara las siguientes expresiones. Determina cuál es menor.

A. $\sqrt{3}$ y 2,23607

B. $\sqrt{20}$ y $\sqrt{21}$

C. $\sqrt{10}$ y $\sqrt{12}$

D. 1,414214 y $\sqrt{2}$

E. $-\sqrt{17}$ y $\sqrt{18}$

F. $-\sqrt{14}$ y 3,741657

5. El valor aproximado del número de oro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es 1,618033989. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene la expresión decimal más aproximada al número de oro?

$\frac{233}{144}$; $\frac{987}{610}$; $\frac{1597}{987}$; $\frac{144}{89}$

6. Halla el resultado de cada operación.

A. $\frac{13}{6} \times \frac{15}{26}$

B. $\frac{12}{27} \times \frac{63}{14}$

C. $\frac{18}{42} \div \frac{4}{35}$

D. $\frac{66}{55} \div \frac{77}{72}$

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Operar en Q (adición) resolviendo ejercicios numéricos.	1			
Operar en Q (sustracción) resolviendo ejercicios numéricos.	2			
Operar en Q (multiplicación y división) resolviendo ejercicios numéricos.	5 y 6			
Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos.	3 y 4			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Una ecuación es una igualdad donde aparece al menos una variable y en dependencia del exponente de la variable se plantea el grado de la ecuación, por ejemplo, si el mayor exponente de la variable es 1 se dice que es una ecuación de primer grado, si es 2 el exponente mayor se dice que es una ecuación de segundo grado y así sucesivamente para el valor del exponente en las ecuaciones. Las ecuaciones pueden ser: simples, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, con radicales etc.

En este caso se estudiarán las ecuaciones fraccionarias en $\mathbb{Q}$ y su forma de cálculo.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique a los estudiantes ¿qué es una ecuación?; ¿cómo se resuelve una ecuación? y ¿cómo determinar el conjunto solución de la ecuación fraccionaria? en cuestión.
- Muestre a los estudiantes, mediante ejemplos sencillos, que para resolver una ecuación fraccionaria se procede de forma fácil pues ellos ya conocen la adición y sustracción de los racionales y en este caso de las fracciones por lo que le será mucho más fácil de resolver.
- Socialice los términos de las ecuaciones fraccionarias con los estudiantes para que puedan reconocer la incógnita y despejarla tanto como sea posible para calcular el valor que satisfaga la igualdad planteada en la ecuación o sea que el miembro derecho de la ecuación sea igual al miembro izquierdo.

9

Ecuaciones con números racionales

Explora

Carlos puede comprar los $\frac{3}{4}$ de una torta, que completa cuesta \$ 20.



• Si Juan cuenta con dos veces la cantidad de dinero que tiene Carlos, ¿cuánto dinero tiene Juan?

Para determinar cuánto dinero tiene Juan, primero se averigua cuánto tiene Carlos. Con este fin, se hallan los $\frac{3}{4}$ de \$ 20, que corresponde al valor de la fracción de torta que puede comprar Carlos. Al hacer el cálculo, se obtiene que Carlos tiene \$ 15, y dado que Juan tiene el doble de esa cantidad, él cuenta con \$ 30.

En la solución de este problema se halló un valor desconocido a partir de algunas condiciones.

Las **ecuaciones** son igualdades en las cuales se desconocen uno o varios términos, denominados **variables** o **incógnitas**. Para representar las variables se emplean letras minúsculas.

Ejemplo 1

La igualdad $\frac{2}{3} + x = \frac{11}{3}$ es una ecuación en la que a la incógnita se le ha llamado x , y debe ser tal que sumada con $\frac{2}{3}$ dé $\frac{11}{3}$ como resultado.

En este caso, el valor de x es $\frac{9}{3}$, ya que $\frac{2}{3} + \frac{9}{3} = \frac{11}{3}$.

Se dice entonces que la solución de la ecuación es $x = \frac{9}{3} = 3$.

Para solucionar una ecuación con números racionales, se debe aplicar la **propiedad uniforme de las igualdades**.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- Sisa tomó una bolsa de harina y usó $\frac{1}{3}$ de su contenido para preparar galletas; luego empleó 1,5 kg para hacer una torta y aún le quedaron 2,5 kg. ¿Cuánta harina había en la bolsa inicialmente?

Solución:

Para resolver el problema se debe plantear una ecuación, en la que hay un término desconocido (x) que indica el peso inicial de la bolsa de harina.

$$\begin{aligned}
 x - \frac{1}{3}x - 1,5 &= 2,5 && \text{Se plantea la ecuación.} \\
 \frac{2}{3}x - 1,5 &= 2,5 && \text{Se efectúa la operación } x - \frac{1}{3}x. \\
 \frac{2}{3}x - 1,5 + 1,5 &= 2,5 + 1,5 && \text{Se adiciona en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de } (-1,5). \\
 \frac{2}{3}x &= 4 && \text{Se opera a ambos lados de la ecuación.} \\
 \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x &= \frac{3}{2} \cdot 4 && \text{Se multiplica a ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de } \frac{2}{3}. \\
 x &= \frac{12}{2} = 6 && \text{Se resuelven las operaciones indicadas.}
 \end{aligned}$$

La bolsa inicialmente contenía 6 kilogramos de harina.

Ten en cuenta

La **propiedad uniforme de las igualdades** indica que para los racionales

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
 &\bullet \frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \\
 &\bullet \frac{a}{b} - \frac{e}{f} = \frac{c}{d} - \frac{e}{f} \\
 &\bullet \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \\
 &\bullet \frac{a}{b} \div \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \div \frac{e}{f}
 \end{aligned}$$

Bloque de Álgebra y Funciones

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $x + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$ b. $\frac{5}{3} = \frac{3}{7} + y$
c. $\frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - z$ d. $m - \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$
e. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = n - \frac{2}{9}$ f. $-\frac{1}{7} + \frac{3}{5} - r = \frac{2}{9}$
g. $\frac{2}{5} - \frac{8}{3} = 7$ h. $\frac{12}{7}x + 3 = -8$

3. Halla el valor de x en cada caso.

a. $5,6x + 1,7 = 32,76$ b. $4,3x - 4,2 = 5,4$
c. $1,8x = 42,6$ d. $\frac{x}{2,3} = -18$

Razonamiento

4. Identifica el error en cada caso y corrígelo.

a. $x - 6,2 = -8$
 $x - 6,2 - 6,2 = -8 - 6,2$
 $x = -14,2$
b. $-2x + 4,5 = 7$
 $-2x + 4,5 - 4,5 = 7 - 4,5$
 $-2x = 2,5$
 $-2x \cdot (-2) = 2,5 \cdot (-2)$
 $x = -5$
c. $x + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
 $x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}$
 $x = \frac{9}{8}$

5. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

Ecuación	Solución	V	F
$x + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$	$x = \frac{2}{6}$		
$\frac{6}{4}a + \frac{2}{10} = 4$	$a = \frac{38}{15}$		
$\frac{d}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2}{3}$	$d = \frac{13}{15}$		
$y - \frac{1}{4} = \frac{17}{20}$	$y = \frac{11}{10}$		

6. Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.

a. $x + 1,8 = 5,3$ () 8,1
b. $x - \frac{1}{3} = -\frac{4}{5}$ () 3,5
c. $2x + 2,1 = 18,3$ () $-\frac{7}{15}$
d. $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{1}{8}$ () $-\frac{5}{2}$
e. $x - 4 = \frac{1}{3}$ () -20,3
f. $2 + x = -18,3$ () $\frac{13}{3}$

Modelación

7. Escribe una ecuación para cada enunciado.

a. Un número menos $\frac{3}{4}$ es igual a 4.
b. La cuarta parte de un número aumentado en $\frac{5}{9}$ es igual a $\frac{1}{4}$.
c. El triple de un número es $\frac{8}{27}$.
d. Un número más $\frac{4}{5}$ es igual a 2.

Resolución de problemas

8. Lee y resuelve.

a. Juliana pensó en un número, lo multiplicó por $-\frac{4}{6}$ y al resultado le sumó $\frac{4}{9}$. Si al final obtuvo $\frac{2}{27}$, ¿cuál fue el número que pensó Juliana?
b. Mario pensó un número y lo multiplicó por $\frac{2}{5}$ para obtener $\frac{5}{9}$. ¿Qué número pensó Mario?
c. Si al triple de un número se le suma su mitad, se obtiene 60. ¿Cuál es el número?
d. Francisco utilizó $\frac{3}{5}$ de la superficie de un terreno para sembrar hortalizas. ¿Qué parte del terreno está sin sembrar?
e. En el centro comercial, Andrés compró un videojuego por \$ 24. Si esta cantidad equivale a las $\frac{2}{3}$ partes de lo que llevaba, ¿cuánto dinero tenía? ¿Cuánto dinero le quedó?

Ejercitación

2. a. $x = \frac{1}{6}$ b. $y = \frac{26}{21}$
c. $z = 0$ d. $m = \frac{26}{35}$
e. $n = \frac{47}{36}$ f. $r = \frac{74}{315}$
g. $t = \frac{145}{6}$ h. $x = -\frac{77}{12}$
3. a. $x = 5,546428571$ b. $x = 2,23255814$
c. $x = 23,6$ d. $x = 241,4$

Razonamiento

4. a. $x = -1,8$ b. $x = -1,25$
c. $x = \frac{1}{8}$

5.

Ecuación	Solución	V	F
$x + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$	$x = \frac{7}{6}$		X
$\frac{6}{4}a + \frac{2}{10} = 4$	$a = \frac{38}{15}$	X	
$\frac{d}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2}{3}$	$d = \frac{13}{15}$		X
$y - \frac{1}{4} = \frac{17}{20}$	$y = \frac{11}{10}$	X	

6. a. 3,5 b. $-\frac{7}{15}$
c. 8,1 d. $-\frac{5}{2}$
e. $\frac{13}{3}$ f. -20,3

Modelación

7. a. $x - \frac{3}{4} = 4$ b. $\frac{1}{4}x + \frac{5}{9} = \frac{1}{4}$
c. $3x = \frac{8}{27}$ d. $x + \frac{4}{5} = 2$

Resolución de problemas

8. a. El número que pensó Juliana es $\frac{5}{9}$
b. El número que pensó Mario es $\frac{25}{18}$
c. El número es $\frac{120}{7}$
d. $\frac{2}{5}$ del terreno
e. Tenía \$ 36, le quedó \$12

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes las propiedades de las potencias. Muestre ejemplo de las propiedades en los naturales para la lograr una mejor interpretación de las propiedades en los racionales.
- Explique a los estudiantes las propiedades de las potencias para cuando la base es negativa y el exponente es par y para cuando la base es negativa y el exponente es impar. Muestre ejemplo para su interpretación en los racionales.
- Analice con los estudiantes las propiedades donde la base es positiva y el exponente es negativo impar, donde el estudiante debe dominar, por conjunto numéricos anteriores, que $a^{-n} = 1 / a^n$. Analice detenidamente esta propiedad con los estudiantes ya que en el conjunto de los números racionales y específicamente en las fracciones aplicar dicha propiedad en una fracción el resultado es el siguiente por ejemplo:

$(3/5)^{-2} = 1 / (3/5)^2$ donde esto se convierte en la división de dos fracciones y deben aplicar la propiedad para la división, mantener la primera y multiplicar por el recíproco de la segunda; por tanto aquí se convierte en los racionales en lo siguiente $(3/4)^{-3}$ en $(4/3)^3$.

- Proponga ejercicios integradores donde los estudiantes apliquen las propiedades de la de la potenciación para su familiarización con el tema. Utilice medios de enseñanza para el desarrollo de las habilidades digitales en el tema de las potencias de los números racionales.

10

Potenciación de números racionales

Para responder la pregunta del problema, se debe hallar el volumen de cada cubo multiplicando las medidas de sus tres dimensiones, así:

$$\text{Volumen del cubo 1: } \frac{1}{2} \text{ cm} \cdot \frac{1}{2} \text{ cm} \cdot \frac{1}{2} \text{ cm} = \frac{1}{8} \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen del cubo 2: } \frac{2}{5} \text{ cm} \cdot \frac{2}{5} \text{ cm} \cdot \frac{2}{5} \text{ cm} = \frac{8}{125} \text{ cm}^3$$

Por tanto, la segunda hoja contenía los datos $\frac{1}{8} \text{ cm}^3$ y $\frac{8}{125} \text{ cm}^3$. Estos volúmenes se pueden expresar como $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ y $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, respectivamente.

La **potenciación** permite escribir de manera simplificada el producto de varios factores iguales.

10.1 Potencia de un número racional

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y n es un número natural, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula la siguiente potencia.

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$$

10.2 Propiedades de la potenciación de números racionales

El **producto de potencias de igual base** es otra potencia con la misma base y con el exponente igual a la suma de los exponentes.

$$\text{Si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ y } n \text{ y } m \in \mathbb{Z}, \text{ entonces: } \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

Ejemplo 2

$$\text{Calcula } \left(-\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4$$

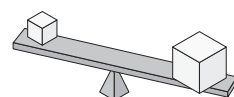
$$\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4 = \left(-\frac{3}{7}\right)^{2+4} = \left(-\frac{3}{7}\right)^6 = \frac{(-3)^6}{7^6} = \frac{729}{117649}$$

El **cociente de dos potencias de la misma base** es otra potencia con la misma base y con el exponente igual a la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

$$\text{Si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ y } n \text{ y } m \in \mathbb{Z}, \text{ entonces: } \left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

Explora

Diana recibió una hoja de papel con la medida de la arista de dos cubos y otra con sus correspondientes volúmenes, pero la segunda hoja se le perdió.



- Si en la primera hoja aparecen los datos $\frac{1}{2} \text{ cm}$ y $\frac{2}{5} \text{ cm}$, ¿qué información contenía la segunda hoja?

Ten en cuenta

- Las potencias de exponente par son siempre positivas.
- Las potencias de exponente impar tienen el mismo signo de la base.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Calcular potencias de números racionales con exponentes enteros.

Ejemplo 3

Observa cómo se calcula $\left(-\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(-\frac{4}{9}\right)^3$.

$$\left(-\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(-\frac{4}{9}\right)^3 = \left(-\frac{4}{9}\right)^{4-3} = \left(-\frac{4}{9}\right)^1 = -\frac{4}{9}$$

La **potencia de una potencia** es otra potencia con la misma base y con el exponente igual al producto de los exponentes.

$$\text{Si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ y } n \text{ y } m \in \mathbb{Z}, \text{ entonces: } \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}.$$

Ejemplo 4

Resuelve $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^3$.

$$\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^{2 \cdot 3} = \left(\frac{5}{3}\right)^6 = \frac{5^6}{3^6} = \frac{15625}{729}$$

Una **potencia con exponente negativo** es equivalente al inverso multiplicativo de la base elevado al mismo exponente, pero positivo:

$$\text{Si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ y } n \in \mathbb{N}, \text{ entonces: } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Ejemplo 5

Observa la aplicación de la propiedad anterior:

$$\text{a. } \left(\frac{6}{13}\right)^{-4} = \left(\frac{13}{6}\right)^4 \quad \text{b. } \left(-\frac{1}{5}\right)^{-7} = (-5)^7 \quad \text{c. } \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3$$

10.3 Potenciación de números racionales en expresión decimal

Si a es una expresión decimal y n un número natural, entonces:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplo 6

En cierto experimento, una población de bacterias se reduce, quedando 0,25 partes cada hora. ¿Qué parte quedará al cabo de tres horas?

Para responder la pregunta es necesario calcular $(0,25)^3$, así:

$$(0,25)^3 = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 0,015625$$

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^m$$

Ten en cuenta

Cualquier número racional diferente de 0 elevado al exponente 0 es igual a 1.

$$\text{Si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ entonces } \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

TECNOLOGÍAS de la comunicación

http://www.vitutor.com/di/tr/a_13e.html
Realiza ejercicios aplicando las propiedades de la potenciación.



■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes que aplicando las propiedades de las potencias en los números racionales resuelvan los siguientes ejercicios:

a) calcula y aplica la propiedad que corresponda y menciónala:

$[(6/8)2]3$ = los estudiantes deben mencionar; potencia de potencia y deben aplicar lo que esta propiedad plantea; multiplicar las potencias manteniendo las bases por ejemplo:

$(6/8)2 \times 3 = (6/8)6$ = en este caso el estudiante debe dominar el procedimiento para elevar una fracción a cualquier exponente, debe aplicar el exponente al numerador y al denominador por ejemplo; $66/86$. El docente debe explicar a los estudiantes la forma más simple de resolver la operación pero igual debe mostrarle las posibles vías de solución a cada ejercicio. En este caso si efectúa la operación y desarrolla la potencia ejemplo $(0,75)6 = 0.17797852$ y como desarrollo de exponente quedaría de la siguiente forma: $66/86$. quedaría el resultado así $46656/262144 = 0.17797852$ por lo que queda demostrado que por cualquier vía se resuelva el ejercicio el resultado ha de ser el mismo.

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar las siguientes páginas web:

- http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/potenciacion_de_numeros_racionales.html
- http://e-cativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio//500/547/html/Unidad01/pagina_4.html

Ejercitación

2. a. $\frac{343}{729}$ b. $\frac{2401}{81}$ c. -243

d. $\frac{1}{4}$ e. $\frac{1}{729}$ f. 1

g. $\frac{117\,649}{15\,625}$ h. $\frac{729}{117\,649}$ i. $\frac{1}{6\,561}$

j. $\frac{15\,625}{117\,649}$ k. $\frac{243}{32\,768}$ l. $\frac{16}{9}$

m. $\frac{81}{10\,000}$ n. $\frac{65636}{6561}$

3. a. $\left(\frac{13}{10}\right)^3 = \frac{2\,197}{1\,000}$ b. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

c. $\left(-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$ d. $\left(\frac{99}{10}\right)^3 = \frac{970\,299}{1\,000}$

e. $\left(\frac{77}{10}\right)^2 = \frac{5\,929}{100}$ f. $\left(-\frac{21}{10}\right)^5 = -\frac{4\,084\,101}{100\,000}$

4.

Lado (l)	Volumen (l³)
$\frac{2}{5}$ cm	$\frac{8}{125}$ cm³
1,5 cm	3,375 cm³
$\frac{5}{8}$ cm	$\frac{125}{512}$ cm³
12,5 cm	1953,125 cm³
$\frac{4}{7}$ cm	$\frac{64}{343}$ cm³
$\frac{5}{4}$ cm	$\frac{125}{64}$ cm³

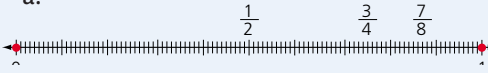
5. a. 42,875 b. 42,875 b. 64,36343
c. 11,390 d. 1

Resolución de problemas

6. El volumen de la caja es

$$V = \left(\frac{19}{5}\right)^3 = \frac{19^3}{5^3} = \frac{6\,859}{125} = 54,872 \text{ cm}^3$$
 y es menor que 64 cm^3 . Por lo tanto, la obra cabe en la caja que ofrece la agencia de envío.

7. 4 dobleces

8. a. 
 b. No, porque siempre recorre la mitad de lo que falta.

9. 1ª columna: unidad (u); 2ª columna: $\frac{2}{3}$ de u;
 3ª columna: $\frac{4}{9}$ de u; 4ª columna: $\frac{8}{27}$ de u.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Calcula el valor de cada expresión usando las propiedades de la potenciación correspondientes.

a. $\left(\frac{2}{9}\right)^5$ b. $\left(-\frac{7}{3}\right)^4$
 c. $\left(-\frac{6}{2}\right)^5$ d. $\left(\frac{3}{6}\right)^6$
 e. $\left(\frac{2}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3$ f. $\left(-\frac{3}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{9}\right)^2$
 g. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$ h. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2\right]^3$
 i. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$ j. $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^4$
 k. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$ l. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5$
 m. $\left[\left(-\frac{2}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3$ n. $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^3$

3. Resuelve cada una de las siguientes operaciones con decimales.

a. $(3,5)^3 + (3,5)^2$ b. $(2,3)^3 + (2,3)^2$
 c. $[(-1,5)^3]^2$ d. $[(2,5)^2]^3$

Resolución de problemas

6. Camila quiere enviar por correo una pieza de arte de forma cúbica. La agencia de envíos cuenta con cajas de cartón cúbicas de 64 cm^3 cada una. Si cada arista de la obra de arte mide $\frac{19}{5} \text{ cm}$, ¿esta cabrá en la caja con la que cuenta la agencia?

7. Después de doblar una hoja de papel por la mitad, luego doblarla de nuevo por la mitad y así sucesivamente, se obtienen cuadrados cada uno con un área equivalente a $\frac{1}{16}$ de la superficie inicial de la hoja.



¿Cuántos dobleces se le realizaron a la hoja?

8. Una tortuga debe partir de 0 y llegar hasta el punto 1.

a. Durante el primer segundo llega hasta la mitad del segmento, al siguiente segundo avanza hasta la mitad del segmento que le resta por recorrer y de esa manera, cada segundo avanza hasta la mitad del segmento que aún le queda por transitar.



Figura 1

a. En la Figura 1, marca y escribe los números a los que llega la tortuga después de cada segundo.
 b. ¿Llegará la tortuga hasta el punto 1? Explica.

9. Para sostener una placa sobre un río se han instalado cuatro columnas, donde la longitud de cada columna equivale a los $\frac{2}{3}$ de la columna anterior. Tomando como unidad la medida de la columna más larga, ¿a qué fracción de esta corresponden las demás columnas?

Tabla 1

Lado (l)	Volumen (l³)
$\frac{2}{5}$ cm	
1,5 cm	
$\frac{5}{8}$ cm	
12,5 cm	
$\frac{4}{7}$ cm	
$\frac{5}{4}$ cm	

Libro del alumno

11

Radicación de números racionales

Explora

Mateo compró un terreno con forma cuadrada de $\frac{225}{4}$ m² de superficie y desea cercarlo con una malla para llevar a pastar sus vacas.



- ¿Cuántos metros de malla necesita Mateo para cercar todo el terreno?

Para determinar la cantidad de malla que requiere Mateo para cercar el terreno, se debe calcular el perímetro. Es necesario entonces hallar la longitud del lado de un cuadrado de $\frac{225}{4}$ m².

La superficie de un cuadrado se halla elevando al cuadrado la longitud de uno de sus lados. Así que, como $\left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}$ m², entonces el lado del cuadrado mide $\frac{15}{2}$ m y su perímetro $\frac{15}{2}$ m $\cdot$ 4 = $\frac{60}{2}$ m = 30 m.

Por lo tanto, Mateo necesita 30 m de malla para cercar el terreno.

Cuando Mateo halló el número que multiplicado por sí mismo dio el valor de la superficie, él calculó la raíz cuadrada de esta.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$ si y solo si $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d}$.

A $\frac{a}{b}$ se le denomina raíz n -ésima de la cantidad subradical $\frac{c}{d}$ y n , número mayor que 1, es el índice de la raíz.

11.1 Raíz de un número racional

Para hallar la raíz n -ésima de un número racional, se calcula la raíz tanto del numerador como del denominador.

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}, \text{ ya que } \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}.$$

Si el índice del radical es impar, la cantidad subradical puede ser positiva o negativa. Si el índice es par, solo se pueden calcular raíces de cantidades positivas.

Ejemplo 2

Observa cómo se calculan las siguientes raíces.

$$\text{a. } \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \text{ o } \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}, \text{ ya que } \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \text{ y } \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\text{b. } \sqrt[4]{-\frac{1}{16}} \text{ no existe, porque ningún número elevado a la cuarta potencia es negativo.}$$

$$\text{c. } \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}, \text{ ya que } \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{32}{243}$$

$$\text{d. } \sqrt[5]{-\frac{8}{125}} = -\frac{2}{5}, \text{ puesto que } \left(-\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{8}{125}$$

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Muestre a los estudiantes que, como en los conjunto numéricos estudiados anteriormente, la radicación siempre será la operación inversa de la potenciación por tanto, una vez que estemos en presencia de la potenciación indudablemente haremos alusión y aplicación de la propiedades de la potenciación y radicación.
- Muestre a los estudiantes todas las propiedades de la radicación en ejemplos sencillos, para lograr un mayor nivel de familiarización y a su vez una mejor interpretación del tema para desarrollar ejercicio integradores donde apliquen dichos conocimientos.
- Analice ejemplos resueltos del libro de texto, aplicando varias vías de solución para que los estudiantes socialicen el tema y puedan llegar a la misma solución por diferentes vías, ya que todos no tienen el mismo nivel de asimilación y lo que resulta difícil para algunos les puede resultar fácil a otros, por lo que se le recomienda al docente resolver el ejercicio por diferentes vías para que los estudiantes seleccionen la más adecuada de acuerdo a su nivel.
- Desarrolle ejercicios integradores, donde una vez aplicada las propiedades de la potenciación, deban aplicar la radicación para obtener un resultado que satisfaga la operación que se desarrolla en el ejercicio propuesto.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes que aplicando las propiedades de las potencias en los números racionales resuelvan los siguientes ejercicios:

- $\sqrt{\frac{36}{25}}$
- $\sqrt[3]{\frac{729}{27}}$
- $\sqrt{625} + \sqrt{1296}$
- $\sqrt[3]{8} - \sqrt{81}$

2. Calcule aplicando las propiedades de la radicación:

- $\sqrt{\frac{64}{36}} \times \sqrt{\frac{81}{16}}$
- $\sqrt{\left(-\frac{56}{84}\right)}$

■ Actividades TIC

Invite a los estudiantes a visitar las siguientes páginas web:

- http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/radicacion_de_numeros_racionales.html
- http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/propiedades_de_la_radicacion.html

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos.

11.2 Propiedades de la radicación de números racionales

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, y m y $n \in \mathbb{N}$, entonces la radicación de números racionales cumple las propiedades que se muestran en la Tabla 1.

Raíz de un producto	Raíz de un cociente
$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \div \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
Raíz de una potencia	Raíz de una raíz
$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n \cdot m]{\frac{a}{b}}$

Tabla 1

Ejemplo 3

Observa cómo se aplican las propiedades de la radicación en cada caso.

$$a. \sqrt[3]{-\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{64}} = \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$b. \sqrt{\frac{36}{49} \div \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{36}{49}} \div \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{6}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{30}{28} = \frac{15}{14}$$

$$c. \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$d. \sqrt{\frac{81}{256}} = \sqrt[2]{\frac{81}{256}} = \sqrt{\frac{81}{256}} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 4

Observa que $\sqrt{\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{36}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ pero $\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{36}} \neq \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Calcula cada raíz y relacionala con el valor que le corresponde.

$$a. \sqrt{\frac{25}{36}} \quad b. \sqrt[3]{\frac{125}{64}} \quad c. \sqrt{\frac{100}{49} \cdot \frac{1}{81}} \quad d. \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \quad \left(\frac{5}{2}\right) \quad \left(\frac{5}{6}\right) \quad \left(\frac{10}{63}\right)$$

Solución:

$$(b.) \frac{5}{4} \quad (d.) \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (a.) \frac{5}{6} \quad (c.) \frac{10}{63}$$

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

Ten en cuenta

Para calcular la raíz de una expresión decimal, lo más conveniente es expresarla primero como una fracción. Por ejemplo:

$$\sqrt{0,04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla cada raíz. Si no es posible, explica la razón.

a. $\sqrt{\frac{1}{9}}$ b. $\sqrt{\frac{64}{100}}$ c. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$
d. $\sqrt[3]{-\frac{8}{216}}$ e. $\sqrt{\frac{49}{81}}$ f. $\sqrt{-\frac{16}{36}}$

3 Calcula la raíz de las siguientes expresiones decimales.

a. $\sqrt{0,36}$ b. $\sqrt{0,04}$ c. $\sqrt[3]{0,343}$
d. $\sqrt{-0,027}$ e. $\sqrt{0,0081}$ f. $\sqrt{-0,008}$

4 Escribe el (los) número(s) que falta(n) en cada caso para que se cumpla la igualdad.

a. $\sqrt{\frac{\square}{64}} = \frac{5}{8}$ b. $\sqrt{\frac{121}{\square}} = \frac{11}{2}$
c. $\sqrt[3]{\frac{\square}{8}} = \frac{2}{3}$ d. $\sqrt{\frac{\square}{\square}} = -\frac{3}{4}$
e. $\sqrt{\frac{\square}{\square}} = -\frac{5}{6}$ f. $\sqrt{\frac{81}{\square}} = \frac{3}{5}$

5 Aplica las propiedades de la radicación de números racionales y resuelve.

a. $\frac{\left(\sqrt{\frac{81}{25}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{27}}}{\sqrt{\frac{144}{36}}}$ b. $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}}{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^4}}$
c. $\frac{\sqrt{\frac{144}{36}}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$ d. $\frac{\sqrt{\left(\frac{36}{81}\right)^2}}{\sqrt{361}}$
e. $\sqrt[4]{\frac{81}{16} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^0}$ f. $\sqrt[3]{\frac{64}{729} \div \frac{8}{27}}$
g. $\frac{\left(\sqrt{\frac{243}{32}}\right)^3}{\sqrt{5^0}}$ h. $\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{81}\right)^2}}{\sqrt{\frac{9}{16}}}$

Razonamiento

6 Califica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

- a. La raíz cuadrada de un número racional negativo siempre es un número racional negativo. ()
- b. La raíz cúbica de un número racional siempre es menor que su raíz cuadrada. ()
- c. La raíz cúbica de un número racional positivo siempre es un número racional positivo. ()
- d. La raíz cuadrada de un número racional positivo siempre es un número racional negativo. ()

Resolución de problemas

7 Una caja con forma de cubo tiene un volumen de $\frac{3375}{8}$ cm³. ¿Cuánto mide el lado de la caja?

8 Natalia se desplaza diariamente a su trabajo de la siguiente forma: recorre 25 km en línea recta, luego gira a su derecha 90° y recorre otros 15 km más en línea recta. Si se construyera una carretera que uniera con una línea recta la casa de Natalia con su trabajo,

- a. ¿recorrería menos distancia que en la actualidad?
- b. ¿cuántos kilómetros recorrería Natalia en esa nueva carretera de su casa al trabajo?
- c. Comenta con tus compañeros cómo resolviste los anteriores interrogantes.

9 La diagonal d de un rectángulo se calcula con la fórmula $d = \sqrt{l^2 + w^2}$. Si se sabe que el valor de $l = 20$ y $w = 15$, ¿cuánto mide la diagonal del rectángulo?

10 ¿Cuánto mide el lado y el perímetro del terreno de la Figura 1 que es de forma cuadrada?

Área = $\frac{64}{9}$ dam²

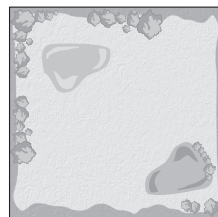


Figura 1

Ejercitación

2. a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{8}{10}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $-\frac{2}{6}$
e. $\frac{7}{9}$

f. No es posible porque la raíz cuadrada de un número negativo, no existe en los números racionales.

3. a. 0,6 b. 0,2 c. 0,7 d. -0,3
e. 0,09 f. -0,2

4. a. 25 b. 4 c. $\frac{8}{27}$
d. $\frac{9}{16}$ e. $\frac{25}{36}$ f. 625

5. a. $\frac{243}{50}$ b. $\frac{3}{32}$ c. 25 d. $\frac{4}{171}$
e. $\frac{3}{2}$ f. $\frac{2}{3}$ g. $\frac{27}{8}$ h. $\frac{4}{243}$

Razonamiento

6. a. F b. F
c. V d. F

Resolución de problemas

7. $\frac{15}{2}$ cm
8. a. Si, recorrería menos distancia
b. 29,15476 km
c. Respuesta abierta

9. 25

10. Lado: $\frac{8}{3}$ dam; Perímetro: $\frac{32}{3}$ dam

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes una operación combinada con números naturales que se haya resuelto conjuntamente con el tema de las operaciones combinadas en ese conjunto numérico; analice de igual forma y como aseguramiento del nivel de partida el procedimiento para resolver una operación combinada en el conjunto de los números enteros.
- Muestre a los estudiantes las semejanzas en el algoritmo de solución de las operaciones combinadas en cada conjunto numérico estudiado. Analice la diferencia de resolver una operación combinada con signos de agrupación donde se trabaja eliminado primero los signos y resolviendo las operaciones que ellos nos indican y las diferencia cuando estén en presencia de una operación combinada sin signos de agrupación y deban desarrollar primero la potenciación y radicación en el orden en que aparezcan, multiplicación y división en el orden en que aparezcan y suma y resta en el orden en que aparezcan.
- Realice las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿qué diferencia notaron en la resolución de las operaciones teniendo en cuenta los diferentes conjuntos numéricos?, ¿qué semejanzas percibieron en la resolución de dichas operaciones en los diferentes conjuntos numéricos?
- Proponga a los estudiantes ejercicios donde apliquen los conocimientos adquiridos en clases sobre el algoritmo de solución de las operaciones combinadas.

12

Operaciones combinadas con números racionales

Explora

Un bus tiene capacidad para 40 personas y hace cuatro paradas en su recorrido. En la primera parada, recoge $\frac{1}{2}$ de su capacidad; en la segunda deja a $\frac{4}{5}$ de las personas que recogió; en la tercera recoge a 8 personas, y en la última parada recoge una cantidad equivalente a la mitad de las personas que recogió en la primera parada.



• ¿Con cuántas personas llega el bus al final de su recorrido?



CULTURA del Buen Vivir

La confianza

A la hora de resolver una operación debes confiar en tus conocimientos; así mismo, cuando tienes un conflicto con algún compañero debes confiar en el apoyo que te puedan brindar tus maestros para buscar la mejor solución.

- En tu opinión, ¿qué característica debe tener una persona para ser buena mediadora de conflictos? Comparte tu respuesta con un compañero de clase.

Para determinar cuántas personas llegan al final del recorrido, se deben efectuar uno a uno los cálculos que se indican en cada parada del bus.

Parada 1. El bus recogió $\frac{1}{2}$ de 40 personas; es decir, recogió 20 personas, ya que $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$.

Parada 2. Dejó $\frac{4}{5}$ de las 20 personas que recogió; esto es, $\frac{4}{5} \cdot 20 = 16$ personas.

Parada 3. Recogió a ocho personas.

Parada 4. Recogió a tantas personas como la mitad de las que recogió al comienzo, o sea, recogió a $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ personas.

Si se quiere saber cuántas personas llegaron a la última parada, se efectúa esta cadena de operaciones:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 40\right) - \left(\frac{4}{5} \cdot 20\right) + 8 + \left(\frac{1}{2} \cdot 20\right) = 20 - 16 + 8 + 10 = 22$$

Por tanto, a la última parada llegaron 22 personas.

Los **polinomios aritméticos con números racionales** son expresiones que combinan números racionales con adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces.

Para solucionar un polinomio aritmético en el que no hay signos de agrupación, se deben realizar las operaciones que lo integran en el orden que se muestra a continuación.

- Se calculan las potencias y las raíces.
- Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha.
- Se efectúan las adiciones y las sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Observa cómo se resuelve un polinomio aritmético en el que no hay signos de agrupación.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \div \frac{7}{8} - \frac{4}{3} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \div \frac{7}{8} - \frac{4}{3} = \frac{3}{4} + \frac{40}{28} - \frac{4}{3} = \frac{71}{84}$$

Si en un polinomio aritmético hay signos de agrupación, se realizan en primer lugar todas las operaciones indicadas dentro de dichos signos, comenzando por el más interno; luego, se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 2

El polinomio $\frac{3}{4} + \left[-\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{23}\right) + \frac{5}{8}\right]$ se resuelve así:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \left[-\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{23}\right) + \frac{5}{8}\right] &= \frac{3}{4} + \left[-\left(\frac{22}{69}\right) + \frac{5}{8}\right] \\ &= \frac{3}{4} + \left(-\frac{22}{69} + \frac{5}{8}\right) = \frac{3}{4} + \frac{169}{552} = \frac{583}{552} \end{aligned}$$

Bloque de Álgebra y Funciones

Destrezas con criterios de desempeño:

Realizar operaciones combinadas en Q atendiendo la jerarquía de la operación.
Aplicar las propiedades algebraicas para la suma y la multiplicación de números racionales en la solución de ejercicios numéricos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 La fundación Amigos del Mañana quiere realizar un nuevo proyecto. Para ello, tiene una donación por un valor equivalente a los $\frac{4}{5}$ de \$ 12 800, y en el banco tiene unos ahorros de $\frac{1}{8}$ de los $\frac{3}{5}$ de \$ 25 400. ¿Con cuánto dinero cuenta la fundación para el proyecto?

Solución:

La expresión matemática que representa la situación y su solución se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{5} \cdot 12\,800 \right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5} \cdot 25\,400 \right) \\ &= (10\,240) + \left(\frac{3}{40} \right) \cdot (25\,400) \\ &= (10\,240) + 1\,905 = 12\,145 \end{aligned}$$

La fundación cuenta con \$ 12 145 para desarrollar el nuevo proyecto.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Calcula el resultado de cada operación.

- a. $\frac{2}{9} - \left[\frac{5}{4} + \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{2}{3}$
- b. $\left[\frac{7}{4} - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} \right) \right]^2 - \frac{1}{9}$
- c. $\frac{3}{4} - \left\{ \frac{2}{5} + \left[\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$
- d. $\left[\left(\frac{4}{7} \right)^3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} \right) \right]^2$

- 3 Indica si cada igualdad es verdadera (V) o falsa (F).

- a. $-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} + \left(-\frac{6}{9} \right) = -\frac{67}{12}$ ()
- b. $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) - \frac{1}{9} = \frac{29}{45}$ ()
- c. $2 - \left(-\frac{7}{4} \right)^2 + \left(-\frac{5}{8} \right) = -\frac{16}{27}$ ()
- d. $-\frac{7}{12} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) - 5 = -\frac{33}{8}$ ()
- e. $\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) + \left(-\frac{1}{6} \right) \div \frac{3}{7} = -\frac{343}{72}$ ()

Razonamiento

- 4 Coloca los paréntesis en el lugar adecuado para que se cumplan las siguientes igualdades.

- a. $\frac{2}{6} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6} = -\frac{11}{24}$
- b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \div \frac{4}{7} + \frac{3}{5} = \frac{35}{164}$
- c. $\frac{3}{5} \div \frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{18}{5}$
- d. $\frac{2}{8} \div \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{3}{9} = \frac{11}{4}$
- e. $\frac{3}{7} \div \frac{4}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{8} = -\frac{89}{140}$

Resolución de problemas

- 5 Samuel inicia su juego favorito "Viaje Extremo" con 60 puntos. Al superar cada uno de los cuatro niveles del juego, obtuvo los siguientes resultados: en el primer nivel logró $\frac{1}{5}$ de sus puntos de inicio, en el segundo nivel obtuvo $\frac{2}{8}$ de esos puntos, en el tercer nivel perdió el doble de los puntos que ganó en el primer nivel y en el último nivel ganó 5 puntos. Si para ganar se requieren 100 puntos al final del último nivel, explica si Samuel lo logró.

Ejercitación

2. a. $-\frac{443}{180}$ b. $\frac{41}{3600}$
- c. $\frac{1}{60}$ d. $-\frac{5749}{4116}$
3. a. V b. F
- c. F d. V
- e. F

Razonamiento

4. Verificar validez de la respuesta
5. Samuel al final del juego acumuló 68 puntos, por lo tanto no lo logró.

UNIDAD
2

Evaluación sumativa

Nombre:

Grado: Fecha:

1. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales

A. 4,37 =

B. 0,35 =

C. 5,461 =

2. Realiza las siguientes operaciones con 3 cifras decimales por exceso y por defecto.

A. $\sqrt{10} - \sqrt{5}$

B. $\sqrt{13} - \sqrt{17}$

C. $\sqrt{37} + \sqrt{50}$

D. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

E. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}$

F. $\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}$

3. Representa en una recta numérica los resultados de las siguientes operaciones:

A. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$

B. $\frac{7}{2} + \frac{5}{4} =$

C. $\frac{25}{3} - \frac{9}{36} =$

D. $\frac{15}{2} - \frac{3}{24} =$

4. Resuelve las operaciones planteadas.

A. $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{8}{5} + \frac{4}{15}\right) - \left(\frac{36}{21} \div \frac{48}{15}\right) + \frac{13}{10}$

B. $\sqrt[3]{\left(\frac{6}{5} - \frac{9}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{14}{15} - \left(\frac{4}{5}\right)^2} + \frac{1}{15}$

5. Resuelve las siguientes operaciones.

A. $\frac{6}{13} + \frac{5}{26} - \frac{13}{2} + \frac{1}{5} - \frac{9}{13}$

B. $\frac{8}{3} + \frac{10}{7} - \frac{36}{5} + \frac{1}{10} - \frac{19}{7}$

C. $\frac{16}{5} - \frac{21}{4} + \frac{13}{8} - \frac{61}{10} + \frac{13}{2}$

6. Halla el resultado.

A. $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

B. $\left(-\frac{8}{3}\right)^5$

C. $\left(-\frac{4}{9}\right)^3$

D. $-\left(\frac{6}{5}\right)^3$

E. $-\left(\frac{3}{7}\right)^2$

F. $-\left(\frac{13}{14}\right)^2$

G. $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$

H. $\sqrt[3]{-\frac{216}{343}}$

I. $\sqrt{\frac{400}{361}}$

J. $\sqrt{\frac{256}{225}}$

K. $\sqrt[3]{\frac{512}{125}}$

L. $\sqrt[4]{\frac{625}{1296}}$

7. La solución de $\sqrt{\frac{79}{49} + \frac{21}{49} + \left[\frac{10}{9} - \left(-\frac{8}{3} + \frac{1}{4}\right)^2\right]}$ es:

A. $-\frac{1109}{336}$

B. $\frac{568}{336}$

C. $\frac{1109}{336}$

D. $-\frac{704}{305}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones.

A. $x - \frac{3}{5} = -\frac{3}{10}$

B. $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{3} - m$

9. Realiza las siguientes operaciones con 3 cifras decimales por exceso y por defecto.

A. $\sqrt{4}$

B. $\sqrt{121}$

C. $\sqrt[3]{343}$

D. $\sqrt[3]{512}$

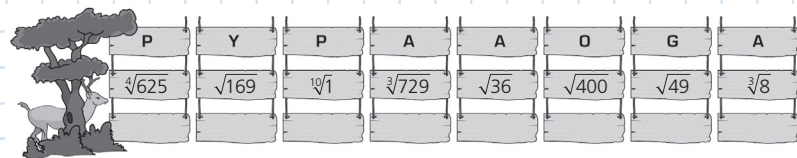
E. $\sqrt[3]{125}$

F. $\sqrt{144}$

G. $\sqrt[3]{216}$

H. $\sqrt{10\,000}$

10. Calcula las raíces y ordénalas de menor a mayor. Luego, descubre el nombre de un animal.



11. Representa en una recta numérica los siguientes números.

$$-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}; \frac{13}{2}; 2; -0,5; \frac{6}{4}$$

12. Aplica la regla del producto para hallar el valor de la incógnita.

A. $\frac{x}{6} = 1$

B. $\frac{3x}{4} = 24$

C. $\frac{x}{4} = 8$

UNIDAD

3

Evaluación diagnóstica

Nombre:

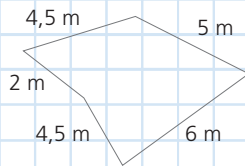
Grado: Fecha:

1. Daniel y su hermano construyen una caja con las siguientes características.
12 vértices, 8 caras y 18 aristas.
¿Qué forma tiene la caja que construyeron?

- A. Prisma pentagonal
B. Pirámide pentagonal
C. Prisma hexagonal
D. Pirámide hexagonal

2. El terreno donde están los tapires tiene la forma y las dimensiones que se observan en la figura.
¿Cuál es el perímetro del terreno?

- A. 20 m
B. 22 m
C. 18,5 m
D. 19,5 m

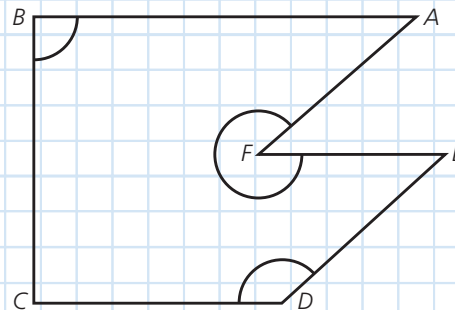


3. Las líneas que están resaltadas en el monumento son:



- A. perpendiculares
B. paralelas.
C. oblicuas
D. cerradas

4. La forma de la pista de atletismo donde Bernardo trota diariamente está representada en el siguiente plano:



Una de las parejas de segmentos paralelos en el plano de la pista es:

- A. $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$
B. $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$
C. $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$
D. $\overline{BC}$ y $\overline{AF}$

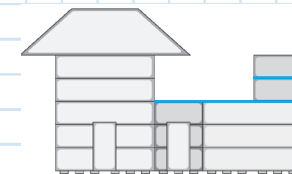
5. Una de las parejas de segmentos perpendiculares en el plano de la pista es:

- A. $\overline{BA}$ y $\overline{AF}$
B. $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$
C. $\overline{FE}$ y $\overline{CD}$
D. $\overline{BC}$ y $\overline{AF}$

6. Si se observa la representación de la pista de atletismo se puede afirmar que la unidad más adecuada para medir su superficie es:

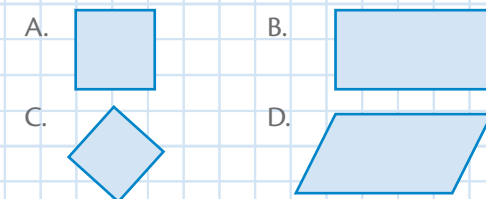
- A. el decímetro cuadrado
B. el centímetro cuadrado
C. el milímetro cuadrado
D. el metro cuadrado

7. Las dos rectas resaltadas en la ilustración de una casa son:



- A. oblicuas
B. paralelas
C. perpendiculares
D. secantes

8. El corral del criadero de pavos del abuelo de Tomás tiene forma de rombo. La figura que mejor representa el corral es:



Propósito de la unidad

Bloque de geometría y medida

En esta unidad se abordarán los temas relacionados con las figuras planas y los cuerpos geométricos. Se demostrará a los estudiantes la diferencia entre ambos conjuntos pues las figuras planas tienen todos sus puntos contenidos en un mismo plano y los cuerpos geométricos no. Conocerán sobre la historia de las matemáticas al abordar algunos científicos matemáticos como referencia para desarrollar determinados temas.

Aprenderán a distinguir y reconocer entre una figura y un cuerpo, además de conocer el nombre con que se estudian ambas ramas dentro de la matemática; la parte de la geometría que se dedica al estudio de las figuras planas se llama geometría plana ó planimetría y la que se dedica al estudio de los cuerpos es la geometría del espacio.

Se especificarán los conceptos de poliedros, polígonos, cuerpos geométricos, cuerpos redondos no se especificarán los cuerpos como el cilindro, cono y esfera; se enfatizará en los conceptos de cuadrilátero, paralelogramo; además de tratar en la unidad los elementos, propiedades, semejanzas y características tanto de las figuras como de los cuerpos a tratar.

En esta unidad se hará énfasis en los conceptos, características, elementos y propiedades de las figuras planas y los cuerpos geométricos como aseguramiento para desarrollar posteriormente el cálculo de áreas de ambos conjuntos y el volumen de los cuerpos así como su desarrollo, utilidad e importancia en la vida práctica.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar los conceptos en los que se pueden encontrar dificultades. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo que se proponen diferentes actividades para asegurar las bases para un excelente desarrollo, por parte del docente y comprensión por parte de los estudiantes. Se evaluarán temas correspondientes al reconocimiento de las figuras planas y los cuerpos geométricos de forma simple y a modo de recordatorio pues algunos temas han sido abordados en grados anteriores.

se evaluarán además algunos elementos geométricos así como el paralelismo entre rectas. se evaluará también el nivel de fijación de contenidos antes estudiados por los estudiantes, como es el caso del cálculo de perímetro contenido que desde grados anteriores se viene trabajando con los estudiantes.

Formativa

Para desarrollar las destrezas con criterios de desempeño, enfocado a los cuerpos geométricos y las figuras planas, los estudiantes deberán identificar cuando se está en presencia, atendiendo a sus características y elementos, de un cuerpo geométricos o en presencia de una figura plana. Aplicarán los conocimientos adquiridos en la

interpretación de los conceptos y los elementos que los distinguen a demás de reconocer, observando el dibujo, si es el de una figura plana o un cuerpo geométrico.

Sumativa

Para evidenciar si los estudiantes interpretaron bien los conceptos, planteados por el docente y teniendo en cuenta el programa y plan de estudio, se desarrollarán las destrezas con criterio de desempeño propuestas en esta unidad, se evaluarán los temas impartidos mediante la misma con ejercicios sencillos e integradores donde los estudiantes serán capaces de aplicar los nuevos conocimientos y desarrollar las destrezas adquiridas sobre los temas evaluados.

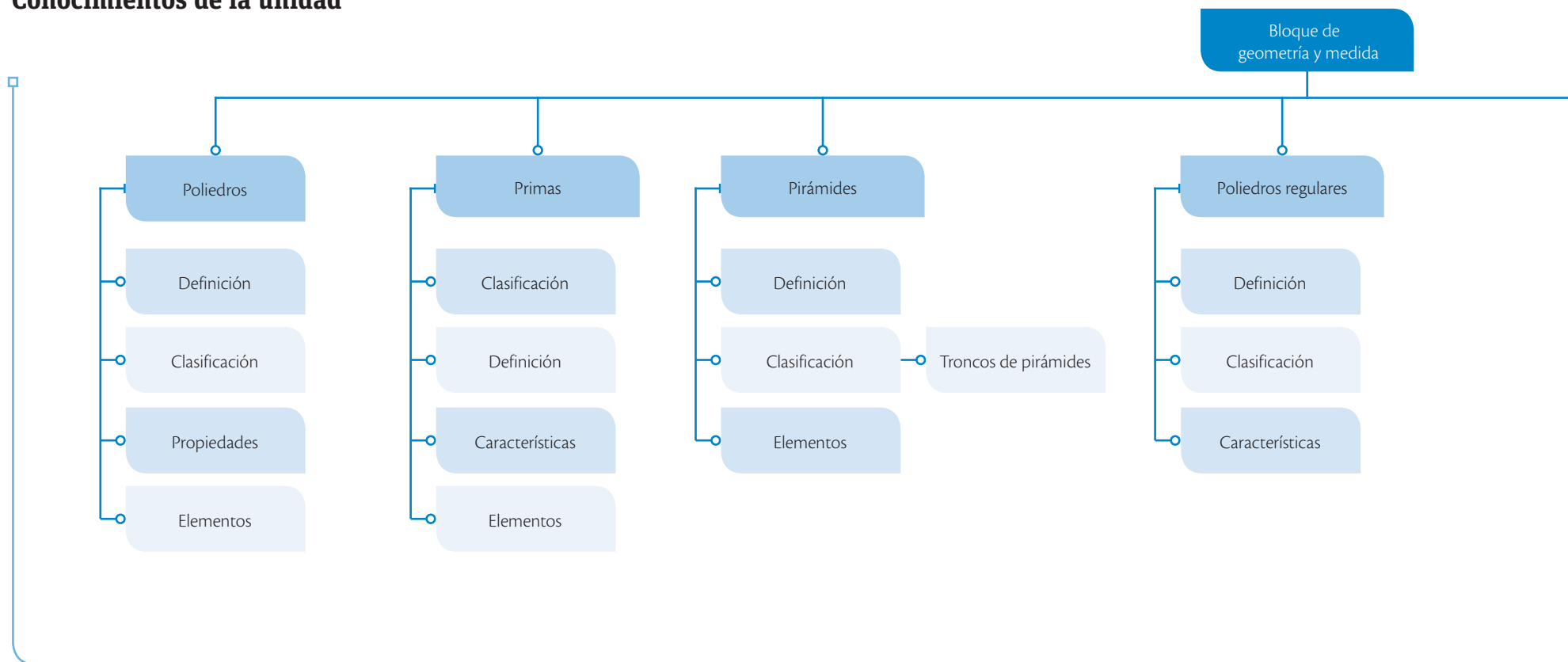
Respuestas

Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	6	7	8
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D

Esquema conceptual

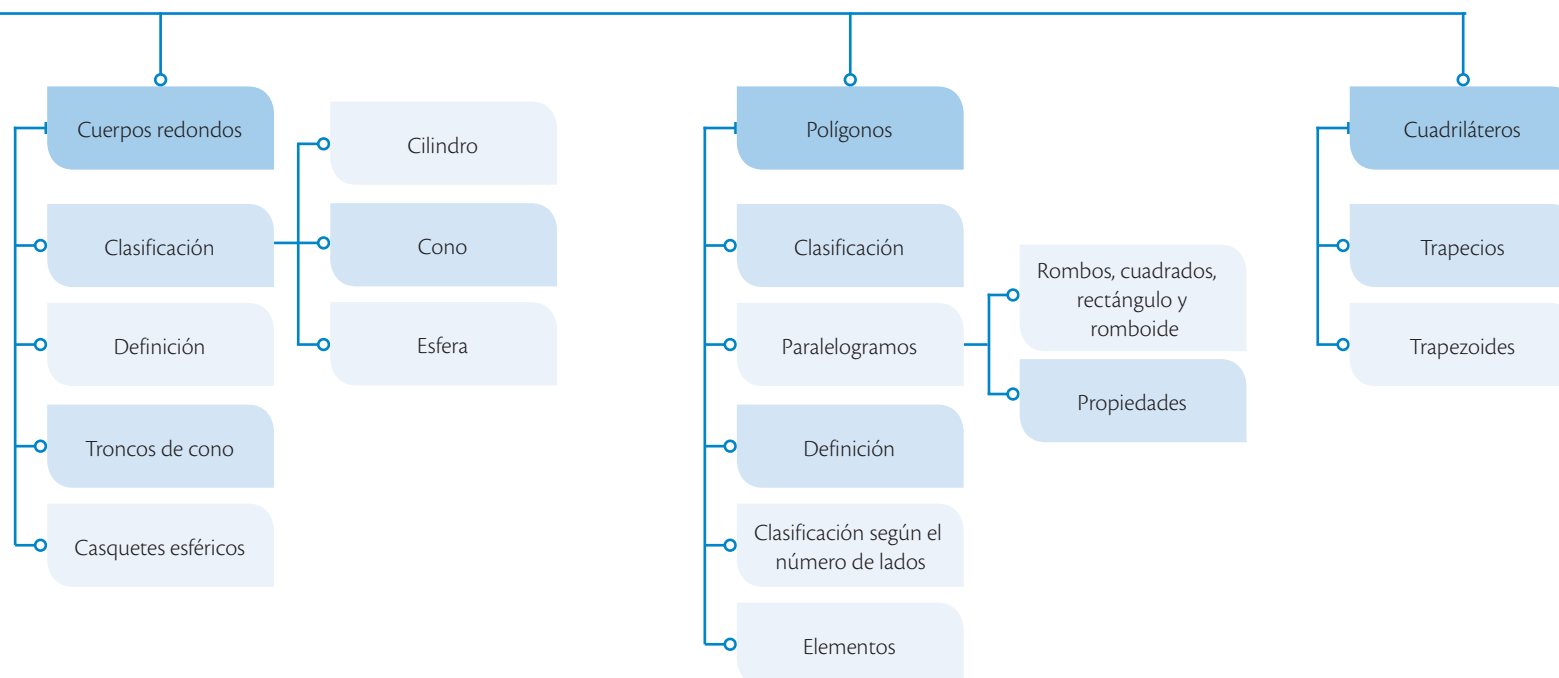
Conocimientos de la unidad



Cultura del Buen Vivir

■ Valor: La cooperación

El valor de la cooperación consiste en trabajar en equipo con el fin de lograr un objetivo en común.



■ Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad los estudiantes serán capaces de aplicar los temas en la vida cotidiana relacionando los cuerpos geométricos con figuras conocidas, aprenderán a reconocer las similitudes y diferencias entre los cuadriláteros, y a cooperar con sus compañeros para que puedan interpretar de manera rápida y sencilla los nuevos contenidos.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 3: cuerpos geométricos y figuras planas				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.2. – OG.M.3.		O.M.4.5.		
Objetivos de subnivel		Valores		
OI.4.8. – OI.4.12.		• La cooperación (I.3., I.4.)		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.6.		I.M.4.6.3.		
Objetivos de la unidad				
• Identificar paralelogramos y trapecios a partir del análisis de sus características y propiedades. • Clasificar polígonos regulares e irregulares según sus lados y ángulos. • Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos. • Reconocer prismas y pirámides en objetos de su entorno y afianzar la adquisición de modelos geométricos y sus características. • Reconocer, comparar y clasificar polígonos regulares e irregulares como conceptos matemáticos y como parte de los objetos del entorno, que permiten una mejor comprensión del espacio que lo rodea y para la resolución de problemas. • Reconocer, comparar y clasificar polígonos regulares e irregulares como conceptos matemáticos y como parte de los objetos del entorno, que permiten una mejor comprensión del espacio que lo rodea y para la resolución de problemas.				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Geometría y medida	• Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.	• Socialice con los estudiantes el concepto de cuerpos de revolución. • Active el conocimiento sobre los triángulos rectángulos, los rectángulos etc. • Converse con los estudiantes sobre el eje en el que debe girar el triángulo rectángulo para llegar a engendrar el cono; muestre a los estudiantes que se hace girar el triángulo rectángulo sobre unos de sus catetos. Pregunte a los estudiantes: ¿Cómo obtener un cilindro?, ¿Qué figura plana utilizamos para aplicar el procedimiento de hacerla girar sobre su lado más largo y convertirla en un cilindro? Muestre a los estudiantes ambas transformaciones.	• Clasifica poliedros de acuerdo a sus características. • Identifica cuerpos redondos.	Actividad: establezca la relación entre los cuerpos y las características que los conforman.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Geometría y medida	- Clasificar polígonos regulares e irregulares según sus lados y ángulos. - Clasificar cuadriláteros según sus lados y ángulos.	- Aclare los términos de cuerpo de revolución ya que son ambas figuras planas conocidas que ha sufrido transformaciones y se ha convertido en cuerpos geométricos. - Muestre a los estudiantes la relación existente entre el volumen del cilindro y el volumen del cono. - Pídales que mencionen los cuerpos geométricos estudiados, sus características y propiedades.	- Calcula elementos de poliedros y cuerpos redondos. - Reconoce distintos tipos de polígonos.	Técnica: observación Instrumento: registro descriptivo
Recursos: Balones de futbol, cajas de cartón pequeñas, medianas y grandes de embase de medicamentos y alimentos; láminas con los paralelogramos. gorros de cumpleaños de forma cónica.etc.				
Bibliografía: Libro de texto básico de matemática octavo grado.				

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes el concepto de polígono, ya que una de las características fundamentales de los poliedros es que es un cuerpo geométrico limitado por polígonos, por tanto es necesario abordar de forma simple el concepto de polígono como la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada que incluye a esta poligonal; para que los estudiantes logren interpretar el concepto de poliedro y se familiaricen con el tema.
- Muestre a los estudiantes varios ejemplos de poliedros relacionados con la vida práctica para una mayor asociación del tema con lo práctico y social. Recuerde que es una línea poligonal cerrada.
- Analice con los estudiantes los elementos que componen a los poliedros, estos son: las caras que son los polígonos que lo limitan; de ahí la necesidad del concepto; los vértices, que son los puntos donde concurren los polígonos, o sea, las caras y finalmente, las aristas que son los lados de las caras, en este caso de los polígonos.
- Socialice con los estudiantes la clasificación de los poliedros según la medida de sus ángulos. (Recuerde los términos cóncavo y convexo en el estudio y clasificación de los triángulos para asegurar el nivel de partida del tema). Muestre a los estudiantes ejemplos de poliedros cóncavos y convexos como los del libro de texto página 114 ejemplos 3, 4, 5 y 6.

1

Poliedros

Explora

En las narraciones de partidos de fútbol, usualmente los comentaristas se refieren al balón como "al esférico"; sin embargo, la realidad es que este balón no es totalmente esférico, sino que está limitado por polígonos.

- ¿Qué tipo de polígonos forman un balón de fútbol?

Elementos de un poliedro

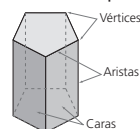


Figura 2

Ten en cuenta

Las cajas en las que se empaquetan algunos productos de la canasta familiar tienen forma de poliedros.



El balón de fútbol es un cuerpo geométrico de 32 caras poligonales, doce pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares, que se curvan cuando el balón está bien inflado. Las 32 caras de este cuerpo se obtienen al truncar un cuerpo geométrico llamado icosaedro, el cual está formado por 20 triángulos equiláteros (Figura 1).



Icosaedro



Icosaedro truncado



Balón de fútbol

Figura 1

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos.

En la Figura 2 se identifican los elementos de un poliedro.

- Las **caras**, que son los polígonos que lo limitan.
- Las **aristas**, que son los lados de las caras.
- Los **vértices**, que son los puntos donde concurren tres o más caras.

Los poliedros se clasifican según la medida de sus ángulos en **convexos**, si todos sus ángulos diedros son convexos, y en **cóncavos**, si alguno de sus ángulos diedros es cóncavo.

Ejemplo 1

En las figuras 3 y 4 se observan dos poliedros cóncavos, y en las figuras 5 y 6 dos poliedros convexos.

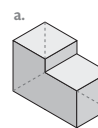


Figura 3



Figura 4

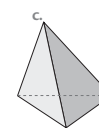


Figura 5

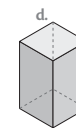


Figura 6

En los poliedros convexos existe una relación entre el número c de caras, el número v de vértices y el número a de aristas:

$$c + v = a + 2$$

Esta igualdad se llama **relación de Euler**.

Actividad resuelta

Ejercitación

- Comprueba que los poliedros de las figuras 7 y 8 cumplen la relación de Euler.

Solución:

Poliedro A: $c + v = a + 2 \Rightarrow 7 + 7 = 12 + 2$

Poliedro B: $c + v = a + 2 \Rightarrow 9 + 14 = 21 + 2$

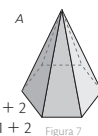


Figura 7

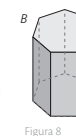


Figura 8

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Identifica en tu salón de clase tres objetos que tengan
 - forma de poliedro convexo y comprueba que se cumple la relación de Euler en cada uno de ellos.
3. Indica cuáles de los cuerpos geométricos de las figuras
 - 9 a 14 son poliedros. En caso de serlo, clasifícalos en cóncavos y convexos.

a.

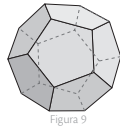


Figura 9

b.

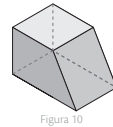


Figura 10

c.

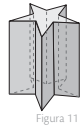


Figura 11

d.

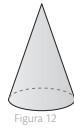


Figura 12

e.

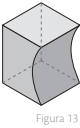


Figura 13

f.

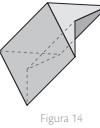


Figura 14

4. Completa la Tabla 1 con los elementos de poliedros convexos. Utiliza la relación de Euler.

Número de caras	Número de vértices	Número de aristas
6		12
16	10	
5		9
	14	24
8		18
	7	12

Tabla 1

Razonamiento

5. Comprueba la relación de Euler para cada poliedro de las figuras 15 a 17.

a.



Figura 15

b.

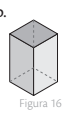


Figura 16

c.



Figura 17

Comunicación

6. Observa el poliedro de la Figura 18.

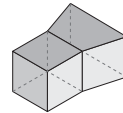


Figura 18

- a. ¿Cómo está formado este poliedro?
 - b. Comprueba si se cumple o no la relación de Euler.
7. Determina si un poliedro convexo puede tener
 - a. ocho caras, diez aristas y ocho vértices.
 - b. cinco caras, cinco aristas y cinco vértices.
 - c. quince caras, veinte aristas y diez vértices.
 - d. cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas.
 8. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).
 - a. En un poliedro, el menor número de aristas que concurren en un vértice es tres. ()
 - b. Para cualquier poliedro el número de caras, vértices y aristas siempre es par. ()
 - c. En cada vértice de un poliedro siempre concurren el mismo número de aristas. ()
 - d. El número de aristas de un poliedro siempre es mayor que el número de vértices. ()

Resolución de problemas

9. Dos poliedros son conjugados cuando tienen el mismo número de aristas y el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro, y viceversa. Dibuja dos poliedros conjugados.

10. Carolina recortó uno de los vértices de un cubo para construir un adorno navideño (Figura 19).

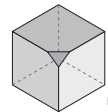


Figura 19

Si continúa recortando todas las esquinas del cubo,

- a. ¿cómo estará formado el poliedro obtenido?
- b. ¿en el nuevo poliedro se cumple la relación de Euler? Comprueba.

Ejercitación

2. Respuesta abierta
3. a. Poliedro convexo b. Poliedro convexo
c. Poliedro cóncavo d. No es poliedro
e. No es poliedro f. Poliedro cóncavo

4.

Número de caras	Número de vértices	Número de aristas
6	8	12
16	10	24
5	6	9
12	14	24
8	12	18
7	7	12

Razonamiento

5. a. 5 caras, 5 vértices y 8 aristas: $5 + 5 = 8 + 2$
b. 6 caras, 8 vértices y 12 aristas: $6 + 8 = 12 + 2$
c. 5 caras, 6 vértices y 9 aristas: $5 + 6 = 9 + 2$

Comunicación

6. a. Es la unión de dos poliedros de seis caras cada uno.
b. Caras: 10, Vértices: 12, Aristas: 20 Si se cumple que $10 + 12 = 20 + 2$

7. a. No b. No c. No d. Sí

8. a. V b. F c. F d. V

Resolución de problemas

9. El cubo y el octaedro
10. a. 14 caras, 24 vértices y 36 aristas
b. Sí se cumple porque $14 + 24 = 36 + 2$

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes los conceptos estudiados hasta el momento de poliedro y polígono, cuándo son cóncavos y cuándo convexos, para asegurar el nivel de partida del tema refrescando los conocimientos adquiridos en las clases anteriores.
- Proponga a los estudiantes, una vez analizado el concepto de prisma, que comparen los elementos de los poliedros con los elementos del prisma; poliedros (vértice, caras y las aristas); los prismas (las bases son dos polígonos congruentes y paralelos, la altura que es la distancia establecida entre las bases, y las caras laterales que son paralelogramos).
- Muestre a los estudiantes la clasificación de los prismas según sus bases, proporcione ejemplos de la vida cotidiana de los mismos para una mayor familiarización del contenido con lo cotidiano. Muestre a los estudiantes que su libro de matemática, la caja de tizas de la profesora, la computadora, la caja de colores y los bloques de letras, representan prismas en la vida cotidiana.
- Analice detenidamente con los estudiantes que los prismas se denominan por el número de lados de los polígonos de sus bases, así si sus bases son triángulos, se llama prisma triangular; si son cuadriláteros, cuadrangular; si son pentágonos, pentagonal. Muestre a los estudiantes un prisma regular o recto donde sus bases sean un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular entre otros.

Prismas

Explora

María desea construir una caja para empacar el regalo que le dará a su hermano en su cumpleaños; para ello, recortó un cartón en la forma que lo indica la Figura 2.

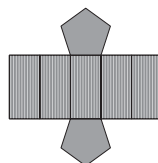


Figura 2

- ¿Qué poliedro obtendrá al construir el empaque? ¿Cómo son sus caras?

Ten en cuenta

Un prisma es **convexo** si el polígono de sus bases es convexo. En caso contrario, el prisma es **cóncavo**.

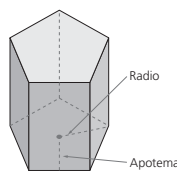


Figura 5



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

<http://www.mundoprimeria.com/juegos/matematicas/figuras-geometricas/3-primaria/132-juego-figuras-geometricas-caras/index.php>

Obtén más información acerca de los prismas y sus desarrollos.

Al doblar y pegar el cartón se obtiene el prisma de la Figura 1, el cual está formado por dos pentágonos congruentes y cinco rectángulos congruentes. Como los pentágonos son las bases del prisma, el poliedro obtenido recibe el nombre de **prisma pentagonal**.



Figura 1

Un **prisma** es un poliedro que tiene dos polígonos congruentes y paralelos que se llaman **bases**. Las caras restantes son paralelogramos, y se denominan **caras laterales**. La distancia entre las bases es la **altura** del prisma.

Los prismas se nombran según el polígono de sus bases como triangular, rectangular, pentagonal, hexagonal, etc., y se clasifican en **rectos**, si todas sus caras laterales son rectángulos, u **oblicuos**, si alguna de las caras laterales no es un rectángulo.

Ejemplo 1

En las figuras 3 y 4 se observan dos prismas hexagonales, uno recto y otro oblicuo, respectivamente. La altura del prisma recto coincide con las aristas laterales, mientras que la altura del prisma oblicuo es menor que la longitud de las aristas, ya que en los prismas oblicuos las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

a.

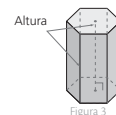


Figura 3

b.

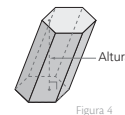


Figura 4

Los prismas también se pueden clasificar según la forma de sus caras laterales y según la forma de sus bases, tal como se muestra a continuación.

1. Si la base es o no un polígono regular.

En los **prismas regulares** se distinguen dos elementos nuevos: la **apotema**, que es el segmento que une el centro de la base con el punto medio de uno de los lados de dicha base, y el **radio**, que es un segmento que une el centro de la base con un vértice de la misma (Figura 5).

2. Si las bases son o no paralelogramos.

Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas caras, incluidas las bases, son todas paralelogramos. Según el tipo de paralelogramo que formen sus caras, los paralelepípedos se clasifican como se muestra en las figuras 6 a 9.

Ortoedro

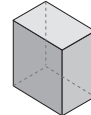


Figura 6

Las caras son rectángulos.

Romboedro

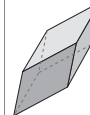


Figura 7

Las caras son romboides.

Romboedro

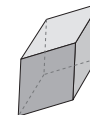


Figura 8

Las caras son rombos.

Cubo

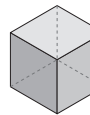


Figura 9

Las caras son cuadrados.

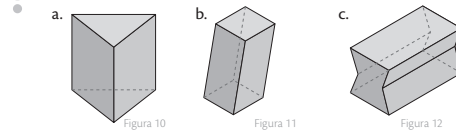
Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Nombra los prismas de las figuras 10 a 12 y clasifícalos.



Solución:

- a. Prisma triangular convexo y recto.
- b. Prisma cuadrangular convexo y oblicuo.
- c. Prisma hexagonal cóncavo y recto.

Ten en cuenta

A la reunión de las caras laterales de un prisma se le denomina **superficie lateral**; mientras que a la reunión de las caras laterales y las dos bases de un prisma se le conoce como **superficie total**.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Clasifica cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera (V) o falsa (F).

- a. En todo prisma regular, la longitud de la apotema es menor que la longitud del radio. ()
- b. La altura de un prisma es una arista del prisma. ()
- c. Si un prisma es recto, todas las aristas laterales son iguales. ()

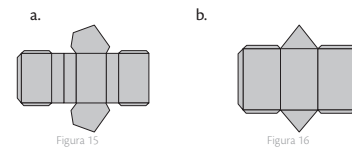
Ejercitación

3 Calcula la suma de las medidas de los ángulos de las caras que concurren en los vértices indicados en las figuras 13 y 14. Ten en cuenta que los prismas son regulares y sus caras laterales son rectángulos.



Comunicación

4 Determina qué prisma se forma con los desarrollos en el plano de las figuras 15 y 16.



Razonamiento

5 Calcula el número de caras de un prisma que tiene doce aristas y ocho vértices. Luego, responde.

- a. ¿Es posible saber qué prisma es?
- b. Si todas sus caras son rombos, ¿Cómo se llama el prisma?

Resolución de problemas

6 Un envase tetrapack de leche mide 10 cm de largo, 6,5 cm de ancho y 16,5 cm de alto. En un paquete se empaquetan seis de ellos.



- a. ¿Qué cuerpo geométrico forma el paquete?
- b. Dibuja el desarrollo en el plano del paquete e indica sus dimensiones.

7 Para la semana de la ciencia, Pilar y sus compañeros de clase van a construir poliedros con los que decorarán el aula. ¿Cómo deben dibujar el desarrollo en el plano de los siguientes poliedros?

- a. Un prisma cuadrangular de base 5 cm.
- b. Un tetraedro de 8 cm de lado.
- c. Un cubo de 6 cm de lado.



Razonamiento

- 2. a. V b. F c. V

Ejercitación

- 3. a. 240° b. 288°

Comunicación

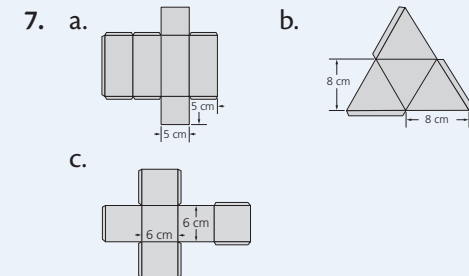
- 4. a. Prisma hexagonal convexo
- b. Prisma triangular convexo

Razonamiento

- 5. Seis caras
- a. Sí, un paralelepípedo
- b. Romboedro

Resolución de problemas

- 6. a. Ortoedro
- b. Respuesta abierta



Ampliación conceptual

Denominamos pirámide al cuerpo geométrico limitado por un polígono cualquiera de n lados, contenido en un plano ∞ y por n triángulos, uno por cada lado del polígono, los cuales concurren en un vértice común que no pertenece al plano ∞ .

Recomendaciones para desarrollar la lección

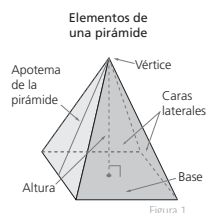
- Menciona a los estudiantes que una de las siete maravillas del mundo son las pirámides de Egipto, construidas hace más de 5000 años; en la construcción de dichas pirámides se empleó el trabajo de más de 100 000 hombres y su construcción duró aproximadamente treinta años.
- Muestre a los estudiantes figuras que representen pirámides. Pida que nombren las pirámides. Los estudiantes para nombrarlas, primero deben plantear el vértice la base y después el vértice en que concurren sus aristas laterales. Así la pirámide obtendrá el nombre, por ejemplo de ABCDE. Muestre a los estudiantes una figura con estas características para que determinen sus elementos.
- Mencione a los estudiantes la definición de pirámide regular: es una pirámide recta cuyas bases son polígonos regulares, es decir, un polígono que tiene todos sus lados de igual longitud y todos sus ángulos interiores de igual amplitud, por ejemplo: un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, etc. Las caras de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales. La altura de estos triángulos recibe el nombre de apotema.

Pirámides

Explora

En la antigüedad, diversas civilizaciones construyeron pirámides principalmente con fines religiosos o funerarios.

- ¿Qué características en común tienen estas construcciones?



Ten en cuenta

La pirámide del Sol, descubierta en el 2005, es la más grande del mundo. Esta se encuentra en Bosnia-Herzegovina y su altura es de 220 m.

Algunas de las pirámides más antiguas y conocidas son las pirámides de Guiza, la pirámide Cestia y la pirámide Roja.



En las fotografías se observa que estas construcciones tienen cinco vértices, ocho aristas, una base cuadrada y cuatro triángulos que corresponden a sus caras laterales.

Una **pirámide** es un poliedro cuya **base** está determinada por un polígono y sus **caras laterales** están formadas por triángulos que concurren en un mismo punto llamado **vértice**.

En la Figura 1 se observan los elementos de una pirámide de base cuadrangular.

- La base es un cuadrado, y sus cuatro caras laterales son triángulos isósceles que concurren en el vértice.
- La **altura de la pirámide** es la medida del segmento perpendicular que va de su vértice a su base.
- La **apotema de la pirámide** es la altura de cada una de las caras laterales de la pirámide.

3.1 Clasificación de las pirámides

Las pirámides se pueden clasificar como triangulares, rectangulares, pentagonales, hexagonales, etc., o en **cóncavas** y **convexas**, según el tipo de polígono de la base. También pueden ser **rectas**, si sus caras laterales son triángulos isósceles, u **oblicuas**, si alguna de las caras no es un triángulo isósceles.

Ejemplo 1

En las figuras 2 a la 4 se muestran una pirámide triangular, una pirámide hexagonal y una pirámide pentagonal, respectivamente.



Figura 2

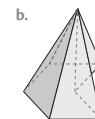


Figura 3

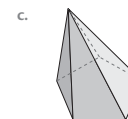


Figura 4

3.2 Troncos de pirámide

Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base y se le quita la parte de arriba, el cuerpo resultante es un **tronco de pirámide** (Figura 5).

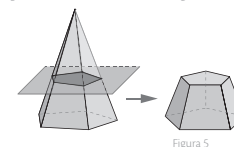


Figura 5

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Actividad resuelta

Comunicación

- 1 Nombra las pirámides de las figuras 6 a 8 y clasifícalas según sean cóncavas o convexas, rectas u oblicuas.



Figura 6

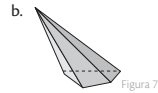


Figura 7



Figura 8

Solución:

- a. Pirámide heptagonal, convexa y recta.
b. Pirámide cuadrangular, convexa y oblicua.
c. Pirámide pentagonal, cóncava y recta.

CULTURA del Buen Vivir

La cooperación
Las personas que cooperan
siempre actúan pensando en
un bien común, dejando de
lado sus intereses particulares.

- Menciona un acto de cooperación que sea importante en tu familia.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 2 Relaciona cada pirámide con la descripción que le corresponde.

Pirámide hexagonal, convexa y oblicua.



Figura 9

Pirámide hexagonal, convexa y recta.



Figura 10

Pirámide pentagonal, cóncava y recta.



Figura 11

Pirámide cuadrangular, cóncava y recta.



Figura 12

Ejercitación

- 4 Completa la Tabla 1.

	N.º de aristas	N.º de vértices	N.º de caras
 Figura 15			
 Figura 16			
 Figura 17			

Tabla 1

Resolución de problemas

- 5 Miguel y Felipe fueron de campamento el fin de semana. Miguel asegura que la carpa tiene forma de pirámide, mientras que Felipe afirma que tiene forma de prisma. A partir de la Figura 18, decide quién tiene la razón. Justifica tu respuesta.



Figura 18

Razonamiento

- 3 Determina qué tipo de pirámide resulta de los desarrollos de las figuras 13 y 14.

a.

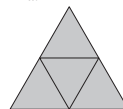


Figura 13

b.

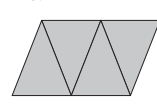


Figura 14

Comunicación

2. Pirámide hexagonal, convexa y oblicua.



Figura 13

Pirámide hexagonal, convexa y recta.



Figura 9

Pirámide pentagonal, cóncava y recta.



Figura 12

Pirámide cuadrangular, cóncava y recta.



Figura 11

Razonamiento

3. a. Pirámide triangular regular.
b. Pirámide triangular irregular

Ejercitación

- 4.

N.º de aristas	N.º de vértices	N.º de caras
10	6	6
8	5	5
15	10	7

Razonamiento

5. Felipe tiene la razón, la carpa es un prisma triangular.

Ampliación conceptual

Socialice un poco de historia de las matemáticas con los estudiantes, mencione que Johann Kepler (1571 – 1630), fue originario de Wurtemberg, uno de los numerosos estados alemanes de aquella época, fue un inminente astrónomo y matemático. Él dedicó prácticamente toda su vida al estudio, desarrollo y propaganda del sistema heliocéntrico de Copérnico. Analizando un enorme material de las observaciones astronómicas de Platón, en los años 1609-1619; descubrió las leyes del movimiento de los planetas que llevan su nombre.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Socialice con los estudiantes la definición de ángulo poliedro: es la región del espacio limitada por tres o más planos que se ordenan sucesivamente, según rectas que concurren en un mismo punto.
Un ángulo poliedro es convexo si está a un lado de cualquiera de sus ángulos planos.
- Muestre a los estudiantes que en la práctica se encuentran ejemplos de ángulos poliedros, por ejemplo, cada esquina del aula es un ejemplo de un ángulo triedro, en el vértice de la pirámide se forma un ángulo poliedro.
- Analice con los estudiantes los elementos que componen a los poliedros estos son: las caras que son los polígonos que lo limitan; de ahí la necesidad del concepto; los vértices, que son los puntos donde concurren los polígonos o sea las caras y finalmente las aristas que son los lados de las caras, en este caso de los polígonos.

Poliedros regulares

Explora

Los poliedros regulares convexos se conocen también como sólidos platónicos, pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por parte de Platón. Este filósofo asoció los poliedros regulares con los cuatro elementos de la naturaleza y con el universo.

- ¿Cuáles son los cinco sólidos platónicos y con cuál elemento fueron asociados en la antigüedad?

Ten en cuenta

Salvador Dalí pintó en 1995 en un dodecaedro una representación moderna de la obra de Leonardo da Vinci conocida como *La Última Cena*.

App

Poliedros

Abre la aplicación *iCross Lite* y observa los elementos de algunos poliedros.

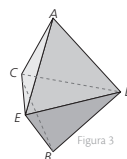


Figura 3

Los cinco sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. A continuación se muestra una representación de los cinco poliedros regulares convexos realizada por Johannes Kepler, con su respectiva asociación con los elementos que forman el universo.



Tetraedro (Fuego)



Cubo (Tierra)



Octaedro (Aire)



Dodecaedro (Universo)



Icosaedro (Agua)

Un **poliedro** es **regular convexo** si todas sus caras son polígonos regulares congruentes, sus ángulos diedros también son congruentes, y en cada vértice concurre el mismo número de caras y de aristas.

Ejemplo 1

Las características y elementos de cada poliedro regular se enuncian en la Tabla 1.

Poliedro regular	Polígono de sus caras	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras
Tetraedro	Triángulo equilátero	6	4	4
Cubo	Cuadrado	12	8	6
Octaedro	Triángulo equilátero	12	6	8
Dodecaedro	Pentágono regular	30	20	12
Icosaedro	Triángulo equilátero	30	12	20

Tabla 1

Ejemplo 2

Los poliedros que se observan en las figuras 1 y 2 son convexos regulares porque:

- Las caras de ambos poliedros son polígonos regulares congruentes. En este caso, son triángulos equiláteros.
- En todos los vértices concurre el mismo número de caras y de aristas. En la Figura 1, en cada vértice concurren tres caras y tres aristas, mientras que en la Figura 2 en cada vértice concurren cuatro caras y cuatro aristas.



Figura 1

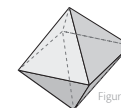


Figura 2

Actividad resuelta

Razonamiento

- Comprueba que el poliedro de la Figura 3 no es regular.

Solución:

Las seis caras del poliedro son triángulos equiláteros congruentes; sin embargo, no es un poliedro regular porque en los vértices A y B concurren tres aristas y tres caras, mientras que en los demás vértices concurren cuatro aristas y cuatro caras.

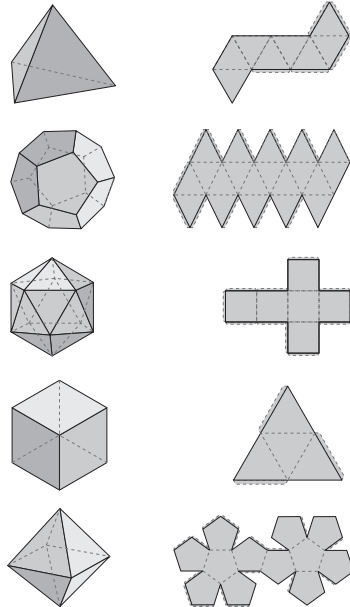
Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Desarrolla tus destrezas

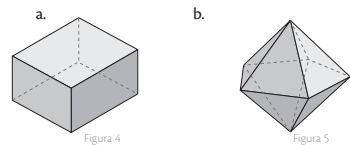
Modelación

2. Une con una línea cada poliedro regular con su respectivo desarrollo en el plano.



Comunicación

3. Explica por qué no son regulares los poliedros de las figuras 4 y 5.



4. Responde las preguntas.

- a. ¿Se puede obtener un poliedro regular uniendo dos pirámides cuadrangulares por sus bases?
b. Si tu respuesta es afirmativa, ¿qué poliedro se obtiene?

Modelación

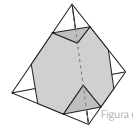
5. Dibuja tres desarrollos diferentes de un tetraedro.

Razonamiento

6. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
- Existe un poliedro regular cuyas caras son hexágonos. ()
 - El poliedro regular formado por el mayor número de triángulos equiláteros es el icosaedro. ()
 - En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras. ()
 - Toda pirámide de base triangular es un poliedro regular. ()

7. Lee y resuelve.

Si se realizan cortes planos y a la misma distancia de cada vértice de un sólido platónico, se obtienen los sólidos truncados. En la Figura 6 se observa el tetraedro truncado.



- ¿El tetraedro truncado es un poliedro regular? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene el tetraedro truncado?
- Describe las caras del tetraedro truncado.
- Explica la relación entre el número de caras, vértices y aristas del tetraedro y los elementos del tetraedro truncado.
- Dibuja el desarrollo del tetraedro truncado.

Resolución de problemas

8. La fluorita es un mineral utilizado en el proceso de fundición del hierro y del acero, y al cristalizarse se encuentra en la naturaleza adoptando diferentes formas poliédricas. Indica el tipo de poliedro que es la fluorita de la Figura 7.



Modelación

2. Verificar validez de la respuesta

Comunicación

3. Sus caras no son polígonos regulares congruentes.

Sus ángulos diedros no son congruentes, además en cada vértice no concurren el mismo número de caras ni de aristas.

4. a. Sí b. Octaedro

Modelación

5. Respuesta abierta

Razonamiento

6. a. F b. V
c. V d. F

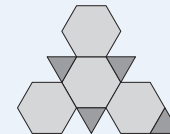
7. a. No

- b. Ocho caras, doce vértices y 18 aristas.

- c. Cuatro hexágonos y cuatro triángulos.

- d. El tetraedro truncado tiene el doble de caras, el triple de vértices y el triple de aristas que el tetraedro.

- e.



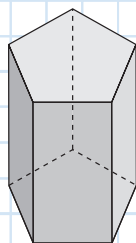
Resolución de problemas

8. Octaedro

UNIDAD
3

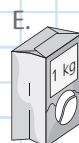
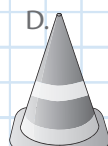
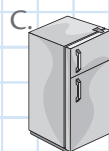
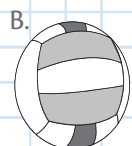
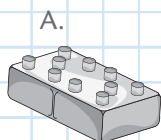
Evaluación formativa

1. La caneca de basura que está a la salida del almacén tiene la siguiente forma:

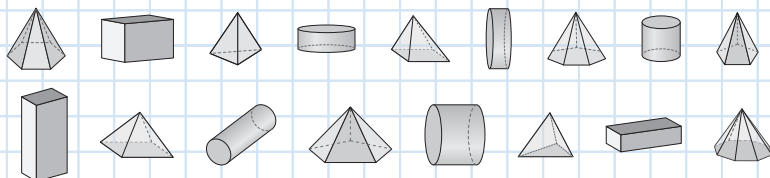


Esta corresponde a:

- A. Una pirámide
B. Un prisma
C. Un cubo
D. Un polígono
2. Encierra los objetos que tienen forma de prisma rectangular.



3. Observa la siguiente figura y responde cada uno de los literales.



- A. Determina la cantidad de cuerpos geométricos que se encuentran en ella.
- B. Menciona los más repetidos.

Nombre:

Grado: Fecha:

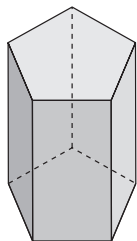
4. Diga si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones
- A. Un prisma es un poliedro que tiene dos polígonos congruentes y paralelos que se llaman bases. ()
- B. Los prismas se nombran según el polígono de sus bases como triangular, rectangular, pentagonal, hexagonal o circular. ()
- C. Los prismas se clasifican en rectos, si todas sus caras laterales son rectángulos, u oblicuos, si alguna de las caras laterales no es un rectángulo. ()
- D. Un paralelepípedo es un prisma cuyas caras, incluidas las bases, son todas paralelogramos. ()
5. Completa las frases de tal manera que sean verdaderas.

A. Las de un prisma son a las bases.

B. Los cuerpos son el cono, el cilindro y .

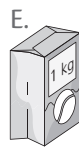
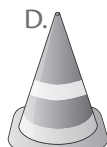
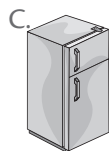
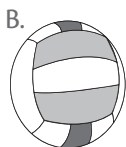
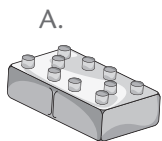
C. La apotema es de los triángulos isósceles congruentes que determinan las caras laterales de una .

1. La caneca de basura que está a la salida del almacén tiene la siguiente forma:

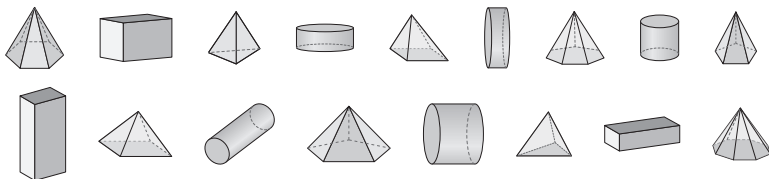


Esta corresponde a:

- A. Una pirámide
B. Un prisma
C. Un cubo
D. Un polígono
2. Encierra los objetos que tienen forma de prisma rectangular.



3. Observa la siguiente figura y responde cada uno de los literales.



- A. Determina la cantidad de cuerpos geométricos que se encuentran en ella.
- B. Menciona los más repetidos.

4. Diga si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones

A. Un prisma es un poliedro que tiene dos polígonos congruentes y paralelos que se llaman bases. ()

B. Los prismas se nombran según el polígono de sus bases como triangular, rectangular, pentagonal, hexagonal o circular. ()

C. Los prismas se clasifican en rectos, si todas sus caras laterales son rectángulos, u oblicuos, si alguna de las caras laterales no es un rectángulo. ()

D. Un paralelepípedo es un prisma cuyas caras, incluidas las bases, son todas paralelogramos. ()

5. Completa las frases de tal manera que sean verdaderas.

A. Las de un prisma son a las bases.

B. Los cuerpos son el cono, el cilindro y .

C. La apotema es de los triángulos isósceles congruentes que determinan las caras laterales de una .

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos. preguntas	1, 2, 3, 4, 5			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Ampliación conceptual

Un cilindro circular recto es un cuerpo de revolución. Se llama cilindro al cuerpo geométrico que tiene por bases una figura plana curvilínea y está limitado por una superficie desarrollable en un plano.

Los cilindros circulares forman un subconjunto propio del conjunto de los cilindros. La superficie lateral de un cilindro circular recto es un rectángulo, uno de cuyos lados tiene la longitud de una generatriz (y, por tanto, es igual a la altura del cuerpo) y el otro, la longitud de la circunferencia que limita las bases.

Un cono circular está limitado por un círculo y una superficie curva desarrollable en un plano y concurrente en un punto, llamado vértice del cono.

El círculo es la base y la superficie curva es la superficie lateral del cono. La recta determinada por el centro de la base y el vértice es el eje del cono circular.

La superficie lateral de un cono circular contiene segmentos determinados por el vértice y cada uno de los puntos de la circunferencia que limita la base; estos segmentos son generatrices del cono.

Al igual que los cilindros circulares, los conos circulares pueden clasificarse según la posición relativa del eje y la base: si el eje es perpendicular a la base se trata de un cono circular recto; en otro caso es oblicuo. Un cono circular recto es un cuerpo de revolución.

Los cilindros circulares y los conos circulares son de gran utilidad para el desempeño de las labores del hombre. se utilizan además para la realización de experimentos científicos y la utilidad de los mismos es muy importante para el desarrollo social.

5

Cuerpos redondos

Explora

Algunas construcciones arquitectónicas y varios objetos de la cotidianidad tienen forma de **cuerpo redondo**.

- ¿Cuáles son los cuerpos redondos más conocidos? ¿Qué construcciones u objetos tienen tales formas?

Ten en cuenta

En un cilindro, la superficie que forma la generatriz al girar recibe el nombre de **superficie lateral** del cilindro.

Los cuerpos redondos más conocidos son: el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**. En la Tabla 1 se observan algunas edificaciones y objetos que tienen forma de estos cuerpos redondos.

Cuerpos redondos			
	Cilindro	Cono	Esfera
Lugares	 Torre de Pisa – Italia	 Los "Trulli" de Alberobello – Italia	 SkyView – Londres
Objetos	 Cajas de atún	 Conos de tránsito	 Balones y pelotas

Tabla 1

Tabla 1

Los cuerpos redondos son sólidos que tienen al menos una cara curva. También se denominan **sólidos de revolución** porque se generan haciendo girar una figura plana alrededor de una recta que se llama **eje de rotación** o **eje de giro**.

5.1 Cilindros

Un **cilindro recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

En la Figura 1 se observa el rectángulo ABCD y el cilindro recto que se obtiene al girar el rectángulo alrededor del lado $\overline{CD}$.



Figura 1

Figura 2

En un cilindro se distinguen los siguientes elementos:

- Los círculos que generan los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son las **bases**.
- Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son los **radios**.
- La distancia entre las bases, que coincide con el lado $\overline{CD}$, es la **altura**.
- El lado $\overline{AB}$ se denomina **generatriz**.

Ejemplo 1

El desarrollo en el plano del cilindro se obtiene separando las bases y cortando la superficie lateral por la generatriz. En este desarrollo se obtienen dos círculos y un rectángulo (Figura 3).

La base del rectángulo es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, es decir, $2\pi r$. La altura del rectángulo es la longitud de la generatriz, esto es, g .

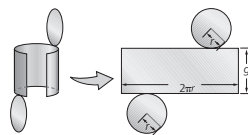


Figura 3

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Ejemplo 2

Un cilindro se construyó haciendo girar un rectángulo de 5 cm de largo por 12 cm de ancho alrededor del lado más largo. Se obtuvo así la Figura 4, cuya generatriz mide 12 cm y la longitud de la circunferencia de su base es 10π cm.

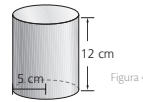


Figura 4

5.2 Conos

Un **cono recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

En la Figura 5 se observa el triángulo BAC rectángulo en el $\angle A$, que gira alrededor de su cateto $\overline{CA}$.

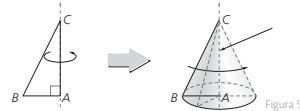


Figura 5

De la Figura 5 se pueden deducir los elementos de un cono, especificados en la Figura 6:

- El punto C es el **vértice** del cono.
- El círculo generado por el lado $\overline{AB}$ se llama **base**.
- El lado $\overline{AB}$ es el **radio**.
- La **altura** $\overline{AC}$ es la distancia del vértice a la base.
- La hipotenusa $\overline{BC}$, en cualquiera de sus posiciones, es la **generatriz**.
- La superficie que genera la hipotenusa es la **superficie lateral**.

Elementos de un cono

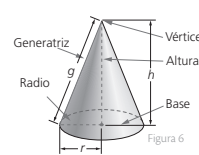


Figura 6

Ten en cuenta

La generatriz de un cono se halla mediante la expresión $g = \sqrt{h^2 + r^2}$, donde h es la altura y r el radio del cono.

5.3 Troncos de cono

Si se corta un cono por un plano paralelo a la base y se quita la parte de arriba se obtiene un **tronco de cono** (Figura 7).

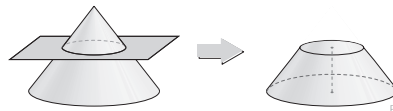


Figura 7

El tronco de cono también puede obtenerse al girar un trapecio rectángulo alrededor del lado perpendicular a las bases. En la Figura 8 se observan las dos bases circulares del tronco de cono obtenido al girar el trapecio ABCD alrededor del lado $\overline{CB}$ (que es la altura del tronco), la generatriz $\overline{AD}$ y los radios de sus bases ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$).

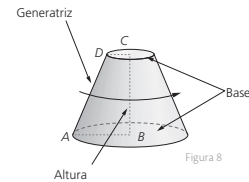
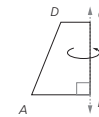


Figura 8

Ejemplo 3

Al cortar el cono de la Figura 9 con un plano paralelo a la base 2,5 cm abajo del vértice, se obtiene un tronco de altura 5,5 cm, ya que $8 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}$.

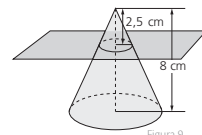


Figura 9

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes que relacionen los siguientes elementos con sus cuerpos geométricos que los contienen.

Esfera	Radio (esfera)
	Vértice (cono)
	Cuerda (esfera)
Cono	Eje de rotación (esfera)
	Polos (esfera)
	Radio (cilindro)
Cilindro	Centro (esfera)
	Base (cilindro)
	Diámetro (esfera)
	Generatriz (cono)
	Radio (cono)
	Generatriz (cilindro)
	Altura (cono)
	Base (cono)
	Altura (cilindro)

Los estudiantes deben asociar los elementos con sus cuerpos y deben tener en cuenta que los tres cuerpos tienen radio, que el cono y el cilindro tienen bases y en ocasiones tienen bases iguales. Explique a los estudiantes la relación que existe entre ambos cuerpos para cuando sus bases son iguales y también su altura, y es que el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro. Demuestre esta relación mediante las figuras de plástico el cilindro y cono.

Recomendaciones para desarrollar la lección

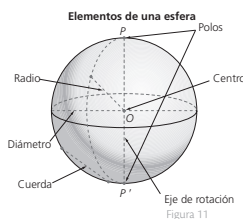
- Socialice con los estudiantes el concepto de esfera como el cuerpo limitado por una superficie cuyos puntos equidistan de un punto fijo llamado centro de la esfera. La distancia de un punto de la superficie al centro de la esfera recibe el nombre de radio de la esfera. Muestre a los estudiantes que las secciones planas de una esfera son circunferencia; si la sección contiene el centro de la esfera, el diámetro de la circunferencia es igual al diámetro de la esfera.
- Proponga a los estudiantes ejemplos donde relacionen los cuerpos con sus características y propiedades, por ejemplo, pida que relacionen los siguientes elementos con algunos de los cuerpos que se han hecho alusión en el desarrollo del tema: radio, generatriz, bases y altura. Los estudiantes pueden confundir el cuerpo geométrico, que en este caso es el cilindro, con la esfera, o el cono solo por estar presente el radio. Por tanto es necesario que el docente, proporcione la información más acertada sobre los cuerpos geométricos y sus elementos para que los estudiantes logren reconocer los cuerpos y sus elementos.
- Proponga a los estudiantes relacionar los cuerpos estudiados con sus características y elementos, con figuras del entorno y la vida práctica para una mayor interpretación y familiarización de los mismos. Establezca la relación que existe entre el cilindro y el cono.

5

Cuerpos redondos

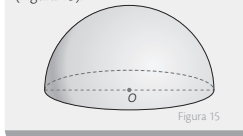
Ten en cuenta

No es posible hacer un desarrollo en el plano de la esfera.



Ten en cuenta

Al cortar una esfera por un plano que pase por su centro se obtienen dos casquetes esféricos congruentes denominados **semiesferas** (Figura 15).



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

<https://luisamariaarias.wordpress.com/matematicas/tema-14-cuerpos-geometricos-volumen/>
Refuerza tu conocimiento de los sólidos geométricos.

5.4 Esferas

Una **esfera** es un sólido de revolución que resulta al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

En la Figura 10 se observa cómo se genera una esfera al girar el semicírculo de radio $\overline{OP}$ alrededor de su diámetro $\overline{PP'}$.

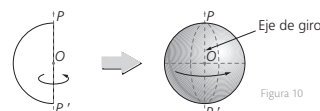


Figura 10

En la Figura 11 se observan los elementos de una esfera, que se explican como sigue.

- **Superficie esférica.** Se genera al girar la semicircunferencia alrededor del eje $\overline{PP'}$.
- **Centro de la esfera.** Es el centro del círculo máximo.
- **Radio de la esfera.** Segmento que se obtiene al unir el centro de la esfera con cualquier punto de la superficie esférica.
- **Cuerda.** Segmento que une dos puntos cualesquiera de la superficie esférica.
- **Diámetro.** Cuerda que pasa por el centro de la esfera.
- **Polos.** Puntos de corte del eje de giro con la superficie esférica.

5.5 Casquetes esféricos

Al cortar una esfera por un plano resultan dos **casquetes esféricos**, como se observa en la Figura 12.

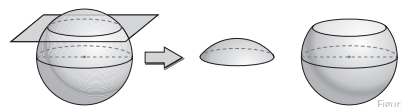


Figura 12

Actividad resuelta

Comunicación

- Indica en cada uno de los sólidos de revolución si es un cilindro o no. Explica tu respuesta.

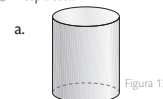


Figura 13



Figura 14

Solución:

- Es un cilindro, ya que sus bases son círculos congruentes.
- No es un cilindro, pues sus bases son círculos de distinto radio. El sólido es un tronco de cono.

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

- 2 Dibuja el desarrollo en el plano de los cilindros de las figuras 16 y 17 con sus dimensiones.

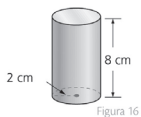


Figura 16

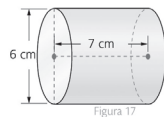


Figura 17

- 3 Lee y responde.

- Si se gira un rectángulo de base 7 cm y altura 11 cm tomando como eje de rotación la altura,
 - a. ¿qué sólido se forma?
 - b. ¿cuánto mide la generatriz?
 - c. ¿cuánto mide la longitud de la circunferencia de la base del sólido?

- 4 Indica cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cono.

a.

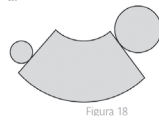


Figura 18

b.



Figura 19

Ejercitación

- 5 Dibuja un cono de 3 cm de radio y 4 cm de altura. Luego, calcula la longitud de la generatriz.
- 6 Halla la longitud de la circunferencia que se determina en la superficie esférica al cortar una esfera de radio 9 cm con un plano que pasa por el centro.

Comunicación

- 7 Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).
- a. Los cilindros no son poliedros. ()
 - b. Si se corta un cilindro recto por un plano paralelo a sus bases se obtienen dos conos de la misma altura. ()
 - c. En un cono recto, la generatriz, la altura y el radio de la base forman un triángulo rectángulo isósceles. ()
 - d. Una esfera tiene infinitos diámetros. ()
 - e. Al cortar una esfera por un plano se obtiene una circunferencia. ()
 - f. Si se gira un círculo alrededor de una cuerda se obtiene una esfera. ()

Resolución de problemas

- 8 ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia de la base del cono que se obtiene al girar el triángulo ABC de la Figura 20 alrededor del lado $\overline{CB}$?

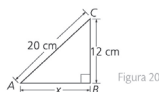


Figura 20

- 9 Un cono es intersectado por un plano paralelo a la base como se ve en la Figura 21.

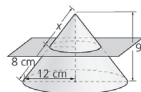
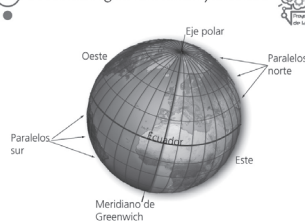


Figura 21

Halla el valor de x.

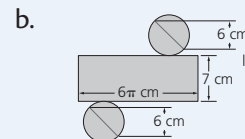
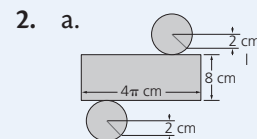
- 10 La galleta que enrolla un cono de helado tiene 14,5 cm de generatriz y 14 cm de altura. Calcula el radio máximo de la bola de helado que se puede poner en este cono.

- 11 Observa la figura de la Tierra y resuelve.



- a. Indaga cuál es la longitud de la circunferencia de la Tierra en el paralelo del Ecuador y en el meridiano de Greenwich. Compara los resultados. ¿Es posible afirmar que la Tierra tiene forma de esfera?
- b. Al realizar un corte imaginario por el Ecuador, ¿qué sólidos se obtienen?
- c. ¿Cuál es el radio de la circunferencia de la Tierra sobre el Ecuador?
- d. ¿Cuál es el radio de la circunferencia de la Tierra sobre el meridiano de Greenwich?

Razonamiento



3. a. Un cilindro.
c. 14π cm

4. Ninguno

Ejercitación

5. 5 cm
6. 18π cm

Comunicación

7. a. V b. F
c. F d. V
e. F f. F

Resolución de problemas

8. 32 cm
9. $x = 7$ cm
10. 3,7749 cm
11. a. 40076 km y 40009,152 km, respectivamente.
La Tierra no tiene forma de esfera.
b. Dos semiesferas.
c. $r = 6381,5$ km
d. $r = 6371$ km

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Muestre a los estudiantes otros conceptos de polígonos para una mayor interpretación del tema por ejemplo: en la página 128 del libro de texto se plantea que un polígono es el resultado de la unión de varios segmentos tales que ningún par se interseca, excepto en sus extremos, y ningún par con un extremo común es colineal. El docente podría planear de forma más simple para el estudiante que, un polígono no es más que una línea poligonal cerrada que forman vértices en sus extremos y que teniendo en cuenta la cantidad de segmentos que lo conformen recibirá un nombre en particular.
- Muestre a los estudiantes diferentes ejemplos de polígonos para que se familiaricen con los mismos.
- Realice a los estudiantes preguntas como la siguiente: ¿será posible construir un polígono de dos lados?, ¿Cuál será el polígono cerrado más pequeño que se puede construir?, ¿Conocen el nombre de una figura que sea una poligonal cerrada de cuatro lados?, Mencione los polígonos que han estudiado en grados anteriores y diga algunas de sus propiedades.
- Proponga a los estudiantes que, según los conceptos propiciados por el docente y las características de los polígonos, construyan varios polígonos en sus cuadernos para una familiarización con los mismos. Solicite que construyan polígonos de 4, 5, y 7 lados y los clasifiquen según su número de lados.

6

Polígonos

Explora

En Ecuador se utilizan tres tipos de señales de tránsito: preventivas, reglamentarias e informativas. Las figuras 1 a 3 presentan algunos ejemplos.

Señal preventiva



Figura 1

Señal reglamentaria



Figura 2

Señal informativa



Figura 3

- ¿Qué tienen en común estas señales de tránsito?

Ten en cuenta

La palabra polígono viene del griego *Polys* (muchos) y *gónia* (ángulos).

La señal preventiva tiene forma de rombo, la reglamentaria tiene forma octagonal y la señal informativa es rectangular.

De acuerdo con lo anterior, estas señales de tránsito tienen forma de **polígonos**.

Un **polígono** es el resultado de la unión de varios segmentos tales que ningún par se interseca, excepto en sus extremos, y ningún par con un extremo común es colineal.

Ejemplo 1

En la Figura 4 se presentan algunos ejemplos de polígonos.

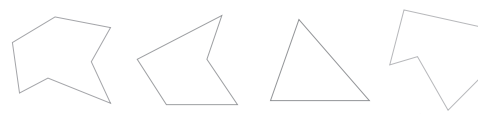


Figura 4

Aquí se observa que los segmentos que forma cada polígono se intersecan solo en los extremos y ningún par de segmentos consecutivos es colineal.

6.1 Elementos de un polígono

Los polígonos constan de los siguientes elementos.

- **Lados:** cada uno de los segmentos que forman el polígono.
- **Ángulos internos:** cada uno de los ángulos formados por lados consecutivos.
- **Ángulos externos:** cada uno de los ángulos formados por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.
- **Vértices:** cada uno de los puntos de intersección de dos lados consecutivos.
- **Diagonales:** segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

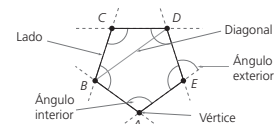


Figura 5

Para nombrar un polígono se emplean las letras que identifican sus vértices. El polígono de la Figura 5 se nombra polígono ABCDE.

Ejemplo 2

En el polígono ADCB de la Figura 6 se identifican estos elementos:

- Vértices: A, B, C y D
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$
- Ángulos internos: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$
- Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

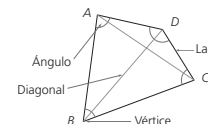


Figura 6

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar polígonos regulares e irregulares según sus lados y ángulos.

6.2 Clasificación de polígonos según su forma

Los polígonos se clasifican según su forma en cóncavos y convexos.

- Un polígono es **cóncavo** si al menos uno de sus ángulos internos es mayor que 180° y al trazar las diagonales no todas quedan en el interior del polígono.
- Un polígono es **convexo** si ninguno de sus ángulos internos es mayor que 180° y al trazar sus diagonales, estas quedan totalmente contenidas en el interior del polígono.

Ejemplo 3

- El polígono de la Figura 7 es cóncavo, pues las diagonales trazadas están en el exterior del polígono.

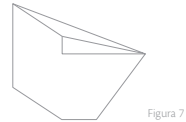


Figura 7

- Por su parte, el polígono de la Figura 8 es convexo, ya que todas sus diagonales quedan en el interior del polígono.

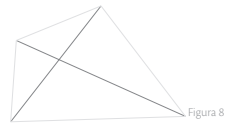


Figura 8

Los polígonos también pueden clasificarse en regulares e irregulares.

- Los **polígonos regulares** tienen todos sus lados congruentes y sus ángulos de la misma medida.
- Los **polígonos irregulares** son aquellos que no cumplen las condiciones anteriores.

Ejemplo 4

- En la Figura 10 se presentan algunos polígonos regulares. Cada polígono tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos de igual medida.

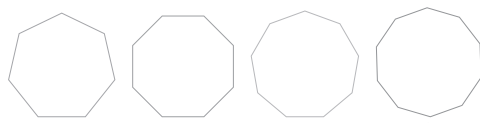


Figura 10

- Los polígonos de la Figura 11 son todos irregulares.

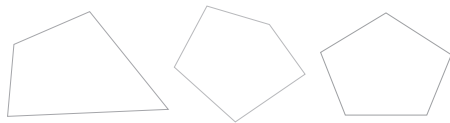


Figura 11

Ten en cuenta

Un polígono convexo de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos trazando todas las diagonales desde un mismo vértice. Por ejemplo, en el polígono ABCDE de la Figura 9 se trazaron las diagonales desde el vértice A y resultaron tres triángulos.

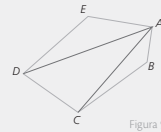
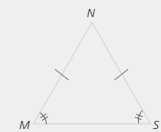


Figura 9

Ten en cuenta

Para indicar que dos o más segmentos o ángulos son congruentes, se hace una marca sobre la figura. Por ejemplo, en el triángulo MNS, que se simboliza $\triangle MNS$, se tiene que $\overline{NM} \cong \overline{NS}$ y $\angle M \cong \angle S$.



■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Pida a los estudiantes que marquen con una (X) los elementos de un polígono.

- Vértices ____
- Lado ____
- Diagonal ____
- Aristas ____
- Ángulo interior ____
- Ángulo exterior ____
- Generatriz ____
- Radio ____

2. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

- Un polígono es cóncavo si sus diagonales se cortan perpendicularmente ____
- Un polígono es convexo cuando todas sus diagonales quedan en el interior del polígono ____
- Los polígonos regulares tienen todos sus lados congruentes y sus ángulos de la misma medida. ____
- Los polígonos irregulares son aquellos que cumplen las condiciones anteriores ____
- Un polígono de seis lados se llama Pentágono. ____
- La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se puede determinar mediante la fórmula $(n - 2) \times 180^\circ$. ____
- La amplitud de los ángulos interiores de un pentágono es de 180° . ____

■ Actividades colaborativas

1. El docente propondrá realizar un encuentro de conocimiento entre dos equipos previamente seleccionados. El equipo número 1 mencionará, según la boleta seleccionada, el nombre del polígono dibujado por el docente. El equipo número 2 mencionará el concepto del polígono y lo dibujará en la pizarra y así se desarrollará la actividad de forma que los dos equipos, reconozcan y dibujen cada polígono seleccionado por el equipo opuesto.

El docente, una vez terminada la actividad, desarrollará un taller donde realizará preguntas de forma grupal para evaluar individualmente a los estudiantes. Realizará preguntas como las siguientes: ¿Será el aula un polígono?, ¿qué tipo de polígono?, mencione el concepto de polígono y sus elementos principales. Nombre ejemplos de la vida práctica que sean polígonos y sean además utilizados por el hombre a diario.

2. El docente formará dos equipos en el aula donde desarrollará actividades como la siguiente a un equipo le corresponderá clasificar y nombrar todas las características de los polígonos que tienen sus lados pares comenzando por los de cuatro lados, el otro equipo clasificará y nombrará los polígonos que tengan sus lados impares. Una vez resuelta la orientación por los estudiantes se realizará un debate en el aula para intercambiar información, por lo que el docente evaluará de forma grupal y de forma individual.

Polígonos

Ten en cuenta

Un polígono con n lados se llama n -gono. Esta manera de nombrar los polígonos es útil para mencionar aquellos de 13 lados o más; por ejemplo: "13-gono", "14-gono", "21-gono", etc.

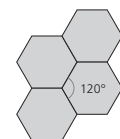
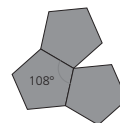
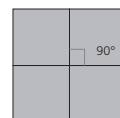
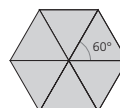


Figura 12

6.3 Clasificación de polígonos según su número de lados

Según su número de lados, los polígonos se clasifican como se muestra en la Tabla 1.

Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono
Tres lados	Cuatro lados	Cinco lados	Seis lados
Heptágono	Octágono	Nonágono	Décágono
Siete lados	Ocho lados	Nueve lados	Diez lados

Tabla 1

Ejemplo 5

- Para calcular la cantidad de diagonales de un polígono de n lados, se utiliza la fórmula $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$. Así, el número de diagonales de un nonágono será:

$$\frac{9 \cdot (9 - 3)}{2} = \frac{54}{2} = 27$$
- La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se puede determinar mediante la fórmula $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Así, la suma de los ángulos interiores de un pentágono es $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

A partir de la fórmula anterior, se puede llegar a deducir que cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados mide $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$. Esto significa que la medida de cada ángulo interior de un pentágono regular es $\frac{(5 - 2) \cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Lee y responde.

- Es posible recubrir el plano con un polígono regular cuando la medida de cada uno de sus ángulos interiores es divisor de 360° . De acuerdo con esta información, ¿se podrá recubrir el piso con triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares o hexágonos regulares?

Solución:

Al calcular la medida de un ángulo interior de cada polígono regular, se encuentran los siguientes resultados.

Polígono regular	Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono regular	Hexágono regular
Medida de cada ángulo interior	60°	90°	108°	120°

Tabla 2

Por consiguiente, se puede recubrir el plano con todos estos polígonos, excepto con el pentágono regular, ya que 108° no es divisor de 360° (Figura 12).

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar polígonos regulares e irregulares según sus lados y ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Determina cuáles de las figuras 13 a 16 son polígonos y cuáles no.



Figura 13



Figura 14



Figura 15



Figura 16

3. Observa la Figura 17 e identifica los elementos que se indican a continuación.

- a. Los lados
b. Los vértices
c. Las diagonales

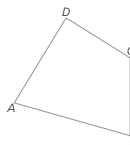


Figura 17

4. Clasifica los polígonos de las figuras 18 a 21 en convexos o cóncavos, según corresponda.



Figura 18



Figura 19



Figura 20



Figura 21

Razonamiento

5. Responde, teniendo en cuenta la fórmula para hallar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados, las siguientes preguntas.

- a. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un decágono?
b. ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un eneágono regular?

Comunicación

6. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
- a. El rombo es un polígono regular. ()
 - b. El cuadrado es un polígono irregular. ()
 - c. El cuadrado tiene dos diagonales congruentes. ()
 - d. Un polígono es cóncavo cuando todos sus ángulos internos son menores que 180° . ()
7. Construye una tabla como la de la muestra y registra los datos correspondientes, del triángulo hasta el decágono.

Polígono regular	Número de diagonales	Suma de las medidas de los ángulos interiores	Medida de cada ángulo interior
Triángulo equilátero			
Cuadrado			
Pentágono			
—			

Tabla 3

8. Lee y resuelve.

- Según la medida de sus lados, un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes, equilátero si tiene sus tres lados congruentes, o escaleno si los tres lados tienen distinta medida.
- Según la medida de sus ángulos, un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto, acutángulo si tiene sus tres ángulos agudos, u obtusángulo si tiene un ángulo obtuso.

Clasifica cada triángulo de acuerdo con la medida de sus lados y de sus ángulos.

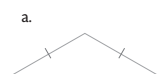


Figura 22



Figura 23

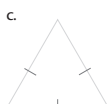


Figura 24

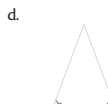


Figura 25

Resolución de problemas

9. Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados de un hexágono regular. Une los vértices sueltos mediante segmentos. ¿Qué obtienes?

Ejercitación

2. a. Sí b. No c. Sí d. No
3. a. Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$
b. Vértices: A, B, C y D.
c. Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$
4. a. Convexo b. Convexo
c. Cóncavo d. Cóncavo

Razonamiento

5. a. 1440° b. 140°

Comunicación

6. a. F b. F c. V d. F

- 7.

Triángulo equilátero	0	180°	60°
Cuadrado	2	360°	90°
Pentágono	5	540°	108°
Hexágono	9	720°	120°
Heptágono	14	900°	$128,6^\circ$
Octágono	20	1080°	135°
Nonágono	27	1260°	140°
Decágono	35	1440°	144°

8. a. Isósceles, obtusángulo.
b. Escaleno, rectángulo.
c. Equilátero, acutángulo.
d. Isósceles, acutángulo.

Resolución de problemas

9. Dodecágono

Ampliación conceptual

De acuerdo con el tema desarrollado, un polígono es una polygonal cerrada de varios lados por lo que el cuadrilátero es una polygonal cerrada específicamente de cuatro lados y cuatro ángulos, donde la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es de 360° .

Atendiendo al paralelismo de sus lados los cuadriláteros convexos se clasifican en: paralelogramo; trapecios y trapezoides.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes la definición de cada cuadrilátero a estudiar en el tema. Paralelogramo. Es un cuadrilátero convexo que tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.
- Muestre a los estudiantes la clasificación de los paralelogramos, según sus lados y ángulos. Mencione las propiedades de cada paralelogramo. Cuadrado (tiene sus cuatro lados iguales, los cuatro ángulos iguales, con una amplitud de 90° cada uno. Sus diagonales se cortan perpendicularmente y en su punto medio. El rectángulo es un paralelogramo convexo que tiene sus lados opuestos paralelos, y sus ángulos interiores con un amplitud de 90° cada uno. El rombo cumple las mismas propiedades del cuadrado solo que sus ángulos no son iguales y sus diagonales no se cortan en su punto medio solo perpendicularmente. El romboide es un cuadrilátero convexo que tiene sus lados y ángulos opuestos congruentes.

7

Cuadriláteros

Explora

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

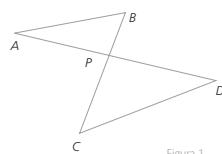


Figura 1

- ¿Se puede afirmar que la figura ABCD es un cuadrilátero?

Ten en cuenta

La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360° .

App

Polígonos

Abre la aplicación *Las figuras geométricas* e identifica las propiedades y elementos de los polígonos.



De acuerdo con su definición, un polígono está formado por segmentos que no se intersecan más que en los extremos y, si dos de ellos tienen un extremo común, no son colineales.

En este caso, la Figura 1 está formada por cuatro segmentos, pero $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto P, que no corresponde a ninguno de los extremos de estos segmentos. Por lo tanto, la figura ABCD no es un cuadrilátero.

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. En este se identifican pares de **lados opuestos** (que no tienen puntos en común) y pares de **lados consecutivos** (que tienen un punto en común, el vértice).

En un cuadrilátero dos **ángulos son opuestos** si solo comparten dos vértices del cuadrilátero, y **consecutivos** si comparten un lado del cuadrilátero.

Ejemplo 1

En el cuadrilátero de la Figura 2 se identifican los siguientes elementos:

- Los **vértices** (puntos P, Q, R y S).
- Los **lados** ($\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$).
- Las **diagonales** ($\overline{PR}$ y $\overline{QS}$).
- Los **lados opuestos** ($\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PS}$).
- Los pares de **lados consecutivos** ($\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$ son algunos de ellos).
- Los **ángulos interiores** del cuadrilátero ($\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ y $\angle S$); con 360° como la suma de sus medidas.

$$60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 360^\circ$$

- Los **ángulos opuestos** ($\angle S$ y $\angle Q$) y los **ángulos consecutivos** ($\angle S$ y $\angle P$).

El cuadrilátero PSRQ se simboliza $\square PSRQ$.

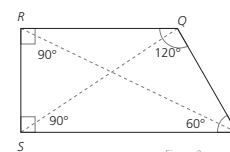


Figura 2

Los cuadriláteros se clasifican en **paralelogramos**, **trapecios** y **trapezoides**.

7.1 Paralelogramos

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son paralelos.

Los cuadriláteros de la Tabla 1 son paralelogramos.

Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
Todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos tienen la misma medida.	Todos sus ángulos son rectos.	Todos sus lados son congruentes.	Los ángulos y los lados opuestos son respectivamente congruentes.

Tabla 1

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar cuadriláteros según sus lados y ángulos.

7.2 Propiedades de los paralelogramos

1. La diagonal de un paralelogramo define dos triángulos congruentes.
En la Figura 3, la diagonal $\overline{QN}$ del paralelogramo $NMQP$ determina:

$$\triangle MQN \cong \triangle PQN$$

2. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
En la Figura 4 se observa que:

$$\overline{AB} \cong \overline{DC} \text{ y } \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

3. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
En el paralelogramo $PSRQ$ de la Figura 5 se tiene que:

$$\angle P \cong \angle R \text{ y } \angle S \cong \angle Q$$

4. Las diagonales de un paralelogramo se intersectan en un punto medio. En la Figura 6 se observa que las diagonales $\overline{MQ}$ y $\overline{PA}$ se intersectan en T . De acuerdo con esta propiedad, se tiene que:

$$\overline{AT} \cong \overline{PT} \text{ y } \overline{MT} \cong \overline{QT}$$

5. Pares de ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios, es decir, la suma de sus medidas es igual a 180° . En la Figura 7:

$$m\angle D + m\angle E = 180^\circ$$

$$m\angle E + m\angle F = 180^\circ$$

$$m\angle F + m\angle G = 180^\circ$$

$$m\angle G + m\angle D = 180^\circ$$

Ejemplo 2

La Figura 8 muestra el paralelogramo $PQSR$ con $m\angle P = 120^\circ$. Como el ángulo Q es suplementario con el ángulo P , entonces:

$$m\angle Q = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

El ángulo S es el suplemento del ángulo Q ; por tanto:

$$m\angle S = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Como los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, se tiene que:

$$m\angle R = m\angle Q = 60^\circ$$

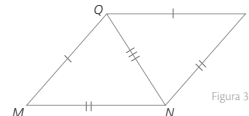


Figura 3

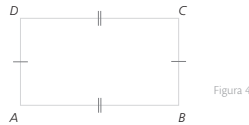


Figura 4

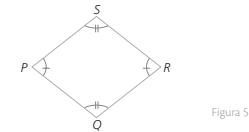


Figura 5

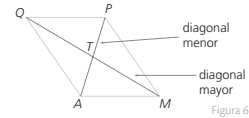


Figura 6



Figura 7

Ten en cuenta

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero es un rombo.

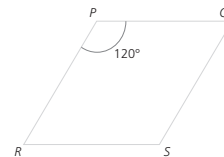
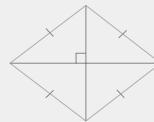


Figura 8

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Solicite a los estudiantes señalen si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Si los lados opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, entonces es un paralelogramo. ____

b) Si un par de lados opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales y paralelos, entonces es un paralelogramo. ____

c) Si los ángulos consecutivos (tomados de dos en dos) de un cuadrilátero convexo suman 900° entonces, es un paralelogramo. ____

d) La paralela media es paralela a las bases y su longitud es iguala la semisuma a las longitudes de las bases. ____

2. Pida a los estudiantes que enlacen las propiedades mencionadas con los cuadriláteros convexos que cumplen las mismas.

1. Dos pares de lados paralelos	Paralelogramo (1)
2. Lados no paralelos iguales	Rectángulo(1) Cuadrado(4) Rombo(5)
3. Dos ángulos rectos	Trapezio(6)
4. Lados y ángulos iguales	Trapezio isósceles (2)
5. Sus cuatro lados iguales	Trapezio rectángulo(3)
6. Un par de lados paralelos	Trapezoide no simétrico

■ Actividades colaborativas

Realice un seminario en el aula donde solicite que cada estudiante deba traer de sus casas, un ejemplo de cuadrilátero, ya sea en una foto o físicamente. Proponga que cada estudiante realice una descripción del cuadrilátero que presente en el aula además que mencione las características, propiedades y elementos que lo conforman. En caso de que varios estudiantes coincidan con algunos cuadriláteros forme un equipo para que entre todos describan al mismo. Una vez creados los equipos evalúe de forma grupal la participación de todos e individual, el cumplimiento de la actividad indicada por el docente.

Proponga a los estudiantes realizar un resumen de forma organizada y con la participación de todos los estudiantes, sobre los cuadriláteros. Ordenadamente realice preguntas sobre los cuadriláteros para que los estudiantes respondan y se complete la información esperada por el docente.

Proponga una actividad donde el estudiante deba responder verdadero o falso, evalúe de forma individual, realice preguntas como las siguientes.

¿Tendrá el trapecio isósceles dos lados paralelos y un ángulo recto?, ¿qué nombre recibe el trapecio que cumple esta propiedad?, mencione las características de los trapecio rectángulos. pregunte a los estudiantes las propiedades y características de un trapecio isósceles.

De esta forma el docente logra que el estudiantes memoricen y razonen de forma simple y se familiaricen con este contenido.

7

Cuadriláteros

7.3 Trapecios

El **trapecio** es un cuadrilátero que tiene exactamente dos lados paralelos denominados **bases**. A la distancia entre las bases se le conoce como **altura**.



Figura 9

Los trapecios se clasifican como se muestra en la Tabla 2.

Escaleno	Isósceles	Rectángulo
Sus cuatro lados son de diferente medida.	Sus lados no paralelos son congruentes.	Dos de sus ángulos son rectos.

Tabla 2

Ten en cuenta

El trapezoide simétrico tiene un eje de simetría que coincide con su diagonal mayor. Los trapezoides asimétricos no poseen ejes de simetría.

7.4 Trapezoides

Los **trapezoides** son cuadriláteros que no tienen pares de lados paralelos.

Los trapezoides se clasifican en **simétricos** y **asimétricos** como se muestra en la Tabla 3.

Trapezoide simétrico	Trapezoide asimétrico
Tiene dos pares de lados congruentes.	Sus cuatro lados tienen distinta medida.

Tabla 3

Actividad resuelta

Razonamiento

- 1 Dibuja dos trapecios isósceles, traza sus diagonales y deduce una propiedad de estos cuadriláteros.

Solución:

En la Figura 10 se observan dos trapecios isósceles con sus respectivas diagonales.

Al medir con una regla las diagonales de los trapecios, se obtiene que tienen la misma medida; por esto la propiedad que se puede establecer es: "En todo trapecio isósceles las diagonales son congruentes".



Figura 10

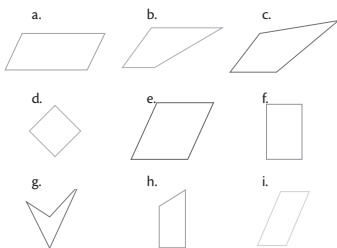
Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar cuadriláteros según sus lados y ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Clasifica estas figuras según el tipo de cuadrilátero al que corresponda cada una.



3. Escribe qué tipo de cuadrilátero aparece en la Figura 11.
● Indica sus características.

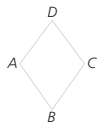


Figura 11

Modelación

4. Dibuja cuadriláteros que cumplan las condiciones dadas.
● a. Las medidas de dos ángulos son 124° y 56° .
b. Las diagonales son congruentes y perpendiculares.
c. Todos sus ángulos miden 90° y sus lados miden 3 cm.
d. Una de las diagonales determina dos triángulos equiláteros.
e. Tres lados son congruentes.

Razonamiento

5. Analiza y responde.
● a. ¿Cuáles de los paralelogramos tienen diagonales congruentes?
b. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un paralelogramo?
c. ¿Cuáles de los paralelogramos tienen diagonales perpendiculares?
d. ¿Todo cuadrado es un rectángulo?
e. ¿Algún rombo es cuadrado?
f. ¿Todo rombo es cuadrado?

Ejercitación

6. Observa la Figura 12, que está formada por el cuadrilátero $DFEB$ y el triángulo ADB . ¿Cuánto mide el ángulo E y el ángulo D ?

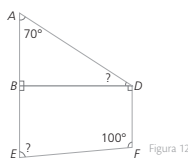


Figura 12

7. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
● Dibuja las figuras que creas pertinentes.
a. En todo paralelogramo siempre se cumple que los ángulos consecutivos son suplementarios. ()
b. Al unir los puntos medios de los lados de un rombo, se obtiene un cuadrado. ()
c. Si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, el cuadrilátero es un cuadrado. ()
d. Todos los ángulos de un cuadrado miden 90° . ()
e. Las diagonales de un rectángulo son perpendiculares entre sí. ()
f. Los ángulos consecutivos de un rombo son congruentes. ()
g. Todo romboide es un rombo. ()

Resolución de problemas

8. En el cuadrilátero de la Figura 13, ¿cuánto mide el ángulo exterior x ?

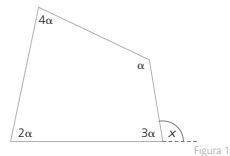


Figura 13

9. Observa en la Figura 14 el plano de una casa e identifica el cuadrilátero correspondiente a cada lugar.

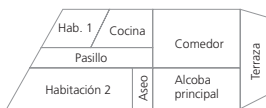


Figura 14

Ejercitación

2. a. Romboide b. Trapecio escaleno
c. Trapezoide asimétrico
d. Cuadrado e. Romboide
f. Rectángulo g. Trapezoide asimétrico
h. Trapecio rectángulo i. Romboide
3. Es un Rombo. Tiene los cuatro lados iguales y sus ángulos son congruentes dos a dos.

Modelación

4. Respuesta abierta

Razonamiento

5. a. Cuadrado y rectángulo
b. Dos c. Rombo y cuadrado d. Sí
e. Sí f. No

Ejercitación

6. $m\angle E = 80^\circ$; $m\angle D = 20^\circ$

7. a. V b. F c. F d. V
e. F f. F g. F

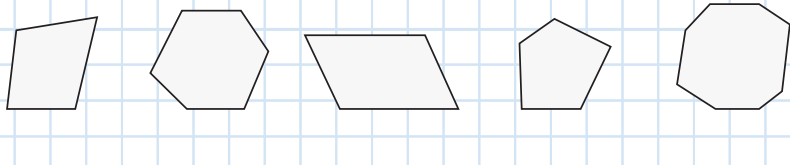
Resolución de problemas

8. $x = 72^\circ$
9. Habitación 1: Romboide
Cocina, pasillo y habitación 2: Trapecio rectángulo.
Comedor: Rectángulo.
Aseo y alcoba principal: Rectángulo.
Terraza: Trapecio isósceles.

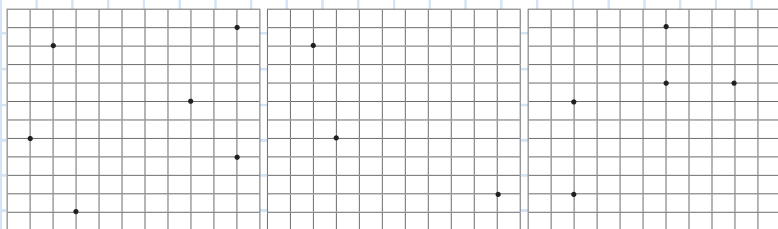
UNIDAD
3

Evaluación sumativa

1. Determina si los polígonos son regulares o no. Justifica tus respuestas.

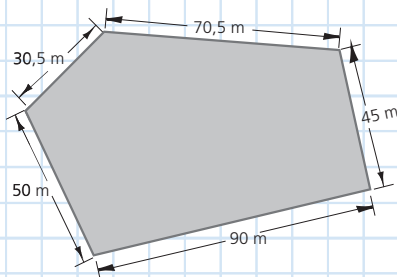


2. Une consecutivamente los puntos dados en cada cuadrícula. Escribe el nombre del polígono dibujado en cada una, según sus lados.



3. Un centro polideportivo está construido sobre un terreno que tiene la forma y las dimensiones dadas en la siguiente figura. El terreno del polideportivo tiene forma:

- A. cuadrangular
- B. triangular
- C. pentagonal
- D. hexagonal



Nombre:

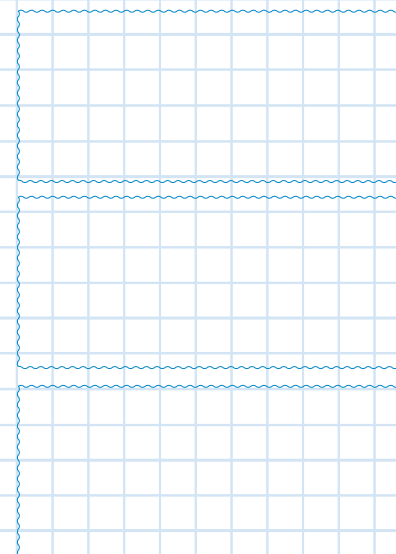
Grado: Fecha:

4. Dibuja y escribe el nombre de la figura.

A. Figura geométrica que tiene un par de lados paralelos.

B. Figura geométrica sin ningún par de lados paralelos.

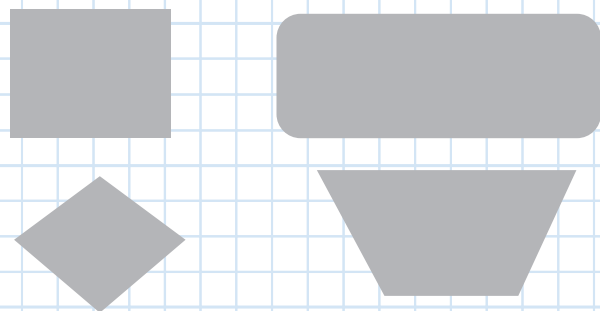
C. Figura geométrica con dos pares de lados paralelos.



6. En la siguiente figura, mencione el nombre y las propiedades del cuadrilátero que representa el techo de la casita que dibujó Andy.



5. En cierto tramo del recorrido se observan terrenos cortados y cercados en forma poligonal, como se observa en la figura.

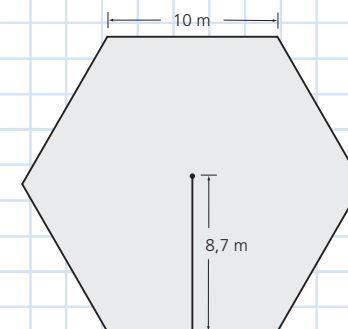


Una de las formas de los terrenos de la pregunta anterior, con seguridad, no corresponde a:

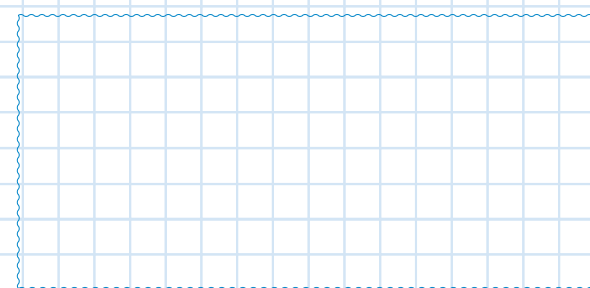
- A. Una elipse
B. Un cuadrado
C. Un rombo
D. Un rectángulo
7. Entre las comodidades que brinda el Silver Shadow, está una gran pista de baile con forma de hexágono regular de 10 metros de lado y 8,70 metros de apotema, tal como se muestra en la figura.

A. Divide la pista en seis triángulos iguales.

- B. Encuentra el área de uno de los triángulos.

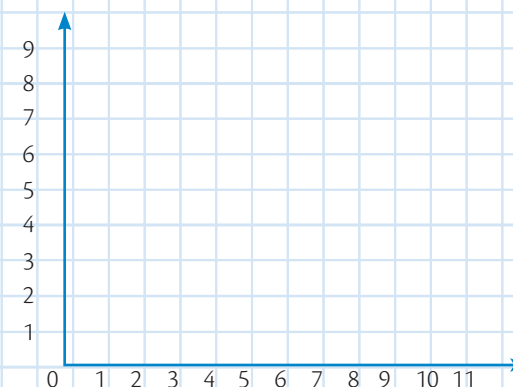


- C. Dibuja una pista octogonal



8. La figura cuyos vértices tienen las coordenadas (2, 2); (6, 3); (6, 8) y (2, 9) es:

- A. cuadrangular
B. triangular
C. pentagonal
D. hexagonal



UNIDAD

4

Evaluación diagnóstica

Nombre:.....

Grado:..... Fecha:.....

1. Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes proporciones:

A. $\frac{21}{14} = \frac{3}{x}$

B. $\frac{15}{25} = \frac{x}{10}$

C. $\frac{27}{y} = \frac{y}{3}$

D. $\frac{5}{5+y} = \frac{24}{25}$

2. Encuentra las potencias siguientes:

$5^2 =$

$12^2 =$

$13^2 =$

$7^3 =$

3. Completa.

$\sqrt{64} =$

porque:

$\sqrt{225} =$

porque:

$\sqrt{1225} =$

porque:

$\sqrt[3]{1000} =$

porque:

4. Beatriz tiene un terreno de forma cuadrada, con un área de 196 m^2 . Como desea cercarlo, necesita saber cuántos metros de malla metálica debe comprar.

5. Completa las siguientes igualdades:

$23 \text{ dam} = \quad \text{dm} = \quad \text{mm}$

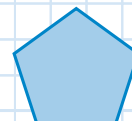
$750 \text{ mm} = \quad \text{cm} = \quad \text{m}$

6. Determina cuáles de los polígonos que se presentan a continuación son regulares.

A.



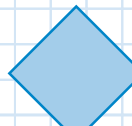
B.



C.



D.

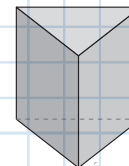


E.

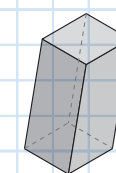


7. En los siguientes prismas, todas las aristas de las bases son iguales, uno es un prisma cóncavo y otro es oblicuo, ¿cuál es un prisma regular?

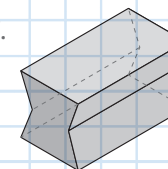
A.



B.

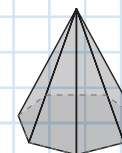


C.

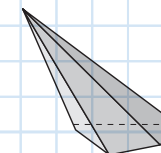


8. En las siguientes pirámides, una es una cóncava y otra es oblicua, ¿cuál es una pirámide regular?

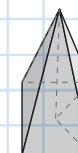
A.



B.



C.



Propósito de la unidad

Bloque de geometría y medida

En este bloque los estudiantes estudiarán las figuras congruentes y las semejantes a partir de las medidas de los ángulos y la relación entre las medidas de los lados.

Aprenderán sobre el Teorema de Tales examinando las proporcionalidades entre segmentos de dos o más paralelas cortadas por dos transversales.

Conocerán sobre los criterios de semejanza de triángulos, vinculados a fenómenos donde estos adquieren significado, como la medida de profundidad de un pozo, determinación de la altura de un edificio, medición de distancia sobre un terreno horizontal, del radio y la sombra de la tierra, entre otros que pueden generar la curiosidad de la búsqueda de medidas donde no se tiene acceso. Igualmente estudiarán la construcción de polígonos semejantes, homotecias, líneas de simetría en figuras geométricas, y su presencia en la naturaleza, en diseños artísticos o arquitectónicos.

Asimismo trabajarán con el perímetro de figuras planas, en situaciones y contextos de la práctica. Además, profundizarán en las unidades de superficie y el área de figuras planas. También tratarán el Teorema de Pitágoras, familiarizándose con sus aplicaciones y generalizaciones.

De igual forma, en este bloque lidiarán con el área de polígonos regulares, las longitudes y áreas de figuras circulares, así como el área de prismas, pirámides, cilindros y conos.

Evaluaciones

Diagnóstica

Se realizará la evaluación diagnóstica a los estudiantes aplicando ejercicios donde tengan que calcular el valor de una incógnita en proporciones, lo que aportará información valiosa para el trabajo con el Teorema de Tales y la semejanza de triángulos. Igualmente, se chequeará si los estudiantes entienden y manejan las operaciones de elevar un número al cuadrado y de obtener la raíz cuadrada de un número, fundamental para el tratamiento del Teorema de Pitágoras. También los estudiantes tendrán que realizar conversiones simples de medidas de longitud del metro, sus múltiplos y submúltiplos en la resolución de problemas, aspecto que brindará un examen que será útil para el tema de cálculo de áreas con múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado. Asimismo se diagnóstica la identificación de polígonos regulares, así como de prismas y pirámides regulares, por su incidencia en el cálculo de áreas de estos.

Formativa

Se realizará la evaluación formativa para obtener información del avance que ha adquirido cada estudiantes en cuanto a los contenidos impartidos. Se realizarán ejercicios de identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, donde es importante la interpretación del Teorema de Tales. Igualmente se evaluará la aplicación de la semejanza en la construcción de figuras semejantes, donde se recomienda que se varíe el centro de la homotecia y el signo del factor de proporcionalidad. De igual forma se aconseja potenciar el reconocimiento del metro cuadrado como unidad de medida de superficie, como en el ejercicio 6 donde el estudiante puede hacer el trabajo con centímetros cuadrados.

Sumativa

La evaluación sumativa se realizará en función de constatar que los estudiantes hayan adquirido las destrezas para calcular longitudes en la solución de problemas geométricos y aplicar el Teorema de Pitágoras a la resolución de triángulos rectángulos. Se recomienda que se traten problemas que impliquen indirectamente el cálculo del perímetro de polígonos y que se presenten ejercicios integradores para calcular el área de prismas y pirámides regulares, así como de cilindros y conos.

Respuestas

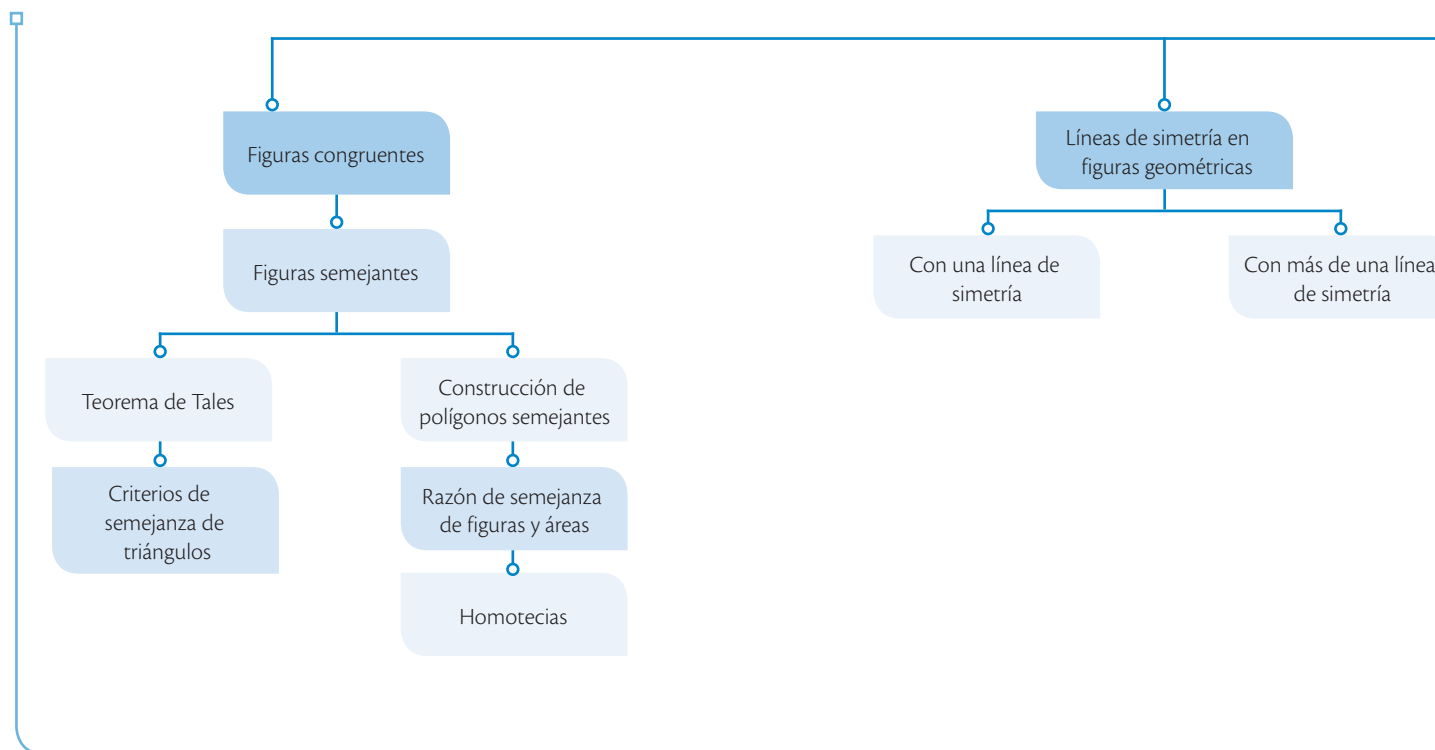
Evaluación diagnóstica

1. a. $x = 2$; b. $x = 6$; c. $y = 9$ o $y = -9$; d. $y = \frac{5}{24}$
2. a. 25; b. 144; c. 169; d. 343
3. a. 8 porque $8 \times 8 = 64$; b. 15 porque $15 \times 15 = 225$; c. 35 porque $35 \times 35 = 1225$; d. 10 porque $10 \times 10 \times 10 = 1000$.
4. 56m.
5. a. $2300\text{dm} = 230000\text{mm}$; b. $75\text{cm} = 0,75\text{m}$.
6. A, B y D
7. A
8. A

Esquema conceptual

Conocimientos de la unidad

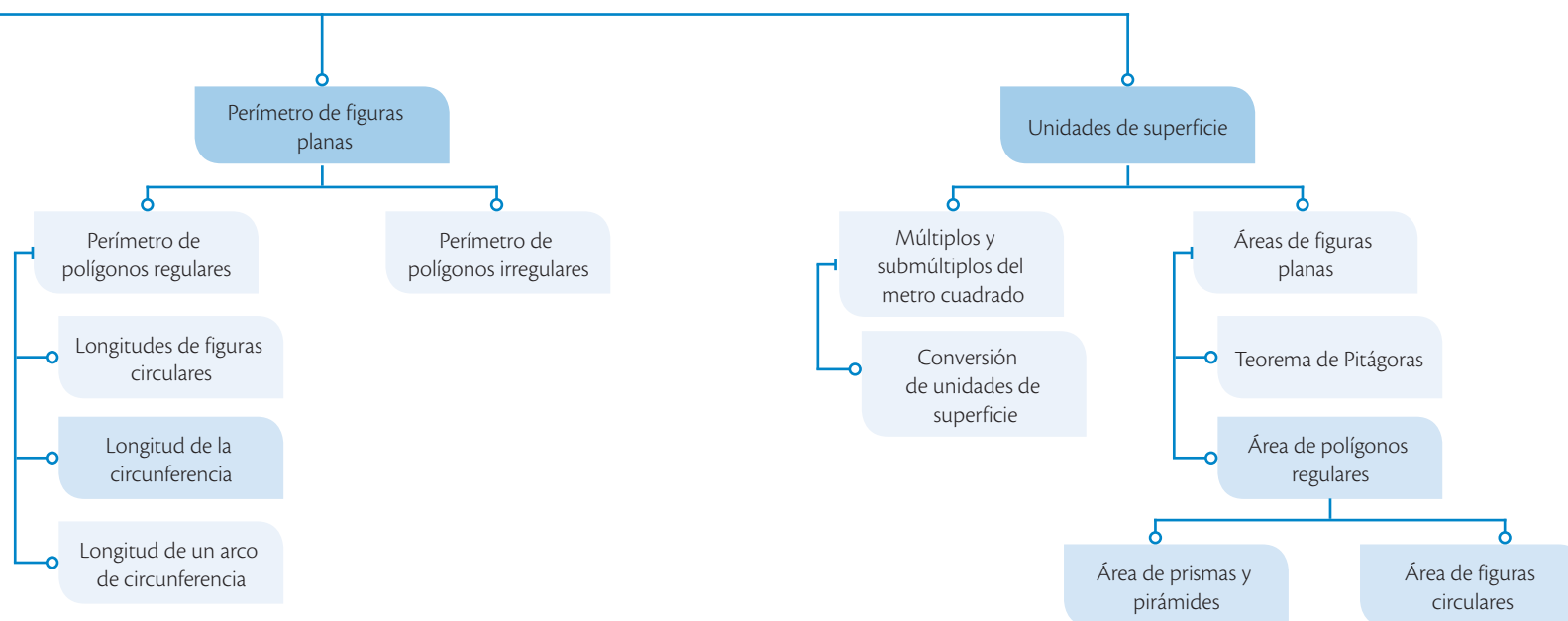
Bloque de
geometría y medida



Cultura del Buen Vivir

■ Valor: La curiosidad

El valor de la curiosidad es aquel que impulsa al ser humano a adquirir conocimientos mediante la experiencia o la investigación.



■ Compromiso a lograr

En esta unidad se abordan temas muy importantes que se relacionan directamente con lo cotidiano, y que se manifiestan en la vida práctica de manera muy frecuente por lo que están en correspondencia con los conocimientos, destrezas y actitudes que deben alcanzar los estudiantes, de ahí que contribuyen a lograr que estos adquieran el valor indicado en la unidad. Aprenderán a utilizar la aproximación geométrica de manera que se ilustre que para un número lo suficientemente grande de lados en un polígono regular la longitud de la circunferencia circunscrita se aproxima al perímetro del polígono. Igualmente conocerán sobre criterios de semejanza de triángulos, vinculados a fenómenos donde estos adquieren significados que pueden generar la curiosidad de la búsqueda de medidas donde no se tiene acceso. Estudiarán la construcción de polígonos semejantes, líneas de simetría y su presencia diferentes contextos. De tal forma durante las clases se harán continuas reflexiones sobre descubrir cosas nuevas sin miedo a equivocarse, de la búsqueda con confianza de respuestas a problemas derivados de la realidad.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 4: semejanza y medición				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.2. – OG.M.3		O.M.4.5. – O.M.4.6.		
Objetivos de subnivel		Valores		
OI.4.4. – OI.4.5. – OI.4.8. – OI.4.9.		• La curiosidad (I.1., I.4.) – (I.3.)		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.5.		I.M.4.5.1. – I.M.4.5.2.		
Objetivos de la unidad				
• Resolver problemas sobre semejanza y medición de figuras geométricas a partir de las medidas de los ángulos y la relación entre las medidas de los lados, desde fenómenos de la vida cotidiana donde estos adquieren significado, para contribuir a lograr que los estudiantes desarrollen el interés por explorar y descubrir respuestas a problemas derivados de la realidad, en función de estimular su creatividad.				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Geometría y medida	- Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados. - Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, determinando el factor de escala entre figuras semejantes (Teorema de Tales). - Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados. - Definir e identificar polígonos semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, utilizando la tecnología. - Aplicar criterios de semejanza para reconocer triángulos rectángulos semejantes y resolver problemas.	Reactive fundamentalmente las condiciones previas relacionadas con el cálculo de incógnitas en proporciones, así como las operaciones de elevar un número al cuadrado y de obtener la raíz cuadrada de un número, fundamental para el tratamiento del Teorema de Pitágoras. Igualmente, recuerde el trabajo con conversiones simples de medidas de longitud del metro, sus múltiplos y submúltiplos en la resolución de problemas, además de trabajar en la identificación de polígonos, prismas y pirámides regulares.	- Aplica las fórmulas del área de polígonos en la resolución de ejercicios. - Calcula el perímetro de distintas figuras geométricas. - Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos. - Aplica el teorema de Tales en la resolución de problemas.	Actividad: Identifique figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Geometría y medida	- Reconocer y trazar líneas de simetría en figuras geométricas para completar o resolver figuras geométricas - Aplicar la semejanza en la construcción de figuras semejantes, el cálculo de longitudes y la solución de problemas geométricos. - Resolver problemas que impliquen el cálculo del perímetro de polígonos irregulares. - Realizar conversiones simples de medidas de longitud del metro, múltiplos y submúltiplos en la resolución de problemas. - Reconocer el metro cuadrado como unidad de medida de superficie, los submúltiplos y múltiplos, y realizar conversiones en la resolución de problemas. - Calcular el área de triángulos en la resolución de problemas. - Calcular el área de figuras planas en la resolución de problemas. - Aplicar el Teorema de Pitágoras a la resolución de triángulos rectángulos - Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos. - Calcular longitudes de figuras circulares en la resolución de problemas. - Calcular longitudes y áreas de figuras circulares en la resolución de problemas. - Construir pirámides y prismas a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de pirámides y prismas. - Construir pirámides y prismas a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de pirámides y prismas. - Construir conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de conos y cilindros.	- Abarque la mayor diversidad posible de situaciones diferentes en que se requiera o tenga sentido el uso de la semejanza y la medición de figuras geométricas. Brinde oportunidades para la explicación de todas las posibles variantes mediante la reflexión individual o colectiva de cada posible vía de solución. Propicie que los estudiantes busquen, discutan y analicen sobre las diferentes formas de proceder y las múltiples posibilidades de modelar situaciones bajo la sistematización y actualización de los conocimientos. - Involucre a los estudiantes en la construcción de medios de enseñanza-aprendizaje para activar y motivar el proceso. - Plantee aplicaciones prácticas para resolver problemas de la vida cotidiana, en función de que los estudiantes entiendan el porqué de su estudio, en qué situaciones van a poder utilizarlas y qué utilidad tienen en sus vidas.	- Reconoce líneas de simetría en figuras geométricas. - Dibuja figuras geométricas semejantes. - Aplica las fórmulas del área de polígonos en la resolución de ejercicios. - Calcula el perímetro de distintas figuras geométricas.	Técnica: observación Instrumento: registro descriptivo

Recursos: mapas de una misma región a diferentes escalas, modelos de ferrocarriles, aviones, pequeños dibujos a escala, vehículos (juguetes) o fotografías adecuadas, láminas de diferentes tamaños de un mismo objeto, hojas de papel o cartulina, software geogebra, hilo de coser, piezas de rompecabezas, papel cuadrículado.

Bibliografía: Enciclopedia autodidáctica interactiva Océano. (2001) t III. Barcelona: Ed. Océano SA, – Bue, J. C., Candio, D., Lagreca, N., & Martínez, M. D. L. (2015). 1301-15 MATEMATICA Proporcionalidad-Semejanza-Razones Trigonómicas. – Hernández Fonnegra, J. C., García Durán, M. T., & Pérez Flórez, Y. D. (2015). Comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza mediante el doblado de papel. – Maldonado Rodríguez, L. (2013). Enseñanza de las simetrías con uso de geogebra según el modelo de Van Hiele

Recomendaciones para desarrollar la lección

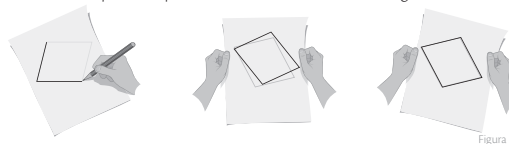
- Presente actividades que lleven a los estudiantes al reconocimiento, a la comprensión, al análisis, síntesis de los conceptos necesarios para que pueda llegar a reconocer figuras congruentes y distinguir aquellas que son semejantes.
- Emplee el estudio de mapas de una misma región a diferentes escalas y su relación con los conceptos de semejanza, razón y proporción.
- Motive para el estudio de la semejanza a partir de experiencias prácticas de los estudiantes, relacionada con sus intereses. Para esto pueden resultar adecuados los modelos de ferrocarriles, aviones, pequeños dibujos a escala, vehículos (juguetes) o fotografías adecuadas. También pueden servir láminas de diferentes tamaños de un mismo objeto.
- Presente los temas inicialmente a un nivel de visualización, donde acerque a los estudiantes al reconocimiento del espacio y los conceptos geométricos involucrados, como su vocabulario y a identificar sus formas (ángulos, lados,...).
- Lleve luego a los estudiantes a que empiecen a discernir sobre las características de las figuras, sus propiedades, partes y relaciones entre ellas.
- Presente parejas de figuras planas (algunas congruentes o semejantes y otras no), y pídales a los estudiantes que identifiquen las parejas que son congruentes o semejantes. Utilice hojas de papel o cartulina para superponer las figuras congruentes.

1

Figuras congruentes y figuras semejantes

1.1 Figuras congruentes

Al calcar la Figura 1 y superponerla a la Figura 2, se observa que coinciden exactamente, excepto en su posición, tal como se observa en la Figura 3.



Las figuras tienen la misma forma y el mismo tamaño; además, sus lados correspondientes son congruentes (tienen la misma medida) y, a su vez, sus ángulos correspondientes son congruentes.

Dos **figuras** son **congruentes** si tanto los ángulos correspondientes como los lados correspondientes son congruentes. La relación de congruencia se simboliza con $\cong$.

Ejemplo 1

Los triángulos de las figuras 4 y 5 son congruentes, ya que se cumple que:

1. $AB = 23 \text{ cm} = DE$; $BC = 44 \text{ cm} = EF$; $AC = 40 \text{ cm} = DF$. Por lo tanto,

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ y } \overline{AC} \cong \overline{DF}.$$

2. $m\angle A = 84^\circ = m\angle D$; $m\angle B = 53^\circ = m\angle E$; $m\angle C = 43^\circ = m\angle F$. Entonces,

$$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E \text{ y } \angle C \cong \angle F$$

1.2 Figuras semejantes

Dos **figuras** son **semejantes** cuando los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. El cociente entre los lados correspondientes se llama **razón de semejanza** o **escala**. Se designa por la letra k .

Actividad resuelta

Comunicación

- Explica por qué los cuadriláteros de las figuras 6 y 7 son semejantes. Indica cuál es la razón de semejanza.

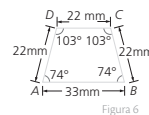


Figura 6

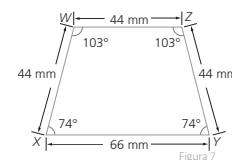


Figura 7

Solución:

En las figuras se observa que $\angle A \cong \angle X$; $\angle B \cong \angle Y$; $\angle C \cong \angle Z$; $\angle D \cong \angle W$, y que $\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZW} = \frac{DA}{WZ} = \frac{1}{2}$. Es decir, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Copia en tu cuaderno cada polígono y traza otro
● congruente a este en diferente posición.

a.



Figura 8

b.



Figura 9

c.



Figura 10

d.



Figura 11

- 3 Calcula la razón de semejanza de dos triángulos
● semejantes, si un lado del más pequeño mide 4 cm y el lado correspondiente del más grande mide 6 cm.

- 4 Identifica cuál de las figuras de la parte inferior no tiene
● una pieza congruente en el rompecabezas.

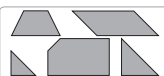
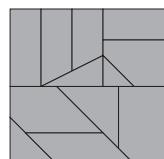


Figura 12

- 5 Halla la medida de los lados de un triángulo semejante a
● otro cuyos lados miden 5 cm, 9 cm y 12 cm, con razón de semejanza igual a 3.

- 6 Lee y halla lo que se indica en cada caso.

- Un rectángulo de 8 cm de altura y 20 cm de base es semejante a otro rectángulo de 6 cm de altura.

- a. La razón de semejanza.
b. La base del otro rectángulo.
c. Las áreas de ambos rectángulos.

Razonamiento

- 7 Construye cuadrados de diferentes medidas e indica si
● son semejantes. Justifica tu respuesta.

- 8 Determina si un rectángulo que mide 6 cm de largo por
● 8 cm de ancho es semejante a uno de 15 cm de largo por 24 cm de ancho.

- 9 Comprueba si el paralelogramo ABCD es semejante al
● paralelogramo XYZW.

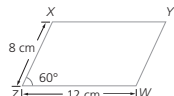
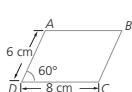


Figura 13

- 10 Indica si son o no congruentes los cuadriláteros que se
● muestran a continuación.

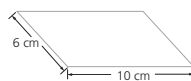


Figura 14

Resolución de problemas

- 11 Halla el valor de x en cada caso, si se sabe que cada par de
● triángulos son semejantes.

a.

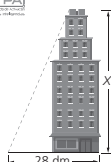


Figura 15

b.

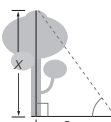
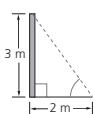


Figura 16

- 12 En una fotografía, Luis y Nancy miden 2,7 cm y 2,5 cm,
● respectivamente. En la realidad, Nancy tiene una altura de 162,5 cm.

- a. ¿A qué escala está hecha la foto?
b. ¿Qué estatura tiene Luis en la realidad?

- 13 Dado un segmento de 20 cm, se construye otro
● semejante a él aplicando una escala $k = 0,2$. ¿Cuánto mide este último?

Ejercitación

2. Respuesta abierta
3. La razón de semejanza es 1,5
4. El trapecio
5. 15 cm, 27 cm y 36 cm.
6. a. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$
b. $20 \cdot 0,75 = 15$ cm
c. 160 cm^2 y 90 cm^2 , respectivamente.

Razonamiento

7. Sí son semejantes.
8. No es semejante.
9. No son semejantes.
10. No son congruentes.

Resolución de problemas

11. a. $x = 56$ dm
b. $x = 4,5$ m
12. a. 1 : 65
b. 175,5 cm
13. 4 cm

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Introduzca los temas de una manera dinámica de manera que los estudiantes exploren y conjeturen con la utilización del software geogebra y utilicen el teorema para justificar sus conjeturas en la resolución de problemas.
- Realice una ejercitación de forma gradual y sistemática. Brinde oportunidades para la explicación de todas las posibles variantes mediante la reflexión individual o colectiva de cada posible vía de solución. Propicie que los estudiantes busquen, discutan y analicen sobre las diferentes formas de proceder y las múltiples posibilidades de modelar situaciones bajo la sistematización y actualización de los conocimientos.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Plantee un problema donde se tenga que obtener la altura de un objeto inclinado, de manera que primero los estudiantes exploren las proporcionalidades entre segmentos, para notar que, aunque en este caso el triángulo no es rectángulo, igualmente se puede calcular la longitud del segmento BC, conociendo las de los segmentos AC y AE, luego se puede pasar a la demostración de las proporciones.
- Generalice los resultados a tres o más paralelas cortadas por dos transversales, para lo que puede plantear un problema que requiera la utilización del Teorema de Tales y realizar actividades de exploración en función de elaborar conjeturas.

2

Teorema de Tales

Explora

En la Figura 1 se observa que los lados del triángulo ABC miden 4 cm, 6 cm y 8 cm.

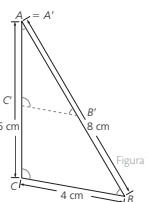


Figura 1

- Si $\overline{C'B'}$ es paralelo a $\overline{CB}$ e interseca los otros dos lados del triángulo ABC en su punto medio, ¿se puede afirmar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes?

Ten en cuenta

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, se determinan cuatro pares de ángulos correspondientes que son congruentes. En la Figura 3 se tiene que $a \cong a'$, $b \cong b'$, $c \cong c'$ y $d \cong d'$.

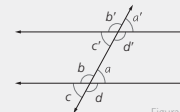


Figura 3

Ten en cuenta

Dos triángulos están en posición de Tales si tienen un ángulo común y los lados respectivos opuestos a este ángulo son paralelos. Los triángulos en posición de Tales son semejantes.



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

<http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=15219>

Realiza más actividades sobre el teorema de Tales.

Para responder la pregunta, se pueden seguir estos pasos.

- Se determina la congruencia de los ángulos.

$\angle A$ y $\angle A'$ son congruentes porque indican el mismo ángulo. $\angle B$ y $\angle B'$, y $\angle C$ y $\angle C'$ son respectivamente congruentes, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

- Se determinan las proporciones.

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

De los pasos 1 y 2, se concluye que $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son triángulos semejantes. Esto se simboliza así $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. En este caso, 2 es la razón de semejanza.

El resultado anterior permite generalizar el que se conoce como el **teorema de Tales**.

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

Otra forma de enunciar el teorema de Tales es la siguiente:

Si dos rectas secantes son cortadas por tres o más rectas paralelas, entonces los segmentos determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.

En la Figura 2 se observan dos rectas secantes (r y s) cortadas por varias rectas paralelas (a , b y c).

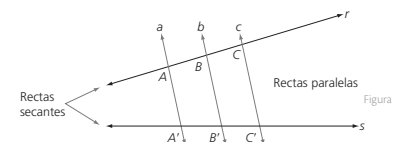


Figura 2

Según esta forma de enunciar el teorema de Tales, los segmentos determinados sobre la recta r son proporcionales a los segmentos determinados sobre la recta s . Es decir:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

- Calcula la longitud del segmento $A'B'$ de la Figura 4, si $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$.

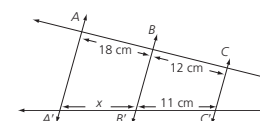


Figura 4

Solución:

Los segmentos determinados sobre $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ cumplen las condiciones del teorema de Tales. Por tanto,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{18}{x} = \frac{12}{11} \Rightarrow 12 \cdot x = 18 \cdot 11 \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 11}{12} = 16,5 \text{ cm.}$$

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, determinando el factor de escala entre figuras semejantes (Teorema de Tales).

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Analiza y responde.

- Los triángulos formados por una farola, un poste vertical y su sombra están en posición de Tales?

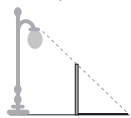


Figura 5

Razonamiento

3. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 cm y 8 cm. Al unir sus puntos medios, ¿resulta un triángulo semejante a este? Justifica tu respuesta.
4. Traza en un triángulo ABC una recta paralela al lado BC desde un punto B', de manera que $AB' = 0,25AB$. ¿Cuál es la razón de semejanza?
5. Observa la Figura 6, donde al unir los puntos medios de los lados del triángulo se forma otro. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo pequeño?

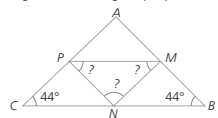


Figura 6

Ejercitación

6. Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud de los segmentos que faltan en cada caso.

a. $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c} \parallel \vec{d}$

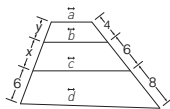


Figura 7

b. $\vec{r} \parallel \vec{s} \parallel \vec{t} \parallel \vec{u} \parallel \vec{v}$

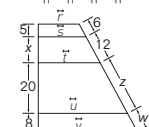


Figura 8

c. $\vec{m} \parallel \vec{n} \parallel \vec{p} \parallel \vec{q}$

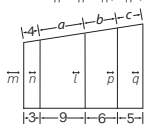


Figura 9

d. $\vec{e} \parallel \vec{f} \parallel \vec{g} \parallel \vec{h}$

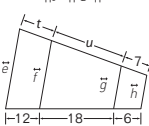


Figura 10

Razonamiento

7. Contesta las siguientes preguntas.

- a. Si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes congruentes, ¿son semejantes?
- b. Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales, ¿son semejantes?

8. Analiza y responde.

- ¿Qué valor debe tener k para que el triángulo MNO sea semejante al triángulo PQR?

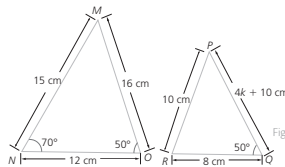


Figura 11

Resolución de problemas

9. Sabiendo que Patricia tiene una altura de 158 cm, halla la altura de la farola de la Figura 12.

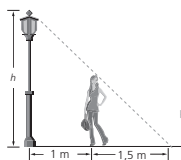


Figura 12

10. Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm por 2,5 cm. Si se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm, ¿cuánto medirá el lado menor?
11. En un triángulo ABC, $a = 6$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Calcula los lados de un triángulo A'B'C' semejante al triángulo ABC, de perímetro igual a 36 cm.
12. Una fotografía rectangular de 10 cm de base por 15 cm de altura se enmarca dejando una franja de 1 cm de ancho por todo el borde, como muestra la Figura 13. ¿Son semejantes los rectángulos que se forman al interior y al exterior?

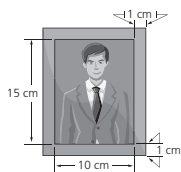


Figura 13

Comunicación

2. Sí

Razonamiento

3. Sí son semejantes.
4. La razón de semejanza es 4.

Razonamiento

5. $m\angle P = 44^\circ$; $m\angle M = 44^\circ$; $m\angle N = 92^\circ$

Ejercitación

6. a. $x = 4,4$; $y = 3$
b. $x = 10$; $z = 24$; $w = 9,6$
c. $a = 12$, $b = 8$ y $c = \frac{20}{3} = 6,6$
d. $u = 21$; $t = 14$

Razonamiento

7. a. Sí b. No

8. $k = \frac{1}{6}$

Resolución de problemas

9. $h = \frac{79}{30} = 2,63$ m
10. 10 cm
11. $a' = 9$, $b' = 12$ y $c' = 15$
12. No son semejantes

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Presente el tema vinculado a algunos fenómenos donde adquiere significado el concepto de semejanza de triángulos, como pueden ser: medida de profundidad de un pozo, determinación de la altura de un edificio, medición de distancia sobre un terreno horizontal, medición del radio y la sombra de la tierra, en topografía (representación de mapas, planos y maquetas).
- Introduzca situaciones en las que los estudiantes tengan que reconocer series de segmentos proporcionales, elegir razonadamente cuándo dos segmentos son proporcionales, argumentar por qué algunos segmentos son o no proporcionales, y resolver problemas donde involucren segmentos proporcionales.

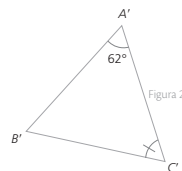
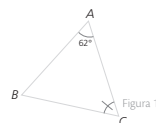
Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Sabemos que los ángulos interiores de un triángulo SUMAN necesariamente 180° . Si tenemos un triángulo que tiene dos de sus ángulos respectivamente iguales a dos de otro triángulo, ¿cómo será el tercer ángulo? ¿Son semejantes estos triángulos? ¿Por qué? Respuestas: los terceros ángulos serán respectivamente iguales y los triángulos son semejantes.
- Si tenemos dos triángulos equiláteros de diferente tamaño, ¿cómo serán sus ángulos? ¿Son semejantes estos triángulos? ¿Por qué? Respuestas: Todos los ángulos son iguales (60°) y los triángulos son semejantes.

Criterios de semejanza de triángulos

Explora

Observa las figuras 1 y 2.



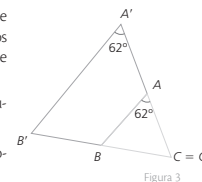
- ¿Es posible determinar si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes?

Al superponer los triángulos de tal forma que el $\angle C$ coincida con el $\angle C'$, se observa que los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en posición de Tales (Figura 3) porque:

- $\angle C \cong \angle C'$, ya que tales ángulos son comunes a ambos triángulos.

- $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{A'B'}$, pues los ángulos correspondientes A y A' son congruentes.

Luego, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Para determinar si dos triángulos son semejantes, basta con comprobar si cumplen algunos criterios que exigen menos condiciones que la definición.

Criterio 1: Ángulo — Ángulo (AA)

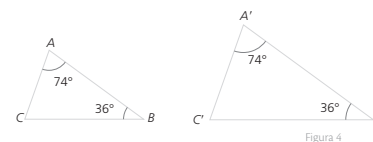
Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen dos de sus ángulos correspondientes congruentes.

Ejemplo 1

Los triángulos de la Figura 4, son semejantes, pues cumplen el criterio ángulo-ángulo.

$$\angle A \cong \angle A'$$

$$\angle B \cong \angle B'$$

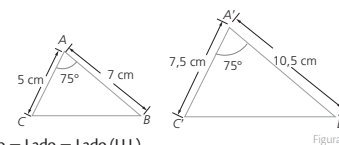


Criterio 2: Lado — Ángulo — Lado (LAL)

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes.

Ejemplo 2

Al observar la Figura 5, se puede afirmar que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, ya que se cumple el criterio 2. La razón de proporcionalidad es $\frac{2}{3}$.



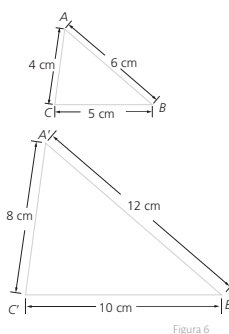
Criterio 3: Lado — Lado — Lado (LLL)

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

Ejemplo 3

Los lados del triángulo $A'B'C'$ de la Figura 6 miden el doble que los lados correspondientes del triángulo ABC , por lo cual se cumple que los lados de los triángulos son proporcionales.

Según el criterio LLL, se deduce que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño:

Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Lee y resuelve.

- En un triángulo ABC , $m\angle A = 35^\circ$, $AB = 3$ cm y $AC = 6$ cm. En otro triángulo DEF , $m\angle D = 35^\circ$, $DE = 6$ cm y $DF = 12$ cm. ¿Son los triángulos ABC y DEF semejantes?

Solución:

Los dos triángulos tienen, respectivamente, un ángulo congruente: $\angle A \cong \angle D$.

Los lados correspondientes que determinan tales ángulos son proporcionales:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

Por tanto, según el criterio 3, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

CULTURA del Buen Vivir

La curiosidad

La curiosidad es el valor que nos lleva a aventurar y descubrir cosas nuevas en la vida.

- Escribe una situación donde tu curiosidad pueda enriquecer los conocimientos de tus compañeros y los tuyos.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 2 Determina si cada par de triángulos son semejantes o no. Indica el criterio que aplicaste en caso de que lo sean.

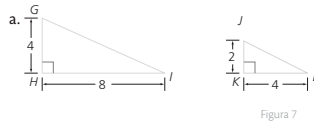


Figura 7

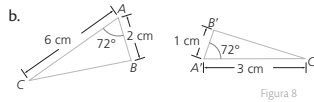


Figura 8

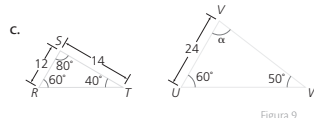


Figura 9

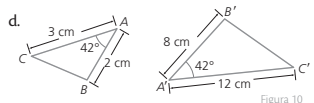


Figura 10

Ejercitación

- 4 Observa la Figura 11 y calcula AD y DE , si se sabe que DE es paralelo a BC .

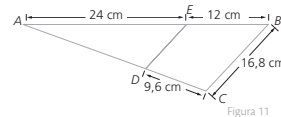


Figura 11

- 5 Sabiendo que a y b son paralelas, halla sus medidas.

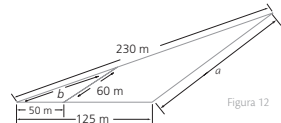


Figura 12

Resolución de problemas

- 6 En la Figura 13 los triángulos ACD y CBD son semejantes. ¿Cuánto mide h ?

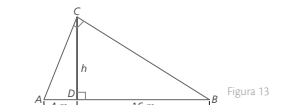


Figura 13

- 7 Calcula la altura de la torre de la iglesia.

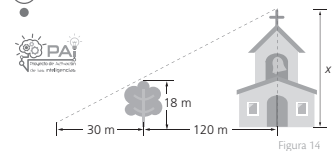


Figura 14

Razonamiento

- 3 Construye un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mida 52° , y otro triángulo isósceles cuyos ángulos congruentes midan 64° cada uno. ¿Son semejantes los dos triángulos construidos?

Comunicación

- Son semejantes (LAL).
- Son semejantes (LAL).
- No son semejantes.
- Son semejantes (LAL).

Razonamiento

3. Son semejantes los triángulos por el criterio AA.

Ejercitación

4. $AD = 19,2$ cm y $DE = 11,2$ cm

Razonamiento

5. $a = 150$ m y $b = 92$ m

Resolución de problemas

6. $h = 8$ m

7. 90 m

Recomendaciones para desarrollar la lección

Introduzca el concepto de polígonos semejantes de manera intuitiva para luego dar una definición más precisa. Ejemplo: se pueden dibujar tres rectángulos en la pizarra. Hacer que dos sean semejantes, quizás con lados de razón 1 a 2. El tercer rectángulo deberá ser muy diferente, tal vez con lados en razón de 1 a 10. Pregunte ¿Qué rectángulos se parecen más? Así al principio la noción de semejanza se desarrollará intuitivamente.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Proponga a los estudiantes situaciones de aprendizaje en las que tengan que reconocer la semejanza de polígonos cuando las medidas de los lados de uno no son múltiplos enteros de las medidas del otro, en función de atender esta posible fuente de error en la que se utiliza la adición para la ampliación, con el fin de evitar la multiplicación por una fracción.
2. Plantee actividades en las que los estudiantes tengan que construir al menos tres polígonos semejantes a uno dado. Después, los estudiantes medirán al menos tres longitudes en cada figura y poner todas las medidas en una tabla para hacer las comparaciones entre las mismas. Realice algunas comparaciones mediante razones.



4

Construcción de polígonos semejantes

Explora

Paula quiere saber cómo puede construir una figura semejante a otra dada.

- ¿Qué debe hacer Paula?

Ten en cuenta

A partir de la definición de triángulos semejantes, se puede deducir una para polígonos semejantes:

"Dos polígonos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes congruentes".



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www.tutor.com/geo/eso/ss_Se.html
Aprende más acerca de la relación entre las áreas de dos figuras semejantes.

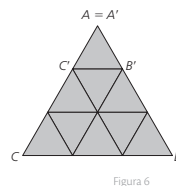


Figura 6

Paula debe seguir los siguientes pasos para construir polígonos semejantes.

1. Dado un polígono cualquiera, se trazan las semirrectas que unen un vértice con todos los demás. En la Figura 1 se trazaron las semirrectas a partir del vértice A; de esta manera, se obtiene el polígono ABCDE descompuesto en triángulos.

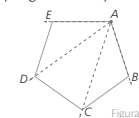


Figura 1

2. A partir del vértice A se mide la longitud del lado del polígono que va a ser semejante al polígono dado y se ubica un punto. Desde ese punto se trazan paralelas a los lados del polígono. En la Figura 2 se observa el polígono A'B'C'D'E, el cual es semejante al polígono ABCDE.

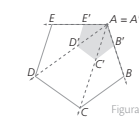


Figura 2

Los polígonos son semejantes porque los triángulos en los que están descompuestos estos polígonos están en posición de Tales.

Para construir un polígono semejante a otro, se descompone en triángulos y con el método de Tales se construyen otros semejantes.

4.1 Razón de semejanza de figuras y áreas

Si dos figuras son semejantes con razón de semejanza k , la razón de sus perímetros es k y la razón de sus áreas es k^2 .

Ejemplo 1

Dado el cuadrado ABCD, se dibuja el cuadrado A'B'C'D' semejante al de la Figura 3 con razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$.

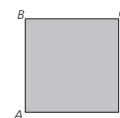


Figura 3

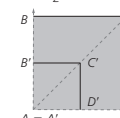


Figura 4

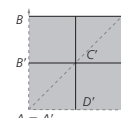


Figura 5

En la Figura 5 se observa que el cuadrado A'B'C'D' está contenido cuatro veces en el cuadrado ABCD; por tanto, la razón entre sus áreas es:

$$\frac{\text{Área } A'B'C'D'}{\text{Área } ABCD} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = k^2$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Construye un triángulo A'B'C' semejante a un triángulo equilátero ABC de lado 3 cm con razón de semejanza $k = \frac{1}{3}$, y estudia la relación entre sus áreas.

Solución:

Se construye el lado $\overline{A'B'}$ sobre el lado $\overline{AB}$ de manera que $\overline{AB'} = 1$ cm, y se traza la paralela al lado $\overline{BC}$ (Figura 6). Como el $\triangle ABC$ contiene nueve veces el $\triangle A'B'C'$, la razón entre las áreas es:

$$\frac{\text{Área } A'B'C'}{\text{Área } ABC} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Bloque de Geometría y Medida

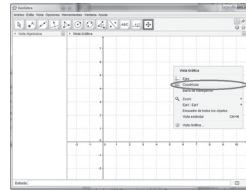
Destrezas con criterios de desempeño: Definir e identificar polígonos semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, utilizando la tecnología.
Aplicar criterios de semejanza para reconocer triángulos rectángulos semejantes y resolver problemas.

Matemáticas

Construye polígonos en GeoGebra

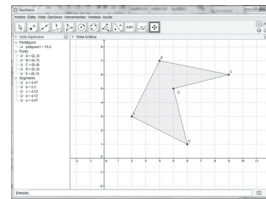
En GeoGebra puedes construir polígonos de cualquier número de lados apoyándote en la cuadrícula, con el procedimiento que se muestra a continuación.

Haz clic derecho en la vista gráfica de GeoGebra y selecciona la opción *Cuadrícula*. En la pantalla se observa lo siguiente:



Haz clic en el icono y marca un punto sobre la cuadrícula, el cual quedará etiquetado como A.

Marca cuatro puntos más en distintos lugares de la cuadrícula. Finaliza haciendo clic en el punto A; de esta manera, quedará construido el polígono ABCDE, que tiene cinco lados.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Calcula la razón de las áreas de dos cuadrados semejantes con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.
3. Construye una cometa de lados 1,5 veces mayores que los de la Figura 7.

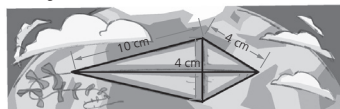


Figura 7

4. Copia en tu cuaderno el paralelogramo de la Figura 8 y construye un polígono semejante con razón de semejanza 3. Explica con el dibujo cuál es la razón de sus áreas.

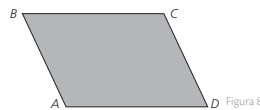


Figura 8

5. Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante al de la figura 9, de modo que la razón de sus áreas sea $\frac{25}{4}$.

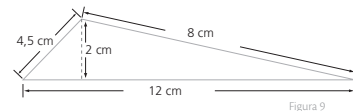


Figura 9

6. Halla la razón de semejanza, si se conoce que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es $\frac{16}{9}$.

Resolución de problemas

7. Un edificio proyecta una sombra de 80 m. El mismo día y a la misma hora, un palo vertical de 24 m de largo proyecta una sombra de 20 m. Calcula la altura del edificio.

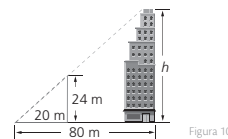


Figura 10

8. Calcula la anchura del río.

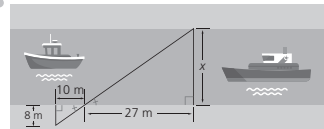


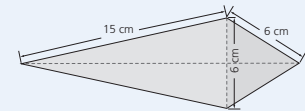
Figura 11

9. El perímetro de un triángulo equilátero es 30 cm. Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a este, si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

Ejercitación

2. $\frac{9}{4}$

3.



4. La razón de sus áreas es 9.
5. Las longitudes de los lados del triángulo son: 30 cm, 11,25 cm y 20 cm y su altura es 5 cm.
6. La razón de semejanza es $\frac{4}{3}$.

Resolución de problemas

7. 96 m
8. 21,6 m
9. 5 cm

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Presente el tema a partir de que los estudiantes logren reconocer simetrías en la naturaleza, en diseños artísticos o arquitectónicos, como también que dibujen líneas de simetrías o completen dibujos simétricos.
- Proponga actividades en las que tengan que conocer las propiedades de las figuras simétricas, confeccionar algunas mediante plegados, así como que tengan que identificar la línea de plegar con la línea de simetría.
- Plantee tareas en las que tengan que dibujar figuras simétricas en una tabla de cuadrículas, aplicando un patrón.
- Presente actividades a partir del triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular, en las que tengan que descubrir que los polígonos regulares pueden tener más de una línea de simetría, y que tienen tantas como su cantidad de lados.
- Diseñe tareas en las que tengan que dibujar figuras geométricas con más de una línea de simetría.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Proponga actividades a los estudiantes en las que tengan que demostrar que existen líneas de simetría en figuras geométricas, identificando y creando figuras simétricas, así como dibujando una o más líneas de simetría en figuras que las tengan y usando algún software que ofrezca esta posibilidad.
- Plantee a los estudiantes situaciones de aprendizaje en las que estos deban reconocer la reflexión por medio de figuras geométricas con una línea de simetría.

Líneas de simetría en figuras geométricas

Explora

¿Dónde podríamos trazar una línea en este trébol para obtener dos figuras exactamente iguales?



CULTURA del Buen Vivir

La curiosidad

La persona curiosa encuentra cosas que le interesan prácticamente en cualquier parte. Es capaz de hacer que una tarea, que en principio parece aburrida, se convierta en algo interesante.

- Describe una de las actividades que haya propuesto tu profesor de matemática para enseñar o reforzar un tema y que haya despertado tu curiosidad y tus ganas de aprender.

Parte de los elementos de la naturaleza que nos rodean presentan una propiedad muy interesante, esta consiste en que si dividimos el elemento por un lugar especial en dos partes, las dos mitades son iguales.

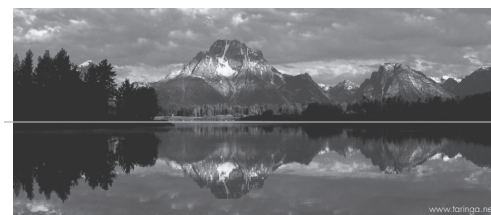
Si dibujamos una línea a lo largo de una figura y observamos que las dos partes son iguales, entonces habremos encontrado su línea de simetría.



Llamamos línea de simetría a la recta que permite dividir una figura en dos partes cuyos elementos son equidistantes, que tienen la misma forma y dimensiones.

Ejemplo 1

Esto podemos observar cuando nos ubicamos frente a un espejo o cuando observamos un reflejo en el agua.



Las figuras geométricas pueden tener una o más líneas de simetría que a su vez pueden ser horizontales, verticales o diagonales.

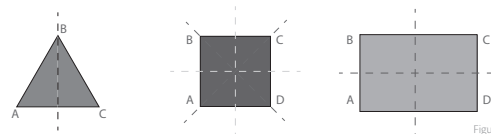


Figura 1

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer y trazar líneas de simetría en figuras geométricas para completar o resolver figuras geométricas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

1 Verifica las siguientes afirmaciones:

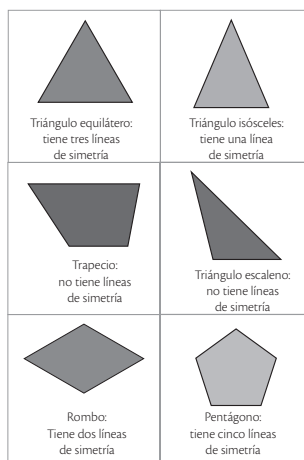


Figura 2

2 Completa la otra mitad, para que la figura sea simétrica con respecto a la línea de simetría trazada.

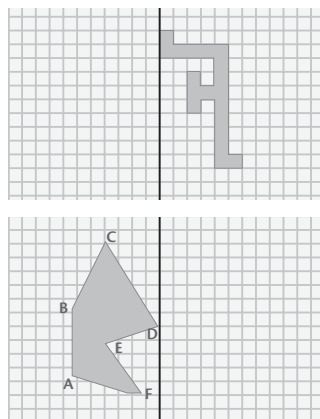


Figura 3

3 Traza los ejes de simetría que sean posibles en cada una de las figuras.

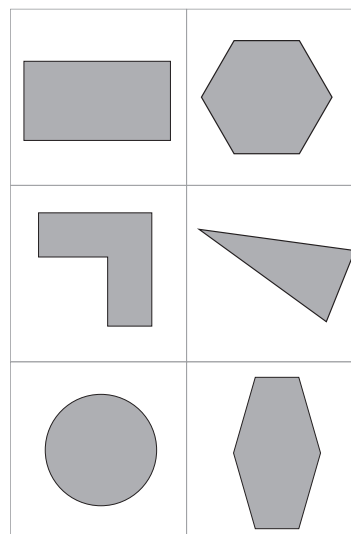


Figura 4

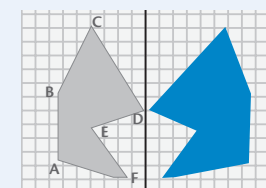
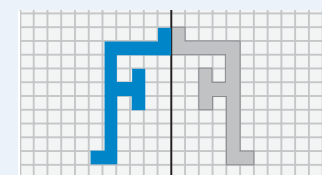
4 Dibuja una figura simétrica y traza su línea de simetría.



Ejercitación

1. Verificar validez de la respuesta.

2.



3. Verificar Validez de la respuesta

4. Respuesta abierta

Ampliación conceptual

A diferencia de las transformaciones isométricas, las homotecias no necesariamente generan figuras congruentes, pues la imagen de una figura dada bajo una homotecia de razón k , será una figura ampliada, o reducida k veces respecto de la figura original (esto si $|k| > 1$, o $|k| < 1$ respectivamente, en particular, si $k = 1$ la figura generada por la homotecia es congruente a la original). La homotecia genera figuras geométricas semejantes, cuya razón de proporcionalidad es precisamente k .

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Proponga a los estudiantes ejercicios en los que varíe el signo del factor de proporcionalidad o razón de la homotecia. Este signo de k determina si la imagen de la figura se localiza del mismo lado del centro de la homotecia que la preimagen (esto si $k > 0$), o del lado opuesto (si $k < 0$).
- Presente actividades con la utilización de las herramientas de transformaciones del asistente matemático Geogebra, donde la opción "Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala" determina la imagen del objeto bajo una homotecia de centro y razón dados. Este software cuenta además con útiles herramientas de cálculo que permiten establecer las medidas y relaciones entre elementos en el área de trabajo.

6

Homotecias

Explora

Natalia escribió en una hoja la letra inicial de su nombre como se muestra en la Figura 1.



Figura 1

- Si Natalia amplió su dibujo en la fotocopidora al 120%, ¿qué crees que observó al comparar las dos hojas?

Ten en cuenta

Cuando el factor de proporcionalidad es negativo, el centro de la homotecia queda situado entre el punto y su imagen (observa la Figura 6).

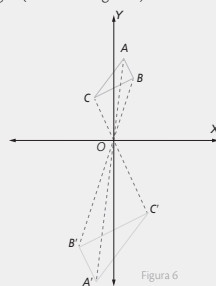


Figura 6

Al comparar la fotocopia con el original, Natalia observó que obtuvo una letra N semejante a la que había dibujado en el papel, es decir, con la misma forma pero con diferente tamaño (en este caso más grande, ya que amplió su dibujo al 120%).

Si se trazan rectas que contengan los puntos ampliados con los correspondientes originales, se observa que todas concurren en un mismo punto O, que sería el centro de la homotecia (Figura 2).

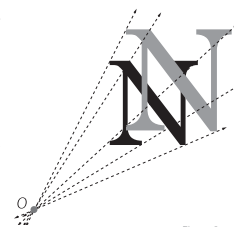


Figura 2

Una **homotecia** es una transformación que se realiza sobre una figura en el plano con el fin de obtener **figuras semejantes** a la dada. Para efectuar una homotecia, se debe elegir un centro denominado **foco** y un **factor de proporcionalidad** o **razón de la homotecia**.

Ejemplo 1

Para obtener un polígono semejante al triángulo ABC de la Figura 3 mediante una homotecia con centro en el punto O y factor de proporcionalidad 2, se realiza el siguiente procedimiento:

- Se trazan semirrectas desde el foco de la homotecia (O) a cada uno de los vértices del triángulo.

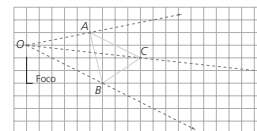


Figura 3

- Se miden las distancias (d) del foco a cada uno de los vértices del polígono.

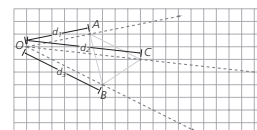


Figura 4

- Se multiplica cada distancia por el factor de proporcionalidad 2. Finalmente, se marcan sobre las semirrectas las distancias obtenidas ($2 \cdot d$) y se traza el polígono imagen.

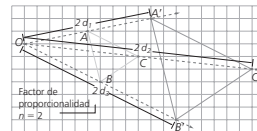


Figura 5

Los triángulos $A'B'C'$ y ABC de la Figura 5 son semejantes. Como el factor de proporcionalidad es 2, entonces los lados del triángulo $A'B'C'$ miden el doble que los lados del triángulo ABC .

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño:

Aplicar la semejanza en la construcción de figuras semejantes, el cálculo de longitudes y la solución de problemas geométricos.

Actividad resuelta

Ejercitación

- 1 Aplica al triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(2, 1)$ y $C(5, 1)$ una homotecia con centro en el punto $(0, 0)$ y factor de proporcionalidad 2.

Solución:

Como la razón de homotecia es 2 y el foco está en $(0, 0)$, basta con multiplicar las coordenadas de cada vértice del triángulo ABC por 2 para obtener las coordenadas de los vértices del triángulo semejante obtenido mediante la homotecia.

$$A' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 6)$$

$$B' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 1) = (4, 2)$$

$$C' = (2 \cdot 5, 2 \cdot 1) = (10, 2)$$

En la Figura 7 se observa el triángulo ABC y su imagen $A'B'C'$ mediante una homotecia.

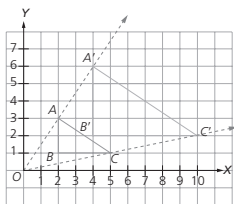


Figura 7

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Completa el proceso para aplicar la homotecia con foco en O y factor de proporcionalidad 2, al triángulo ABC de la Figura 8. Traza el polígono imagen $A'B'C'$.

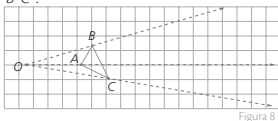


Figura 8

$$\begin{array}{lcl} n = 2 & & \\ OA = 2 \text{ cm} & OA' = & \\ OB = 2,5 \text{ cm} & OB' = & \\ OC = 3 \text{ cm} & OC' = & \end{array}$$

- 3 Aplica a cada polígono las homotecias indicadas, con foco en el punto dado.

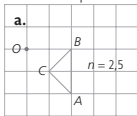


Figura 9

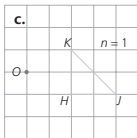


Figura 11

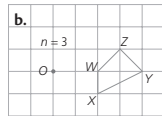


Figura 10

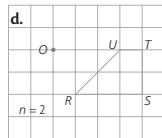


Figura 12

- 4 Aplica una homotecia de centro $(0, 0)$ y factor de proporcionalidad $\frac{1}{2}$, al polígono cuyos vértices son $(2, 2)$, $(2, 6)$, $(6, 2)$ y $(6, 6)$.

Razonamiento

- 5 Halla las coordenadas del triángulo semejante al triángulo ABC cuyos vértices son $A(0, 2)$, $B(2, 1)$ y $C(1, 4)$, mediante la homotecia indicada en cada caso.

- a. Centro $(4, 4)$ y factor de proporcionalidad -2 .
b. Centro $(1, 3)$ y factor de proporcionalidad 3.
c. Centro $(2, 0)$ y factor de proporcionalidad 2.

- 6 Dibuja en tu cuaderno la figura semejante al hexágono $ABCDEF$ de la Figura 13, con factor de proporcionalidad $\frac{3}{2}$ y centro de semejanza el punto O .

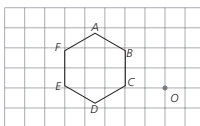


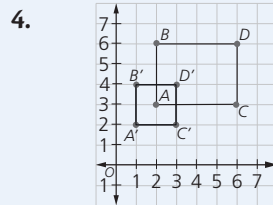
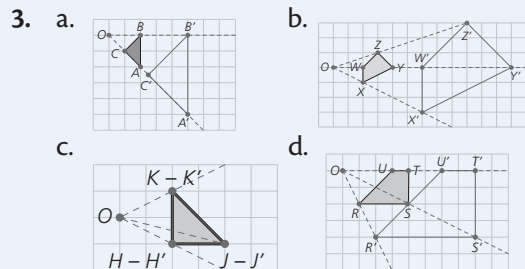
Figura 13

Resolución de problemas

- 7 Un publicista elabora una valla publicitaria en la que aparece una etiqueta en forma de cometa cuyas dimensiones son 12 cm, 12 cm, 15 cm y 15 cm. Si decide presentar en la valla la etiqueta normal, aplicando homotecias en factores de proporcionalidad 0,25; 1,5 y 3, respectivamente, ¿cuál sería la presentación de la etiqueta y sus copias en la valla publicitaria?

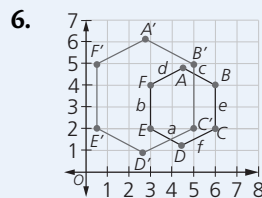
Ejercitación

2. $OA' = 4 \text{ cm}$, $OB' = 5 \text{ cm}$ y $OC' = 6 \text{ cm}$



Razonamiento

5. a. $A'(12, 8)$; $B'(8, 10)$; $C'(10, 4)$
b. $A'(-2, 0)$; $B'(4, -3)$; $C'(1, 6)$
c. $A'(-2, 4)$; $B'(0, 8)$; $C'(2, 2)$



Resolución de problemas

7. Respuesta abierta

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Proponga a los estudiantes resolver problemas relativos al cálculo del perímetro en diferentes situaciones y contextos de la práctica empleando diversas vías.
- No limite este tema al uso de una fórmula y cálculo. Una variante puede ser auxiliarse de un hilo de coser para cubrir con él la línea de contorno de la figura plana hasta recorrer todo el borde, marcar en el hilo y luego con este extendido medir la longitud con la regla o cualquier otro instrumento de medición. Este procedimiento puede ampliar la posibilidad de resolver ejercicios del cálculo del perímetro para figuras planas irregulares por su forma.

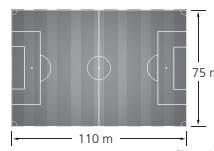
■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Plantee resolver problemas de cálculo geométrico que conduzcan a perímetros de figuras planas, y que se expresan en unidades del SI y otras de uso común, de modo que puedan también resolver problemas de interés práctico vinculados con su entorno natural y social, valorando en cada caso la exactitud necesaria de los cálculos.
- Utilice asistentes matemáticos como el Geogebra para que los estudiantes valoren y establezcan conjeturas sobre el efecto que tiene la variación de una o varias de las dimensiones de una figura plana en su perímetro.
- Presénteles a los estudiantes actividades en las que tengan que trabajar con la razón de semejanza entre perímetros de triángulos semejantes.

Perímetro de figuras planas

Explora

Lucas debe delimitar la cancha de fútbol de la Figura 1 usando una cinta blanca.



• ¿Qué longitud de cinta debe comprar?

Ten en cuenta

Para calcular el perímetro de cualquier polígono debes convertir todas las medidas de sus lados a la misma unidad de longitud.

App

Medición de alturas y distancias

Abre la aplicación *Telémetro: Smart Measure* y mide la altura y la distancia de diversos objetos.



Para determinar la cantidad de metros de cinta que Lucas debe comprar, es necesario sumar la longitud de todos los lados de la cancha, así:

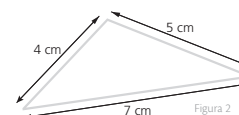
$$110 \text{ m} + 75 \text{ m} + 110 \text{ m} + 75 \text{ m} = 370 \text{ m}$$

Entonces, Lucas debe comprar 370 m de cinta.

El **perímetro de una figura plana** es la suma de las medidas de todos sus lados.

Ejemplo 1

Observa cómo se halla el perímetro del polígono de la Figura 2.



$$P = 4 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

Ejemplo 2

Una costurera diseña manteles triangulares de 25 cm de lado. Para saber cuántos metros de encaje necesita para bordear cada mantel, ella debe hallar su perímetro. Lo calcula así:

$$P = 25 \text{ cm} + 25 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 75 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la costurera necesita 75 cm de encaje en cada uno de los manteles.



Ejemplo 3

Para la celebración del día de la independencia, en el interior de cada uno de los salones de un colegio se va a poner una bandera por todo el contorno. Si cada salón de clase tiene forma cuadrada y uno de sus lados mide 6 m, en total se necesitarán $6 \text{ m} + 6 \text{ m} + 6 \text{ m} + 6 \text{ m} = 24 \text{ m}$ de bandera por salón.

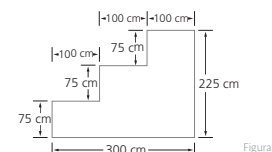
Actividad resuelta

Ejercitación

1 Determina el perímetro del polígono de la Figura 3.

Solución

Para hallar el perímetro de la figura, se suman todas las longitudes dadas.



$$P = 75 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 75 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 75 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 225 \text{ cm} + 300 \text{ cm}$$

$$P = 1050 \text{ cm}$$

Bloque de Geometría y Medida

Destrezas con criterios de desempeño: Calcular el perímetro de triángulos en la resolución de problemas.
Resolver problemas que impliquen el cálculo del perímetro de polígonos irregulares.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Determina el perímetro de cada polígono

a.

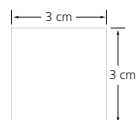


Figura 4

P = _____

P = _____ cm

b.

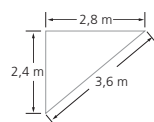


Figura 5

P = _____

P = _____ cm

c.

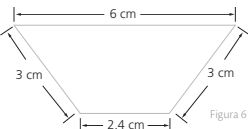


Figura 6

P = _____

P = _____ cm

d.

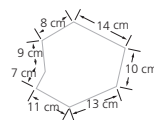


Figura 7

P = _____

P = _____ cm

3. Expresa el perímetro de la Figura 8 en metros.

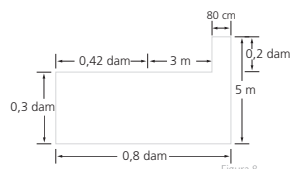


Figura 8

Razonamiento

4. Escribe el dato que falta en las figuras 9 y 10 para que tengan 92 m y 115 m de perímetro, respectivamente.

a.

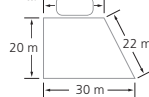


Figura 9

b.

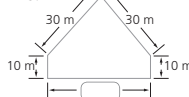


Figura 10

5. Responde.

- a. ¿Es mayor el perímetro de un heptágono regular de lado 8 cm o el de un octágono de 7 cm de lado?
- b. ¿Cuál es el perímetro, en metros, de un pentágono regular de 358 cm de lado?

Resolución de problemas

6. Alba le da cincuenta vueltas diarias al jardín que se muestra en la Figura 11.

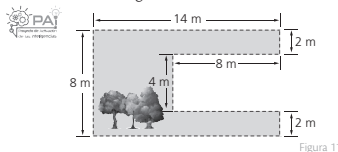


Figura 11

- a. ¿Cuántos kilómetros recorre en dos días?
- b. ¿Cuántos metros recorre de lunes a viernes?
- c. Si mantiene su ritmo diario, ¿en cuántos días completará 9 kilómetros?
- d. Si ella entrena durante cada uno de los días de junio, ¿cuántas vueltas completas y cuántos kilómetros recorre ese mes?

7. Un terreno tiene la forma de un triángulo equilátero de 30 m por lado. ¿Cuántas vueltas hay que dar al terreno para recorrer 270 m?

8. El Monasterio de El Escorial tiene una estructura rectangular de 2070 dm de largo y de 16 100 cm de ancho. Si se deben ubicar banderas alrededor de él, una por cada metro de distancia incluyendo los vértices, ¿cuántas banderas se necesitarán?



Ejercitación

- 2. a. 12 cm b. 1310 cm
- c. 14,4 cm d. 72 cm
- 3. 26 m

Razonamiento

- 4. a. 20 m b. 35 m
- 5. a. Los perímetros son iguales.
- b. 17,9 m

Resolución de problemas

- 6. a. 6 km b. 15 000 m
- c. 3 días d. 1 500 vueltas y 90 km.
- 7. 13 vueltas
- 8. 736 banderas

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Plantee a los estudiantes que comparen dos pedazos de papel de manera que uno esté contenido en el otro para establecer que uno ocupa mayor cantidad de espacio en el plano que el otro.
- Proponga la unión de las piezas de rompecabezas para que observen que se va cubriendo la superficie del rectángulo que muestra el paisaje o ilustración. Con esto se puede llegar a considerar la superficie como una magnitud y buscar posibles unidades de medida para la misma.
- Utilice el papel cuadriculado para establecer la cuadrícula como unidad de medida de la superficie y experimentar con esta para hacer las primeras mediciones, hasta reconocer el metro cuadrado como unidad de medida de superficie, los submúltiplos y múltiplos, y realizar conversiones en la resolución de problemas.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Presente un número suficiente de representantes del concepto y estimule a que los estudiantes propongan otros, trazando líneas cerradas, poligonales o no y coloreando su interior, para realizar la comparación de estas por superposición de figuras o por medio del papel cuadriculado y el conteo de cuadrículas unidad.
- Incluya figuras en las que la relación cuantitativa en la comparación sea una fracción. Esto permitirá a su vez ampliar en los escolares el significado que en la práctica alcanza el concepto de fracción como medida.

8

Unidades de superficie

Explora

Catalina tiene un cuadro de su perro y desea colgarlo en la pared de la sala, pero no sabe si cabe en el espacio que tiene destinado para ello.



- Si cada lado del cuadro mide un metro, ¿cuánto espacio necesitará Catalina para colgar su cuadro?

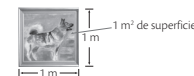
Ten en cuenta

Las civilizaciones antiguas tenían unidades de superficie diferentes a las utilizadas en la actualidad. Por ejemplo, en Egipto se utilizaban las siguientes:

1 cubit = 27,35 m²
1 khet cuadrado = 100 cubit

8.1 Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

El cuadro de Catalina tiene forma de cuadrado y como cada uno de sus lados mide 1 m de longitud; entonces se dice que cubre una superficie de 1 metro cuadrado.



La unidad de medida de la superficie es el **metro cuadrado** (m²), a partir de la cual se definen unidades de medida mayores, llamadas **múltiplos del metro cuadrado** y otras menores, denominadas **submúltiplos del metro cuadrado**.

En la Tabla 1 se muestran las equivalencias respecto al metro cuadrado.

Unidades de superficie						
Múltiplos	Unidad básica		Submúltiplos			
kilómetro cuadrado (km ²)	hectómetro cuadrado (hm ²)	decámetro cuadrado (dam ²)	metro cuadrado (m ²)	decímetro cuadrado (dm ²)	centímetro cuadrado (cm ²)	milímetro cuadrado (mm ²)
1 000 000 m ²	10 000 m ²	100 m ²	1 m ²	$\frac{1}{100}$ m ²	$\frac{1}{10\,000}$ m ²	$\frac{1}{1\,000\,000}$ m ²

Tabla 1

Cada unidad de superficie equivale a cien veces la unidad del orden inmediatamente inferior.

8.2 Conversión de unidades de superficie

- Para pasar de una unidad de orden inferior a la siguiente de orden superior, se divide entre 100.
- Para pasar de una unidad de orden superior a la siguiente de orden inferior, se multiplica por 100.

Ejemplo 1

Para expresar 6,7 dam² en m² se cuenta la cantidad de lugares que hay entre la unidad dada y la unidad en la que se quiere expresar la medida; como hay un lugar, se multiplica por 100, así: 6,7 dam² = (6,7 · 100) m² = 670 m²

Ejemplo 2

Para expresar 112 cm² en m² se divide entre 10 000 porque hay dos lugares entre cm² y m². De esa forma: 112 cm² = (112 ÷ 10 000) m² = 0,0112 m².

Ejemplo 3

El propietario de una finca cafetera de 1 350 000 m² dedica al cultivo del café cuatro quintas partes de la superficie y el 30% del resto a una bodega rectangular en la que almacena los sacos de café. Para saber cuántos hm² se destinan al cultivo del café y cuántos a su almacenamiento se convierten los 1 350 000 m² a hm². Así: 1 350 000 ÷ 10 000 = 135 hm².



El cultivo cubre una superficie de $\left(\frac{4}{5} \cdot 135\right)$ hm² = 108 hm². Como quedan disponibles 135 hm² - 108 hm² = 27 hm², se calcula el 30% de esta superficie así: $\left(\frac{30}{100} \cdot 27\right)$ hm² = 8,1 hm², que corresponden al área de la bodega.

Bloque de Geometría y Medida

Destrezas con criterios de desempeño: Realizar conversiones simples de medidas de longitud del metro, múltiplos y submúltiplos en la resolución de problemas. Reconocer el metro cuadrado como unidad de medida de superficie, los submúltiplos y múltiplos, y realizar conversiones en la resolución de problemas.

Actividad resuelta

Ejercitación

- 1 Relaciona cada unidad de medida, con la conversión solicitada.
- a. 24 m^2 a cm^2
 - b. 24 mm^2 a cm^2
 - c. 24 dam^2 a cm^2
- () $24\,000\,000 \text{ cm}^2$ () $0,24 \text{ cm}^2$ () $240\,000 \text{ cm}^2$
- Solución:**
- (c) $24\,000\,000 \text{ cm}^2$ (b) $0,24 \text{ cm}^2$ (a) $240\,000 \text{ cm}^2$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Elige la medida equivalente a la que se da en cada caso.
- | | |
|-----------------------|--|
| a. 92 dm^2 | $9\,200 \text{ m}^2$
$9\,200 \text{ cm}^2$
920 cm^2 |
| b. 101 hm^2 | $10\,100 \text{ dm}^2$
$101\,000 \text{ cm}^2$
$1\,010\,000 \text{ m}^2$ |
- 3 Multiplica adecuadamente para expresar cada medida en las unidades de orden inferior que se indican.
- a. 358 cm^2 en mm^2
 - b. $9\,131 \text{ dm}^2$ en mm^2 y cm^2
 - c. $3\,251 \text{ hm}^2$ en dm^2 y en cm^2
 - d. $25\,328 \text{ m}^2$ en cm^2 y en dm^2
- 4 Divide apropiadamente para expresar cada medida en las unidades de orden superior que se indican.
- a. 429 dam^2 en hm^2 y en km^2
 - b. 937 mm^2 en dm^2 y en hm^2
 - c. 741 cm^2 en dm^2 y en dam^2
 - d. $15\,345 \text{ dm}^2$ en m^2 y en hm^2

Comunicación

- 5 Expresa cada medida de área en la unidad indicada.
- a. $35 \text{ dam}^2 =$ cm^2
 - b. $28 \text{ dm}^2 =$ mm^2
 - c. $345 \text{ m}^2 =$ dam^2
 - d. $5\,245 \text{ dm}^2 =$ hm^2
 - e. $65 \text{ km}^2 =$ m^2
 - f. $0,53 \text{ hm}^2 =$ dam^2

Resolución de problemas

- 6 Un campo de $15\,000 \text{ m}^2$ se divide en cuatro partes iguales. ¿Cuántos dam^2 mide cada parte?
- 7 El suelo de una habitación mide 24 m^2 y está cubierto completamente por 60 baldosas cuadradas. ¿Cuántos cm^2 mide cada baldosa?
- 8 Angélica compró una finca que tiene un área de 45 hectáreas. Si una hectárea equivale a 1 hm^2 , ¿cuántos metros cuadrados de área tiene la finca?
- 9 El área de una bodega de almacenamiento de electrodomésticos es de 4 dam^2 de superficie. ¿Cuántas baldosas de 1 m^2 y de 1 dm^2 , respectivamente, se necesitan para adoquinarla?
- 10 ¿Cuántas personas caben de pie en un patio de 60 m^2 si cada persona ocupa una superficie de 20 dm^2 ?
- 11 La superficie de la Tierra es de $5\,100\,720 \text{ km}^2$, de la cual $\frac{3}{4}$ partes están cubiertas por los océanos, ríos y lagunas. ¿Cuántos km^2 corresponden a la superficie de tierra firme si $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hm}^2$?
- 12 En un despacho rectangular de 4 m de largo por 3 m de ancho se pone en el centro una alfombra, de forma que a su alrededor queda una franja de suelo de 50 cm de ancho. ¿Cuál es la superficie de la alfombra?
- 13 Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita 4 m^2 para desarrollarse.



Ejercitación

2. a. $9\,200 \text{ cm}^2$ b. $1\,010\,000 \text{ m}^2$
3. a. $35\,800 \text{ mm}^2$
b. $91\,310\,000 \text{ mm}^2 = 913\,100 \text{ cm}^2$
c. $3\,251\,000\,000 \text{ dm}^2 = 325\,100\,000\,000 \text{ cm}^2$
d. $253\,280\,000 \text{ cm}^2 = 2\,532\,800 \text{ dm}^2$
4. a. $4,29 \text{ hm}^2 = 0,0429 \text{ km}^2$
b. $0,0937 \text{ dm}^2 = 0,0000000937 \text{ hm}^2$
c. $7,41 \text{ dm}^2 = 0,000741 \text{ cm}^2$
d. $153,45 \text{ m}^2 = 0,015345 \text{ hm}^2$

Comunicación

5. a. $35\,000\,000 \text{ cm}^2$ b. $280\,000 \text{ mm}^2$
c. $3,45 \text{ dam}^2$ d. $0,005245 \text{ hm}^2$
e. $65\,000\,000 \text{ m}^2$ f. 53 dam^2

Resolución de problemas

6. $37,5 \text{ dam}^2$
7. $0,4 \text{ m}^2 = 4\,000 \text{ cm}^2$
8. $450\,000 \text{ m}^2$
9. 400 baldosas de 1 m^2 y 40 000 baldosas de 1 dm^2 .
10. 1 800 personas
11. $127\,518\,000 \text{ km}^2$
12. 6 m^2
13. 240 árboles.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Realice mapas conceptuales de fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas en función de sus relaciones de subordinación. Ejemplo, cuadrado, rectángulo, paralelogramo.
- Aplice las propiedades de las figuras planas en la resolución de ejercicios y problemas de cálculo de áreas.
- Plantee actividades en las que los estudiantes elaboren conjeturas y obtengan fórmulas para la determinación del valor de áreas. Ejemplo, elaborar una suposición para la fórmula del área del triángulo, del paralelogramo o de un polígono regular, reconociendo que el área de una figura no varía, si se la subdivide y dispone de diferente forma.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Introduzca actividades relacionadas con el área de figuras que se obtienen al dividir un rectángulo en partes o por composición de varios rectángulos.
- Utilice el Geogebra para que los estudiantes establezcan conjeturas sobre el efecto que tiene la variación de una o varias de las dimensiones de una figura plana en su área.
- Plantee ejercicios en los que sea necesario el trabajo con múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado
- Propóngales a los estudiantes experiencias de estimación y medición del área de superficies porque con frecuencia estos asocian el concepto de área solo con una fórmula o un número con el cual se calcula, sin tener idea de lo que significa.

9

Área de figuras planas

Explora

Laura debe dibujar como tarea tres rectángulos diferentes, cada uno con 18 cm de perímetro.



• ¿Cuál de los rectángulos que dibujó tiene la mayor área?

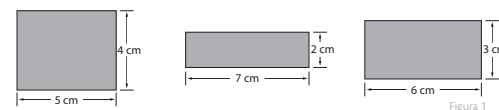


Figura 1

$$A = 5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2; A = 7 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 14 \text{ cm}^2; A = 6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, el rectángulo de base 5 cm y altura 4 cm es el de mayor área.

El **área de una región o figura** es la medida de su superficie. Se denota A .

En la Tabla 1 se muestra cómo determinar el área de algunas figuras mediante el uso de fórmulas.

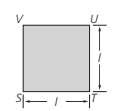
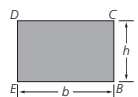
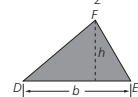
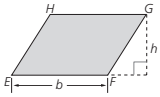
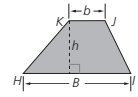
Área de algunas figuras planas	
Cuadrado $A = l \cdot l$ 	Rombo $A = \frac{d \cdot D}{2}$ 
Rectángulo $A = b \cdot h$ 	Triángulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$ 
Paralelogramo $A = b \cdot h$ 	Trapezio $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ 

Tabla 1

Ejemplo 1

La Figura 2 muestra un rombo y la longitud de sus dos diagonales. La medida de su superficie se calcula así:

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

$$A = \frac{2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}}{2} \Rightarrow A = 3 \text{ cm}^2$$

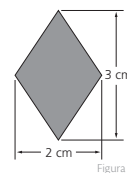


Figura 2

Bloque de Geometría y Medida

Destrezas con criterios de desempeño: Calcular el área de triángulos en la resolución de problemas.
Calcular el área de figuras planas en la resolución de problemas.

Actividad resuelta

Ejercitación

- 1 Halla el área de la cancha de fútbol de la Figura 3.

Solución:

El área se determina multiplicando las medidas del largo y el ancho.

$$A = 110 \text{ m} \cdot 75 \text{ m} = 8250 \text{ m}^2$$

Entonces, la cancha de fútbol tiene un área de 8250 m².

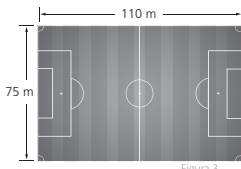
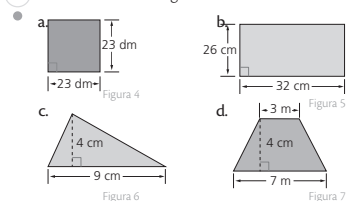


Figura 3

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Halla el área de cada figura.



- 6 Halla el área de cada uno de los polígonos que forman el terreno de la Figura 10 y responde las preguntas.

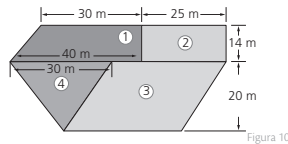


Figura 10

- ¿Cuál es el área total del terreno en hm²?
- ¿Cuál de las cuatro partes tiene la mayor área?
- ¿En cuántos m² es mayor el área de la parte mayor que el área de la parte menor?
- Si la mitad del terreno se dedica al cultivo de hortalizas y en la cuarta parte se construye un galpón, ¿cuántos dm² se dedican a cada actividad?
- Si la parte de menor área entre las que se dividió el terreno se vende a razón de \$ 100 el m², ¿cuánto se recibe por su venta?

Comunicación

- 3 Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
- Una piscina de 6 m de largo por 5 m de ancho tiene un área de 300 000 cm².
 - El área de una azotea es de 600 dm² y es equivalente a la cuarta parte del terreno de una casa de 240 m².
 - El área de un cuadro de 10 m de largo por 0,05 cm de ancho es 500 m².
 - El área de un triángulo es igual al producto de su base por su altura.

Razonamiento

- 4 Sandra usó fichas cuadradas para construir un rectángulo. El perímetro del rectángulo que construyó era de 14 unidades. ¿Cuántas fichas cuadradas puede haber usado Sandra para todo el rectángulo?
- 5 Sebastián desea cultivar papa, para lo cual dispone de dos terrenos cuyas dimensiones se muestran en las figuras 8 y 9. Su esposa le dice que en cualquiera de los dos terrenos cultivaría la misma cantidad, porque los dos tienen igual perímetro. ¿Crees que ella tiene razón? Explica.

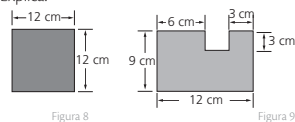


Figura 8

Figura 9

Resolución de problemas

- 7 Rosario quiere cercar su jardín cuadrado para evitar que entren los conejos. El área del jardín es de 9 m². ¿Cuántos metros de malla debe comprar para hacer el cerramiento?
- 8 Dibuja en la cuadrícula dos figuras más, que tengan la misma área de la que se muestra en la Figura 11.

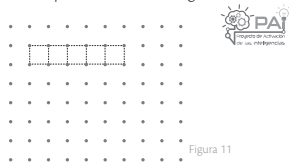


Figura 11

Halla el perímetro de las tres figuras. ¿Qué puedes concluir?

Ejercitación

- 529 dm²
 - 832 cm²
 - 18 cm²
 - 2 000 cm²

Comunicación

3. a. V b. F c. F d. F

Razonamiento

- Múltiples respuestas
- No tiene razón, porque la cantidad de siembra depende del área y no del perímetro del terreno.
- $A_1 = 490 \text{ m}^2$,
 $A_2 = 350 \text{ m}^2$,
 $A_3 = 700 \text{ m}^2$ y
 $A_4 = 300 \text{ m}^2$
 a. $A = 0,184 \text{ hm}^2$
 b. El paralelogramo
 c. 400 m²
 d. Hortalizas: 46 000 dm² y galpón: 92 000 dm²
 e. \$ 30 000

Resolución de problemas

- 12 m
- Múltiples respuestas; por ejemplo, Se puede concluir que aunque el área de dos figuras sea la misma el perímetro varía.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Plantee actividades para que los estudiantes entiendan y deduzcan el enunciado del teorema. Este no debe ser aprendido de memoria sin entender su significado. Ejemplo: pedir a cada estudiante que dibuje en el centro de una hoja cuadrículada un triángulo rectángulo, usando las líneas de la cuadrícula para representar los catetos (uno horizontal y el otro vertical). La medida de cada cateto la definirá cada estudiante, de este modo se obtendrá una variedad de triángulos rectángulos.
- Considere la aplicación del teorema a la medición de distancias a las que no se tiene acceso directamente, las dimensiones del diamante de béisbol, alturas de montañas u otros objetos, problemas aplicados a la exploración del horizonte, entre otros casos.
- Dirija su atención a la formación de valores. Ejemplo: la solidaridad entre los miembros de la hermandad de los pitagóricos; la laboriosidad en un sinnúmero de demostraciones; la responsabilidad de Pitágoras con cargos políticos.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Propóngales a los estudiantes actividades en las que tengan que trabajar con números pitagóricos, utilizar el recíproco del teorema de Pitágoras, así como interpretar las generalizaciones del Teorema de Pitágoras a un nivel de familiarización.

10

Teorema de Pitágoras

Explora

Andrés tiene un telescopio con el que observa aves en el bosque, pero solo le permite visualizarlas claramente hasta 50 m.



- Si Andrés se encuentra a 25 m de un árbol y el ave que quiere ver se encuentra en su nido a una altura de 35 m, ¿puede verla con detalle con su telescopio?

$$d^2 = P^2 + P^2$$

$$d^2 = (25 \text{ m})^2 + (35 \text{ m})^2$$

$$d^2 = 625 \text{ m}^2 + 1225 \text{ m}^2$$

$$d^2 = 1850 \text{ m}^2$$

$$d = \sqrt{1850 \text{ m}^2} = 43,01 \text{ m}$$

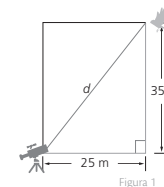


Figura 1

Como $43,01 \text{ m} < 50 \text{ m}$, el telescopio le permite ver a Andrés el ave con detalle.

Cuando se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, se puede calcular la medida del lado que falta empleando el **teorema de Pitágoras**.

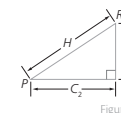


Figura 2

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos (Figura 2). Esto es: $H^2 = C_1^2 + C_2^2$

Ejemplo 1

Calcula el valor de la hipotenusa en el triángulo de la Figura 3.

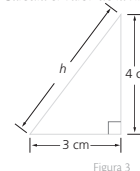


Figura 3

Se aplica el teorema de Pitágoras así:

$$h^2 = (3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2$$

$$h^2 = 9 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2$$

$$h^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$h = \sqrt{25 \text{ m}^2}$$

$$h = 5 \text{ cm}$$

Ejemplo 2

Una escalera de 73 dm de longitud está apoyada sobre la pared, como muestra la Figura 4. El pie de la escalera dista 55 dm de la pared. Para saber a qué altura sobre el piso se apoya la parte superior de la escalera en la pared, se usa el teorema de Pitágoras.

$(73 \text{ dm})^2 = a^2 + (55 \text{ dm})^2$, esta ecuación se puede expresar como:

$$a^2 = (73 \text{ dm})^2 - (55 \text{ dm})^2$$

$$a^2 = 5329 \text{ dm}^2 - 3025 \text{ dm}^2$$

$$a = \sqrt{2304 \text{ dm}^2} \Rightarrow a = 48 \text{ dm}$$

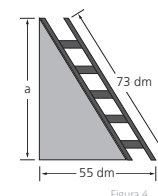


Figura 4

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar el Teorema de Pitágoras a la resolución de triángulos rectángulos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- 1 A cierta hora del día, un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra de 16 m, como se ve en la Figura 6. ¿Cuál será la distancia desde la sombra de la copa en el suelo hasta la copa del árbol?

Solución:

Si se supone que el árbol es totalmente vertical, entonces forma con el suelo un ángulo de 90° . Luego, la distancia entre la copa del árbol y su sombra en el suelo sería la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma.

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

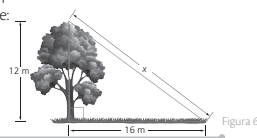
$$x^2 = (16 \text{ m})^2 + (12 \text{ m})^2$$

$$x^2 = 256 \text{ m}^2 + 144 \text{ m}^2$$

$$x^2 = 400 \text{ m}^2$$

$$x = \sqrt{400 \text{ m}^2} \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

Entonces, la distancia buscada es 20 m.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen las siguientes medidas.
- 5 dm y 4 dm
 - 8 cm y 6 cm

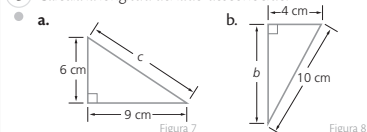
Razonamiento

- 3 Calcula la diagonal de un cuadrado cuyo lado tiene cada una de las siguientes medidas en centímetros.

- 4
- 7
- 13

- 4 Halla la medida del lado de un cuadrado cuya diagonal es de 14 cm.

- 5 Calcula la longitud del lado desconocido.

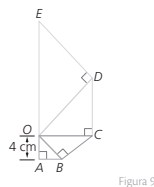


- 6 Calcula el radio de una circunferencia en la que está inscrito un cuadrado cuyo lado mide lo siguiente en decímetros.

- 3
- 9
- 4

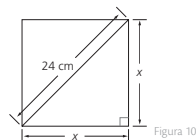
- 7 Los triángulos $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ y $\triangle ODE$ son todos isósceles y rectángulos.

Calcula la longitud de la hipotenusa $\overline{OE}$.



Resolución de problemas

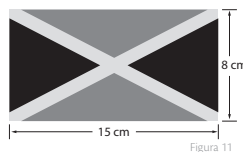
- 8 Halla la medida x en la Figura 10.



- 9 Una persona está situada a 15 m de la base de un edificio. La distancia que hay de la persona al piso más alto es 25 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

- 10 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y un cateto mide 12 cm. Halla el valor del otro cateto.

- 11 Para una actividad escolar, a Fernanda le encargaron confeccionar doce banderas de Jamaica con las dimensiones que se muestran en la Figura 11.



- ¿Cuál es el área de la bandera?
- ¿Aproximadamente, cuántos centímetros de cinta amarilla requiere comprar Fernanda para confeccionar las banderas?

Ejercitación

2. a. $\sqrt{41}$ dm b. 10 cm

Razonamiento

3. a. $4\sqrt{2}$ cm b. $7\sqrt{2}$ cm c. $13\sqrt{2}$ cm

4. $\sqrt{7}$ cm

5. a. $c = 3\sqrt{13}$ cm b. $b = 2\sqrt{21}$ cm

6. a. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

- b. $r = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm

- c. $r = 2\sqrt{2}$ dm

7. $\overline{OE} = 16$ cm

Resolución de problemas

8. $12\sqrt{2}$ cm

9. 20 m

10. $6\sqrt{21}$ cm

11. a. 120 cm²

- b. Aproximadamente 408 cm

Ampliación conceptual

Un polígono regular es un polígono cuyos lados y ángulos interiores son congruentes entre sí.

En él podemos distinguir:

- Centro: el punto equidistante de todos los vértices y lados.
- Lado, L : es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
- Apotema, a : perpendicular que une el centro del polígono con el centro de un lado.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Utilice el Geogebra para construir un hexágono regular. Para ello háganlo con la herramienta polígono regular y divídanlo en triángulos con 3 de sus 9 diagonales, uniendo cada vértice con su opuesto, de manera que el hexágono regular queda dividido en seis triángulos equiláteros. Haga notar que el hexágono quedó dividido en 6 triángulos y sugiera calcular el área del hexágono hallando el área de cada uno de los triángulos que lo forman $A_t = \frac{L \times 5}{2}$.
- Construya un pentágono, un heptágono y un octágono regulares con la herramienta del software. Encuentre el centro de cada polígono con la intersección de dos de las mediatrices de sus lados y divida la figura en triángulos con un vértice en dicho centro y los otros en vértices consecutivos del polígono dado. Haga notar que el polígono regular quedó dividido en tantos triángulos isósceles iguales como la cantidad de lados del mismo, y sugiera calcular el área del polígono de n lados multiplicando por n el área de uno de los triángulos $A_t = \frac{L \times 5}{2} \times n$.

11

Área de polígonos regulares

Explora

Nicolás necesita calcular el área del vitral de la Figura 1 para saber si el espacio de 400 cm^2 en el que quiere ubicarlo es suficiente.

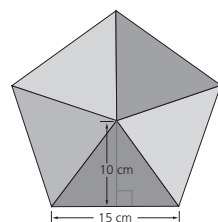


Figura 1

- ¿Podrá Nicolás acomodar el vitral en el espacio que quiere, si este tiene forma de pentágono regular?

El vitral está formado por cinco triángulos congruentes; entonces, para hallar el área del vitral se determina el área de uno de los triángulos y se multiplica por 5.

$$\text{Área de un triángulo: } \frac{b \cdot h}{2} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{2} = \frac{150 \text{ cm}^2}{2} = 75 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del vitral: } 75 \text{ cm}^2 \cdot 5 = 375 \text{ cm}^2$$

Como el área del vitral es menor que 400 cm^2 , que es la superficie disponible para ubicarlo, Nicolás puede disponerlo allí.

Para calcular el área de un polígono regular de n lados, se descompone en n triángulos isósceles congruentes y luego se adicionan sus áreas.

Los elementos de esos triángulos isósceles coinciden con algunos de los del hexágono (Figura 2).

- La base con el lado del polígono.
- Los lados congruentes con el radio.
- La altura con la apotema.

Si se recortan los triángulos que componen el hexágono y se colocan uno a continuación del otro, se forma un paralelogramo. Observa la Figura 3.

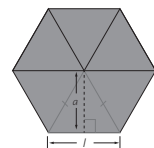


Figura 2

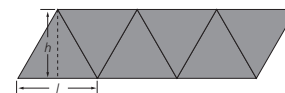


Figura 3

El área del paralelogramo coincide con el área del hexágono.

Como la base del paralelogramo es $3l$, este valor coincide con la mitad del perímetro del polígono, es decir, $\frac{P}{2}$; y la altura h coincide con la apotema a . Entonces:

El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro y de la apotema, expresados en la misma unidad de medida.

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Calcule el área de la región sombreada en la Figura 4.

Solución:

Para hallar el área de la región sombreada, es preciso restar el área del pentágono regular $ABCDE$ del área del cuadrado $HGFI$.

$$\text{Área del cuadrado: } (5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del pentágono: } \frac{(5 \cdot 3 \text{ cm}) \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

$$A = 25 \text{ cm}^2 - 15 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la región sombreada es de 10 cm^2 .

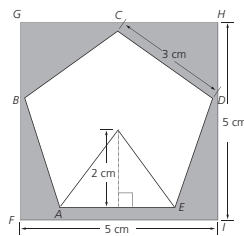


Figura 4

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Halla el área de los polígonos regulares de las figuras 5 a la 10.

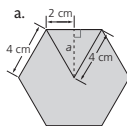


Figura 5

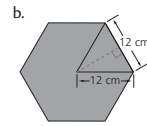


Figura 6

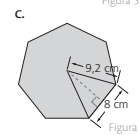


Figura 7

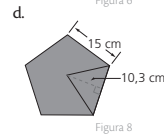


Figura 8

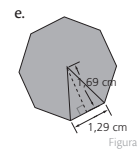


Figura 9

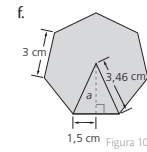


Figura 10

- 3 Calcula el área de la región sombreada en la Figura 11.

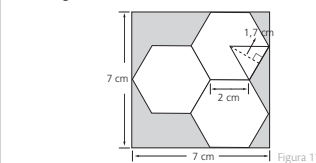


Figura 11

Resolución de problemas

- 4 Elvira quiere comprar un terreno en una urbanización.
- Tiene la posibilidad de elegir una de las cuatro que aparecen en la Figura 12. Si todas las figuras son regulares, ¿cuál escogerá si quiere la de mayor superficie?

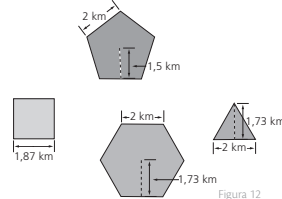


Figura 12

- 5 Una baldosa en forma hexagonal mide 12 cm de lado (Figura 13).

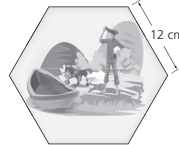


Figura 13

- a. ¿Qué tipo de triángulos se obtienen al descomponer la baldosa?
b. ¿Cómo se calcula la altura de alguno de los triángulos?
c. ¿Cuál es el área de la baldosa?

- 6 Calcula la superficie que ocupa cada color en el vitral de la Figura 14. Luego, responde.

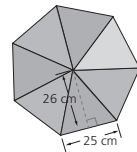


Figura 14

- a. ¿Qué porcentaje del vitral está coloreado de azul?
b. ¿Qué fracción del vitral es verde?
c. ¿Cuál mide el área de la región anaranjada?

- 7 Se quiere colocar grama sintética en la zona verde para los niños de preescolar de una Unidad Educativa del Milenio. Si la zona verde tiene forma de hexágono regular de lado 16 m, ¿cuál es el área que se requiere cubrir con la grama sintética?

- 8 Determina el área real de una casa, si en el plano de la Figura 15, cada centímetro corresponde a 1,5 m.

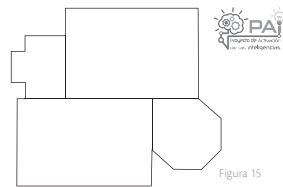


Figura 15

Ejercitación

2. a. $A = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b. $A = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$
c. $A = 28\sqrt{68,64} \text{ cm}^2$ d. $A = 386,25 \text{ cm}^2$
e. $A = 8,7204 \text{ cm}^2$ f. $A = 32,73845 \text{ cm}^2$

3. $A = 18,4 \text{ cm}^2$

Resolución de problemas

4. Elvira escoge el hexágono cuya área es $10,38 \text{ km}^2$.

5. a. Triángulos equiláteros

- b. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$c. A = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

6. a. 42,86%

$$b. \frac{1}{7}$$

$$c. 975 \text{ cm}^2$$

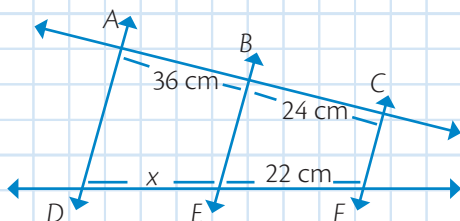
7. $665,1075 \text{ m}^2$

8. $21,04 \text{ m}^2$

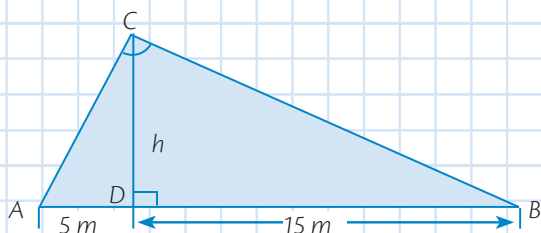
Evaluación formativa

- Determina si un rectángulo que mide 16 cm de largo por 12 cm de ancho es semejante a uno de 48 cm de largo por 30 cm de ancho.

- Calcula la longitud del segmento $\overline{DE}$, si $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$.



- En la figura los triángulos ACD y ABC son semejantes. ¿Cuánto mide $\overline{AC}$?

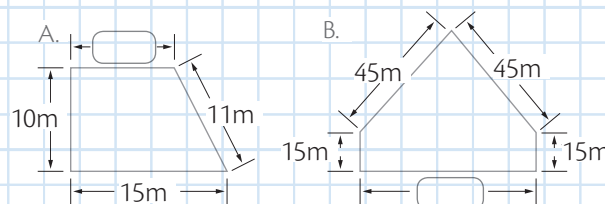


- ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo que se obtiene de aplicar una homotecia con centro en el punto $(0, 0)$ y factor de proporcionalidad 1,5 al triángulo de vértices $A(2; 6)$, $B(2; 3)$ y $C(4; 1)$.

Nombre:.....

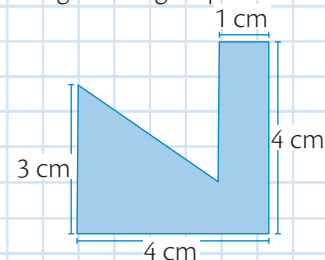
Grado:..... Fecha:.....

- Escribe el dato que falta en las figuras para que tengan 46 m y 165 m de perímetro, respectivamente.

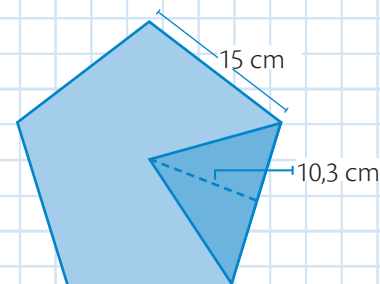


- El suelo de una habitación mide 24 m^2 y está cubierto completamente por 96 baldosas cuadradas. ¿Cuántos cm^2 mide cada baldosa?

- Halla el área de las siguiente figura plana.

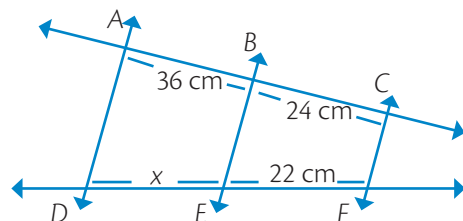


- Halla el área del siguiente polígono regular

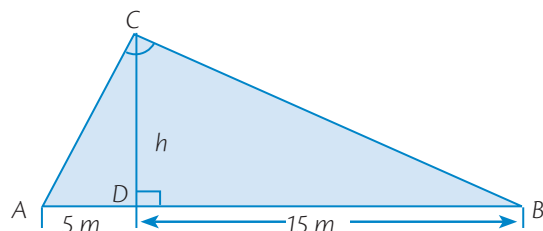


1. Determina si un rectángulo que mide 16 cm de largo por 12 cm de ancho es semejante a uno de 48 cm de largo por 30 cm de ancho.
No

2. Calcula la longitud del segmento $\overline{DE}$, si $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$. $x=33$

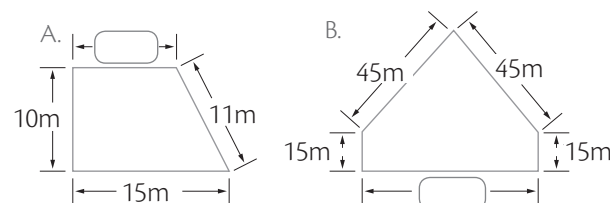


3. En la figura los triángulos ACD y ABC son semejantes. ¿Cuánto mide $\overline{AC}$? $\overline{AC} = 10m$

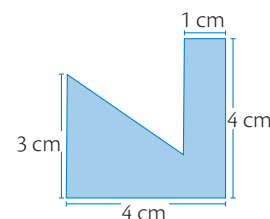


4. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo que se obtiene de aplicar una homotecia con centro en el punto (0, 0) y factor de proporcionalidad 1,5 al triángulo de vértices A(2; 6), B(2; 3) y C(4; 1). $A' (3;9)$, $B' (3;4,5)$, $C' (6;1,5)$.

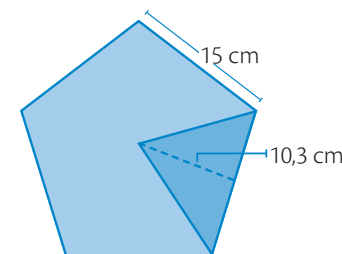
5. Escribe el dato que falta en las figuras para que tengan 46 m y 165 m de perímetro, respectivamente. 10m; b. 45m



6. El suelo de una habitación mide $24 m^2$ y está cubierto completamente por 96 baldosas cuadradas. ¿Cuántos cm^2 mide cada baldosa? $2500cm^2$
7. Halla el área de la siguiente figura plana. $10 cm^2$



8. Halla el área del siguiente polígono regular $386,25 cm^2$



Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados.	1, 2 y 3			
Aplicar la semejanza en la construcción de figuras semejantes.	4			
Calcular área o perímetro de figuras planas en la resolución de problemas.	5, 6 y 7			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Parta de reconocer a la circunferencia y el círculo en objetos y representaciones de la realidad objetiva e intégreles al conjunto de figuras planas fundamentales, haciendo notar las similitudes y diferencias de sus elementos y propiedades, así como la posibilidad de representar figuras circulares.
- Introduzca algunas referencias históricas sobre las necesidades prácticas que llevaron a la sociedad a realizar mediciones de longitudes y áreas de figuras circulares, y cómo el trabajo con estas se han ido perfeccionando hasta nuestros días.
- Fortalezca la estimación durante el estudio de la circunferencia y el círculo, con la utilización de la aproximación geométrica. Ejemplo: presénteles a los estudiantes la estimación de la longitud de la circunferencia, utilizando el perímetro del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, y así otros polígonos regulares inscritos de manera que se ilustre que para un número lo suficientemente grande de lados la longitud de la circunferencia se aproxima al perímetro del polígono.

■ Actividades colaborativas

Forme equipos para investigar aplicaciones de figuras circulares. Esto promueve la comunicación y el respeto entre los estudiantes, los motiva a buscar tantas como sea posible y les brinda una idea de su utilidad.

12

Longitudes y áreas de figuras circulares

Explora

Para la tarea de matemáticas, Juana debe hallar el perímetro de un objeto con forma circular.

- Si Juana escogió el reloj de pared de su casa, ¿qué podría hacer para tomar esa medida?

Como el perímetro del reloj es equivalente a la medida de su contorno, Juana puede envolverlo con una cuerda, luego quitarla y medir la longitud de la cuerda desde su extremo hasta donde la estaba sujetando.



Una **circunferencia** está formada por los puntos que están a igual distancia de un punto llamado **centro**. El **círculo** o **región circular** es la unión de la circunferencia y su interior.

12.1 Longitud de la circunferencia

La **longitud de una circunferencia** se obtiene al multiplicar la longitud del diámetro (d) por el valor constante π (aproximadamente 3,14).

$$L = \pi \cdot d$$

Como la longitud del diámetro es el doble de la del radio (r), se tiene que:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Ejemplo 1

Para calcular la medida del radio de una circunferencia cuya longitud es de 9,2 cm, se despeja r en la fórmula de la longitud de la circunferencia, se reemplazan los datos conocidos y se realizan las operaciones necesarias.

Así, como $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, entonces:

$$r = \frac{L}{2 \cdot \pi} = \frac{9,2 \text{ cm}}{2 \cdot 3,14} = 1,46 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la medida del radio de la circunferencia aproximado hasta las centésimas es 1,46 cm.

Ejemplo 2

El diámetro de la rueda de un camión mide 90 cm. Para saber qué distancia ha recorrido el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas, se halla primero lo que logra avanzar en una sola vuelta y luego se multiplica el valor obtenido por 100.

La rueda avanza en una vuelta:

$$L = 3,14 \cdot 90 \text{ cm} = 282,6 \text{ cm}$$

Entonces, cuando la rueda ha dado 100 vueltas, el camión habrá recorrido:

$$282,6 \text{ cm} \cdot 100 = 28\,260 \text{ cm} = 282,6 \text{ m}$$

Ejemplo 3

El diámetro (d) ecuatorial de la Tierra es de 12 742 km. Para hallar la longitud de la circunferencia en el paralelo del ecuador, se debe tener en cuenta que $d = 2 \cdot r$; así que, $r = 6371 \text{ km}$.

$$L = 2 \cdot 3,14 \cdot 6371 \text{ km} = 40\,009,88 \text{ km}$$

Esta es la distancia que caminaríamos alrededor de la línea del ecuador.

Ten en cuenta

El número π (pi) se define como la razón entre la longitud de una circunferencia (L) y su diámetro (d) (Figura 1). El número π no es racional; sin embargo, puede aproximarse con números racionales. De aquí en adelante al operar con este número se tomará como referencia $\pi = 3,14$.

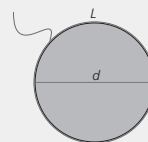


Figura 1

Destreza con criterios de desempeño: Calcular longitudes de figuras circulares en la resolución de problemas.

12.2 Longitud de un arco de circunferencia

La longitud a de un arco de circunferencia, cuyo ángulo central α mide n° , se calcula con la fórmula:

$$a = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot r \cdot n^\circ}{180^\circ}$$

Esta proporción puede usarse también para:

Hallar la medida del ángulo, dadas las medidas del arco y el radio.	Hallar la medida del radio, dados los valores del ángulo y del arco.
$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot a}{\pi \cdot r}$	$r = \frac{180^\circ \cdot a}{n^\circ \cdot \pi}$

Ejemplo 4

La longitud máxima del arco que genera una cámara de seguridad que tiene un giro límite de 180° y un campo visual de 100 m, se calcula así:

$$a = \frac{\pi \cdot 100 \text{ m} \cdot 180^\circ}{180^\circ} = 3,14 \cdot 100 \text{ m} = 314 \text{ m}$$



Ejemplo 5

En una circunferencia, si $a = 2,5 \text{ cm}$ y $r = 3,18 \text{ cm}$, se tiene que:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot 2,5 \text{ cm}}{\pi \cdot 3,18 \text{ cm}} = 45^\circ$$

Ejemplo 6

Un faro barre con su luz un ángulo de 112° . Si el alcance máximo del faro es de 6,5 km, la longitud máxima del arco correspondiente se calcula así:

$$a = \frac{\pi \cdot 6,5 \text{ km} \cdot 112^\circ}{180^\circ} = 12,7 \text{ km}$$



Ejemplo 7

El matemático Eratóstenes, nacido en Cirene en el año 284 a. C., fue el primero en medir con bastante precisión la circunferencia de nuestro planeta. Él midió la circunferencia terrestre con una gran exactitud, en una época en la que mucha gente pensaba que el mundo era plano como una mesa.

Eratóstenes usó para ello la distancia que había entre Alejandría y Siena (800 km), y el ángulo de $7,2^\circ$ que se forma en el centro de la Tierra al prolongar líneas imaginarias desde cada ciudad, tal como se observa en la Figura 3. Con estos datos, determinó el radio aproximado de la Tierra.

$$r = \frac{180^\circ \cdot a}{n^\circ \cdot \pi} = \frac{180^\circ \cdot 800 \text{ km}}{7,2^\circ \cdot \pi} = 6369 \text{ km}$$

Compara ese valor con 6371 km, que es el radio real de la Tierra.

Ten en cuenta

Un arco de circunferencia es la parte de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos. En la Figura 2, se observa el arco a de la circunferencia de radio r y ángulo central α .

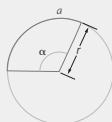


Figura 2

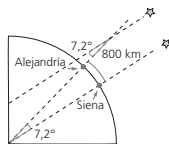


Figura 3

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Haga énfasis en el trabajo ortográfico con el vocabulario matemático, e insista en el uso correcto de las palabras más utilizadas en este apartado pues los estudiantes tienen tendencia de escribirlas con faltas de ortografía y de sustituirlas por otras palabras imprecisas como “este de aquí”, “esta parte”, “esta línea”. Puede hacer dictados, buscar en el diccionario el significado común y compararlo con el significado matemático, entre otras actividades. Ejemplos de estas palabras son: círculo, longitud, hexágono, área, pentágono, anillo, circunferencia, polígono, inscrito, ángulo, mediatriz, triángulo, equilátero, fórmula, medición, razón, equidistan, entre muchas otras.

■ Actividades colaborativas

Organiza a los estudiantes por equipos y crea dentro de ellos pequeños grupos de trabajo, de cuatro a cinco integrantes, que se encargarán de buscar información en relación con la evolución cultural e histórica del número Pi, centrando la atención sobre la necesidad de que tomen conciencia de la interacción que se da entre este y las situaciones que lo impulsaron y del impacto que tienen en nuestra cultura y en nuestras vidas. De tal manera estos pueden entender y hacer comprender el contexto histórico y cultural que enmarca el concepto.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Las principales figuras circulares son las siguientes:

Corona circular o anillo: Es la parte del círculo limitada por dos circunferencias que tienen el mismo centro (concéntricas).

Sector circular: Es la parte del círculo limitada por dos radios y uno de sus arcos correspondientes.

Segmento circular: Es la parte del círculo limitada por una cuerda y uno de sus arcos correspondientes.

Semicírculo: Es la mitad del círculo. Está limitado por un diámetro y una de sus semicircunferencias.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Introduzca el concepto de corona circular y la fórmula para su área, por ser el de menores dificultades para asimilar por los estudiantes pues se necesita entender una diferencia de radios que no ofrece mayores complicaciones. Luego presente el concepto de sector circular y área de este, para garantizar el trabajo con diagramas de pastel, partiendo de situaciones reales. Posteriormente trabaje con el concepto de segmento circular, el cual requiere de mayor integración de elementos (diferencia de áreas del sector y del triángulo).
- Relacione el valor de π con los números no racionales e interprete el carácter de relación funcional en fórmulas de longitudes y áreas. Por ejemplo, de r con relación a A en $A = \pi \times r^2$.
- Planteeles a los estudiantes actividades relacionadas con la dependencia funcional del área del círculo respecto al radio.

12

Longitudes y áreas de figuras circulares

12.3 Área de figuras circulares

El área del círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Ejemplo 8

Matías está atado a una correa de 4 m de largo, como se observa en la Figura 4. Para determinar el área del espacio por el que se puede desplazar Matías, se debe hallar el área del círculo de radio 4 m, así:

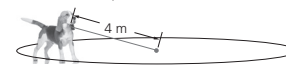


Figura 4

$$A = \pi \cdot (4 \text{ m})^2 = 50,24 \text{ m}^2$$

Las figuras circulares más utilizadas son: la corona, el sector y el segmento circular. El área de cada una de estas figuras se halla con las siguientes fórmulas:

- El área de una corona circular es igual a la diferencia de las áreas del círculo mayor y del círculo menor.

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

- El área de un sector circular cuyo ángulo central mide n° , se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$$

- Un segmento circular corresponde a la región limitada por una cuerda y el arco de circunferencia que se determina (Figura 7). Su área se calcula mediante la fórmula:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} - A_{\triangle ABC}$$

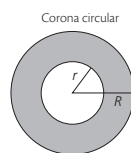


Figura 5

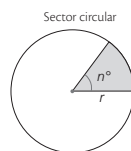


Figura 6

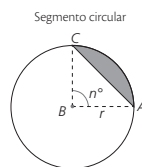


Figura 7

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Calcule el área del círculo central y de la región D de la cancha de fútbol de la Figura 8.

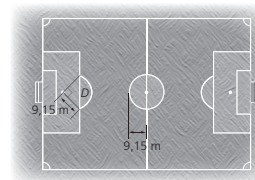


Figura 8

Solución:

El radio del círculo central es 9,15 m; por tanto, su área es:

$$A = \pi \cdot (9,15 \text{ m})^2 = 262,89 \text{ m}^2$$

Como la región D es un segmento circular de radio 9,15 cm, su área se halla así:

$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot (9,15 \text{ m})^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 65,72 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{9,15 \text{ m} \cdot 9,15 \text{ m}}{2} = 41,86 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 65,72 \text{ m}^2 - 41,86 \text{ m}^2 = 23,86 \text{ m}^2$$

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Calcular longitudes y áreas de figuras circulares en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Calcula la longitud de cada circunferencia y el área del círculo correspondiente de acuerdo con el radio o el diámetro establecido.

- a. $d = 56$ cm
- b. $r = 0,5$ km
- c. $r = 125$ m
- d. $d = 1\,428$ mm

3. Halla el radio de cada círculo, según su área.

- a. $A = 50,2656$ cm²
- b. $A = 28,2744$ m²
- c. $A = 452,16$ mm²

4. Calcula el área de una corona circular formada por dos circunferencias concéntricas de radios 1,60 cm y 1,20 cm, respectivamente.

5. Determina el área de la Figura 9.

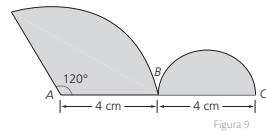


Figura 9

6. Halla el área de la región sombreada en cada caso. Explica tu estrategia.

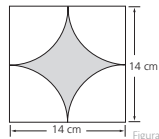


Figura 10

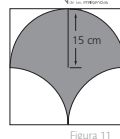


Figura 11

Resolución de problemas

7. De un trozo cuadrado de cartulina, Diana recortó un círculo de 20 cm de diámetro (Figura 12). ¿Qué cantidad de cartulina se desperdició?

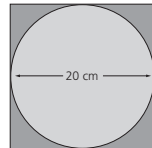


Figura 12

8. Un rectángulo se ubica dentro de un círculo de radio 9 cm, tal como se muestra en la Figura 13. Calcula el área de la región sombreada.

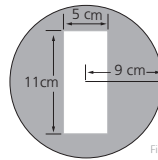


Figura 13

9. La plazoleta de un centro comercial es de forma circular y tiene 500 m de radio. Dentro de ella se instalará un escenario circular cuyo radio es de 25 m. Calcula el área de la plazoleta que no se cubrirá con el escenario.

10. Un artesano ubicó un espejo de forma circular dentro de un marco rectangular de madera (Figura 14). ¿Cuál es el área del marco que soporta el espejo?

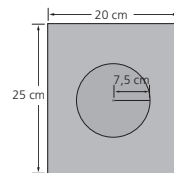


Figura 14

11. Una empresa diseña etiquetas para CD. Sabiendo que el radio del círculo mayor mide 6,2 cm y el del círculo menor, la abertura en el centro, mide 0,6 cm aproximadamente, ¿qué cantidad de papel se utiliza en cada CD?

12. Juan quiere hallar el área del círculo de la Figura 15. Para ello, separa el círculo en 13 regiones, que luego corta con el fin de formar la Figura 16. ¿Qué tipo de figura obtuvo Juan? ¿Cómo se calcula esta área?

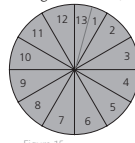


Figura 15

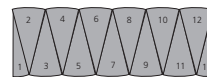


Figura 16

Ejercitación

- 2. a. $L = 56\pi$ cm y $A = 784\pi$ cm²
- b. $L = \pi$ cm y $A = 0,25\pi$ km²
- c. 250π m y $A = 15\,625\pi$ cm²
- d. $L = 1\,428\pi$ mm y $A = 509\,796\pi$ cm²
- 3. a. $r = 4$ cm
- b. $r = 3$ m
- c. $r = 12$ mm

4. $A = 3,5186$ cm²

5. $A = 23,03835$ cm²

6. a. $A = 42,062$ cm²

b. $A = 450$ cm²

Resolución de problemas

7. $85,8407$ cm²

8. $A = 199,469$ cm²

9. $A = 783\,434,668$ cm²

10. $A = 323,2854$ cm²

11. $119,63185$ cm²

12. Respuesta abierta

Ampliación conceptual

Un prisma es un poliedro (un cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen finito) que consta de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos. En el caso en que las caras laterales sean rectangulares, se llama prisma rectangular o recto. Cuando en un prisma recto los polígonos de las bases son polígonos regulares se llama prisma regular.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Propóngales a los estudiantes actividades en las que ellos mismos tengan que esbozar prismas y pirámides, a partir de sus propiedades y proporciones, para aplicarlos en la resolución de problemas y lograr una adecuada orientación espacial, incorporando dichos conceptos y propiedades geométricas.
- Presénteles actividades en los que tengan que realizar mediciones de largo, ancho y altura de objetos reales que se puedan utilizar como medios de enseñanza-aprendizaje en el tratamiento de prismas y pirámides. Solicite que planteen estrategias para hallar el área lateral y total de estos.
- Plantéeles actividades relacionadas con la dependencia funcional del área de las bases de prismas y pirámides regulares con respecto a la longitud del lado del polígono que las forma. Elabore tablas en las que se expresen estas relaciones y represente gráficamente estos datos en el sistema de coordenadas.

13

Área de prismas y pirámides

13.1 Área de prismas regulares

Para establecer si la cartulina le alcanza a Néstor, se halla el área de todas las caras del prisma, es decir, el área total, y se compara con el área de la cartulina.

$$\begin{aligned} A_{\text{prisma}} &= 2 \cdot A_{\text{triángulo}} + 3 \cdot A_{\text{rectángulo}} \\ A_{\text{prisma}} &= 2 \cdot (31,28 \text{ cm}^2) + 3 \cdot (212,5 \text{ cm}^2) \\ A_{\text{prisma}} &= 700,06 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{cartulina}} &= 35 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} = 875 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Como $875 \text{ cm}^2 > 700,06 \text{ cm}^2$, entonces la cartulina que tiene Néstor es suficiente para construir el prisma.

El área lateral de un prisma regular es igual al perímetro del polígono de la base multiplicado por su altura (h), y su área total es igual al área lateral más el área de los polígonos de las dos bases.

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula el área del prisma pentagonal de la Figura 2.

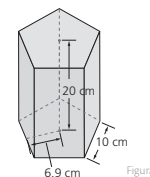


Figura 2

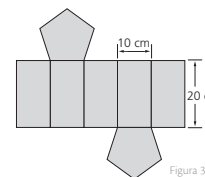


Figura 3

En la Figura 3 se observa que el área lateral del prisma viene dada por el rectángulo del desarrollo:

$$\begin{aligned} A_{\text{lateral}} &= \text{base del rectángulo} \cdot \text{altura del rectángulo} \\ A_{\text{lateral}} &= \text{perímetro del polígono} \cdot \text{altura del prisma} = p \cdot h \\ A_{\text{lateral}} &= 50 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

El área de una base del prisma es: $A_{\text{base}} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{50 \text{ cm} \cdot 6,9 \text{ cm}}{2} = 172,5 \text{ cm}^2$.
Por tanto, el área total es: $A_{\text{total}} = 1000 + 2 \cdot 172,5 = 1345 \text{ cm}^2$.

Ejemplo 2

Para calcular el área lateral y el área total del cubo de la Figura 4, se tiene en cuenta que cada una de sus seis caras es un cuadrado.

$$\begin{aligned} A_{\text{lateral}} &= p \cdot h \\ A_{\text{lateral}} &= 24 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{total}} &= A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} \\ A_{\text{total}} &= 144 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 36 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{total}} &= 144 \text{ cm}^2 + 72 \text{ cm}^2 = 216 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

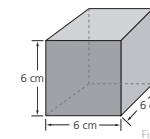


Figura 4

Explora

Néstor debe construir el prisma regular de la Figura 1 con un trozo de cartulina de 35 cm de largo por 25 cm de ancho.

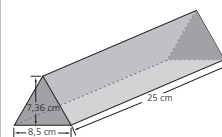


Figura 1

- ¿Le alcanza la cartulina a Néstor para construir el prisma? Justifica tu respuesta.

Ten en cuenta

El área de un polígono regular es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \\ A &= \frac{p \cdot a}{2} \end{aligned}$$

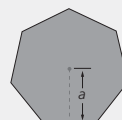


Figura 5

Destreza con criterios de desempeño:

Construir pirámides y prismas a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de pirámides y prismas.

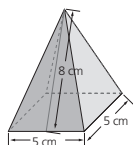
13.2 Área de pirámides regulares

El área lateral de una pirámide regular es igual al semiperímetro del polígono de la base multiplicado por la altura de una cara lateral, y su **área total** es igual al área lateral más el área del polígono de la base.

Ejemplo 3

Observa cómo se calcula el área lateral y el área total de las pirámides regulares de las figuras 6 y 7.

a.



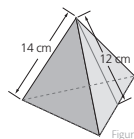
$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral}} = 80 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 80 \text{ cm}^2 + (5 \text{ cm})^2$$

$$A_{\text{total}} = 80 \text{ cm}^2 + 25 \text{ cm}^2 = 105 \text{ cm}^2$$

b.



$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot 42 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral}} = 252 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 252 \text{ cm}^2 + \frac{14 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2}$$

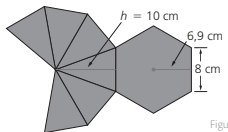
$$A_{\text{total}} = 252 \text{ cm}^2 + 84 \text{ cm}^2 = 336 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 4

El área de la pirámide de la Figura 8 se calcula así:

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos, y su base, un polígono regular; en este caso, un hexágono.

En el desarrollo de la pirámide (Figura 9) se puede ver que su área total se obtiene sumando al área lateral, el área de la base.



El área lateral es la suma de las áreas de los triángulos de sus caras.

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

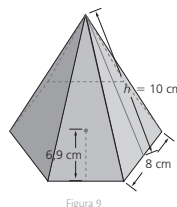
$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot \text{lado del polígono} \cdot \text{apotema de la pirámide} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h$$

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot A_{\text{triángulo}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot l) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot p \cdot h$$

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot 48 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^2$$

$$\text{El área de la base es: } A_{\text{base}} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{48 \text{ cm} \cdot 6,9 \text{ cm}}{2} = 165,6 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Luego, el área total es: } A_{\text{total}} = 240 \text{ cm}^2 + 165,6 \text{ cm}^2 = 405,6 \text{ cm}^2.$$



Ampliación conceptual

Una pirámide es un poliedro limitado por una base, que es un polígono con una cara; y por caras, que son triángulos coincidentes en un punto denominado ápice. El ápice o cúspide también es llamado vértice de la pirámide, aunque una pirámide tiene más vértices, tantos como el número de polígonos que lo limitan.

Una pirámide recta es un tipo de pirámide cuyas caras laterales son triángulos isósceles. En este tipo de pirámides la recta perpendicular a la base que pasa por el ápice corta a la base por su circuncentro.

Una pirámide regular es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.

El área lateral de una pirámide es la suma de las áreas de las caras laterales. El área total de la pirámide es la suma del área de la base y el área lateral.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Propóngales a los estudiantes inicialmente ejercicios en los que reactiven que el área de un polígono regular puede calcularse en función de la longitud de cada lado y su número de lados. Insista en que un polígono regular de n lados puede dividirse en n triángulos isósceles (equiláteros en el caso del hexágono regular) cuyas bases son los lados del polígono regular y la altura de cada uno de estos triángulos es una apotema del polígono regular.
- Haga interesantes referencias históricas a las Grandes Pirámides de Egipto y presente las pirámides cuadradas como aquellas que tienen cuadrados en sus bases.

Ampliación conceptual

El tronco de una pirámide regular es una parte de la pirámide. La pirámide tiene cúspide, en tanto que el tronco de pirámide tiene una segunda base.

Si el plano de corte es paralelo al plano de la base se dice que el tronco es de bases paralelas. La distancia entre las bases es la altura del tronco. Un tronco de bases paralelas de una pirámide regular está formado por dos bases, polígonos regulares semejantes, y varias caras laterales que son trapecios isósceles. Las alturas de estos trapecios se llaman apotemas de dichos troncos.

Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales.

Área total: Es la suma del área lateral y el área de las bases.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Propóngales a los estudiantes calcular el área lateral y el área total de varios troncos de pirámides regulares en las que se mantengan constantes las aristas de las bases y la arista lateral, mientras que solo varía el número de lados de los polígonos regulares que forman sus bases. Ejemplo: Cuatro troncos de pirámides regulares con triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos en las bases. Las aristas no varían, las de las bases miden 10cm y 20cm, la arista lateral mide 15cm.
- Plantee una situación de aprendizaje en la que pueda verse la pirámide como caso extremo de tronco, en el que uno de los planos de corte es tangente al vértice, quedando ésta reducida a un punto.

13

Área de prismas y pirámides

13.3 Área del tronco de una pirámide regular

El área lateral de un tronco de pirámide es la suma de las áreas de los trapecios congruentes de sus caras. Así:

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2) \cdot h$$

donde p_1 y p_2 son los perímetros de las dos bases del tronco. El área total se obtiene adicionando al área lateral, el área de las dos bases.

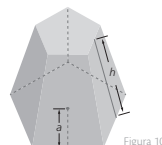


Figura 10

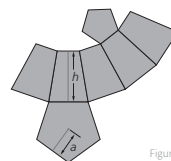


Figura 11

Ten en cuenta

El tronco de una pirámide es un poliedro comprendido entre la base de la pirámide y un plano que corta todas las aristas laterales.

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide de la Figura 12.

- Se hallan los perímetros de las dos bases.

$$p_1 = 4 \text{ cm} \cdot 5 = 20 \text{ cm} \text{ y } p_2 = 6 \text{ cm} \cdot 5 = 30 \text{ cm}$$

- Se halla el área lateral del tronco de pirámide.

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2) \cdot h$$

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (20 \text{ cm} + 30 \text{ cm}) \cdot 8 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$$

- Se calcula el área de cada una de las bases y luego el área total del tronco.

El área de cada una de estas bases es igual al semiperímetro de cada pentágono por la apotema correspondiente.

$$\text{Área de la base menor: } A_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 2,8 \text{ cm} = 28 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área de la base mayor: } A_2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \text{ cm} \cdot 4,1 \text{ cm} = 61,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Luego, } A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_1 + A_2 = 200 \text{ cm}^2 + 28 \text{ cm}^2 + 61,5 \text{ cm}^2 = 289,5 \text{ cm}^2$$

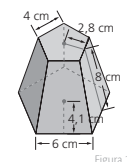


Figura 12

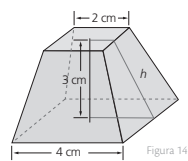


Figura 14



Figura 15

Actividades resueltas

Ejercitación

- Calcula el área total del prisma regular hexagonal de la Figura 13.

Solución:

El área total de un prisma se puede calcular con la fórmula $p \cdot (h + a)$.

$$\text{Perímetro de la base: } p = 6 \cdot 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

$$A_{\text{total}} = 24 \cdot (6 + 3,5) = 228 \text{ cm}^2$$

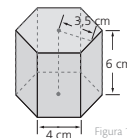


Figura 13

- Calcula el área lateral del tronco de pirámide de bases cuadradas de la Figura 14.

Solución:

Para hallar el área lateral, es necesario calcular el valor de h empleando el teorema de Pitágoras (Figura 15).

$$h^2 = (3 \text{ cm})^2 + (1 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm}^2$$

$$h = \sqrt{10 \text{ cm}^2} \Rightarrow h = 3,2 \text{ cm}$$

$$\text{Por lo tanto, } A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (8 \text{ cm} + 16 \text{ cm}) \cdot 3,2 \text{ cm} = 38,4 \text{ cm}^2$$

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Construir pirámides y prismas a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de pirámides y prismas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3. Calcula el área total de cada uno de los prismas representados en las Figuras 16 a 19.

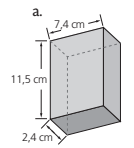


Figura 16

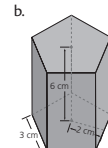


Figura 17

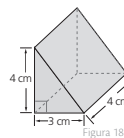


Figura 18

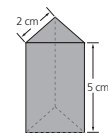


Figura 19

4. Calcula el área total de las siguientes pirámides.

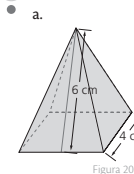


Figura 20

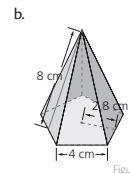


Figura 21

Razonamiento

5. Determina el área total de una pirámide regular, si su apotema mide 1 dm y su base es un cuadrado de 5 cm de lado.
6. Dibuja una pirámide regular cuya base es un octágono de 4 cm de lado, su apotema mide 4,84 cm y su altura es de 1,2 dm. Luego, calcula el área total de la pirámide.

Ejercitación

7. Construye y halla el área total del tronco de pirámide regular representado en la Figura 22.

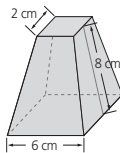


Figura 22

Resolución de problemas

8. Carolina compra una caja de cartón cuya forma es la de un prisma rectangular de 15 cm de largo, 10 cm de ancho y 4 cm de altura. Si ella la desarma y halla su área lateral y su área total, ¿qué valores encuentra?
9. ¿Cuál es el precio del embalaje plástico para una caja de 0,8 m · 0,7 m · 0,6 m, si el valor de cada metro cuadrado de plástico es de \$ 1,50?
10. ¿Cuántos m² de madera requiere un carpintero para fabricar tres puertas de 2 m de alto, 80 cm de largo y 5 cm de ancho?
11. Ricardo desea cambiar las baldosas que cubren las paredes y el piso de su piscina, la cual tiene forma de un prisma rectangular de 11 m de largo, 5 m de ancho y 1 m de profundidad. Si cada m² cuesta \$ 8,80, ¿cuánto debe invertir Ricardo en la compra de las baldosas?



12. El tejado de una casa tiene forma de pirámide cuadrangular, sin base. Un lado de su base mide 16 m y su altura es de 4 m (Figura 23). Se sabe que el tamaño de cada teja para cubrir el techo es de 2 m² y su precio es de \$ 5.

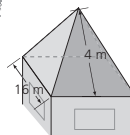


Figura 23

Supón que se compran diez tejas más de las necesarias para reemplazar las que se rompieron.

- a. ¿Cuántas tejas se necesitan para cubrir el techo?
- b. ¿Cuántas tejas se compraron en total?
- c. ¿Cuál es el costo total de las tejas que se compraron?

Ejercitación

3. a. $A_{\text{total}} = 60,92 \text{ cm}^2$
b. $A_{\text{total}} = 120 \text{ cm}^2$
c. $A_{\text{total}} = 60 \text{ cm}^2$
d. $A_{\text{total}} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$
4. a. $A_{\text{total}} = 64 \text{ cm}^2$
b. $A_{\text{total}} = 108 \text{ cm}^2$

Razonamiento

5. $A_{\text{total}} = 125 \text{ cm}^2$
6. $A_{\text{total}} = 206,44 \text{ cm}^2$

Ejercitación

7. $A_{\text{total}} = 168 \text{ cm}^2$

Resolución de problemas

8. $A_{\text{lateral}} = 200 \text{ cm}^2$ y $A_{\text{total}} = 500 \text{ cm}^2$
9. \$ 4,38
10. $A_{\text{total}} = 3,48 \text{ m}^2$
11. \$ 765,6
12. a. 128 tejas
b. 148 tejas
c. \$ 740

Ampliación conceptual

El tronco de cono o cono truncado es un cuerpo geométrico que se obtiene al rotar un trapecio rectángulo en torno al lado perpendicular a las bases.

El tronco de un cono recto es una parte del cono. El cono tiene cúspide, en tanto que el tronco de cono tiene una segunda base.

Si el plano de corte es paralelo al plano de la base se dice que el tronco es de bases paralelas. La distancia entre las bases es la altura del tronco.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Parta de reconocer a los cilindros y conos en objetos y representaciones de la realidad objetiva y a partir de situaciones de la vida que planteen la presencia o conveniencia de su utilización. Ejemplo: En el almacenamiento de líquidos (en tanques de agua domésticos, pipas de transportación, grandes tanques de almacenaje de petróleo en los puertos), gases (en balones cilíndricos), así como su presencia en la naturaleza (el tronco de un árbol).
- Intégrelos al conjunto de cuerpos geométricos estudiados, haciendo notar las similitudes y diferencias de sus elementos y propiedades, así como la posibilidad de realizar cortes en ellos para obtener otros cuerpos.
- Plantee actividades en las que los estudiantes tengan que construir conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de conos y cilindros.

14

Área de cilindros y conos

Explora

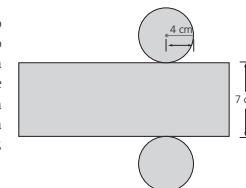
Sergio trabaja en una empresa etiquetadora de productos enlatados y se le ha encomendado la tarea de elaborar la etiqueta lateral de un nuevo producto que se empacará en la lata cilíndrica de la Figura 1.



- ¿Cuántos cm^2 de papel empleará Sergio en la elaboración de la etiqueta?

14.1 Área del cilindro

Para resolver el problema, Sergio desarmó el modelo del envase y ubicó sus medidas como se observa en la Figura 2. Esto le permitió saber que debe fabricar una etiqueta rectangular cuya altura mida 7 cm y cuya base sea igual a la longitud de la base del cilindro; es decir, a la longitud de la circunferencia.



$$A = 2 \cdot \pi \cdot 4 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 175,93 \text{ cm}^2$$

Longitud de la circunferencia Altura del rectángulo

Por tanto, Sergio empleará $175,84 \text{ cm}^2$ de papel en la elaboración de la etiqueta.

El área lateral de un cilindro coincide con el área de un rectángulo. Su área total se obtiene al adicionar el área lateral con el área de las dos bases circulares.

Para calcular el área de un cilindro se aplican estas fórmulas:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

donde r es el radio del círculo de la base y h es la altura del cilindro.

Ejemplo 1

Si la etiqueta que debe elaborar Sergio para la lata de la Figura 1 debiera cubrir también las tapas del recipiente, sería preciso calcular el área total de la lata, así:

$$A_{\text{base}} = \pi \cdot (4 \text{ cm})^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 175,84 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 50,24 \text{ cm}^2 = 276,32 \text{ cm}^2$$

Lo anterior significa que Sergio necesitaría $276,32 \text{ cm}^2$ de papel para elaborar una etiqueta que cubra por completo la lata en la que se empacará el nuevo producto.

Ejemplo 2

Para calcular la cantidad de plástico que se necesita para construir un frasco con tapa de forma cilíndrica de 5 cm de diámetro y 10 cm de altura, se procede así:

- Se halla el área lateral del frasco.

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot 2,5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 157 \text{ cm}^2$$

- Se calcula el área de una de las bases.

$$A_{\text{base}} = \pi \cdot (2,5 \text{ cm})^2 = 19,625 \text{ cm}^2$$

Por tanto, la cantidad de material que se requiere para construir el frasco plástico es:

$$A_{\text{total}} = 157 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 19,625 \text{ cm}^2 = 196,25 \text{ cm}^2$$



Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Construir conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de conos y cilindros.

14.2 Área del cono

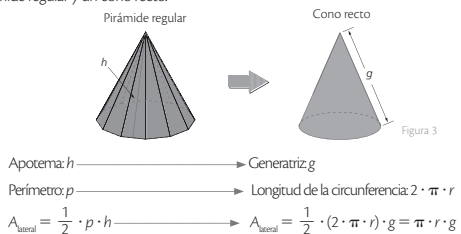
Para calcular el área del cono se aplican estas fórmulas:

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2,$$

donde r es el radio del círculo de la base y g es la longitud de la generatriz.

Observa las similitudes y diferencias para hallar el área lateral y el área total entre una pirámide regular y un cono recto.



Ejemplo 3

En la Figura 4 se observa que $r = 5 \text{ cm}$ y $g = 10 \text{ cm}$. Por tanto, el área lateral del cono se calcula de la siguiente manera:

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 157 \text{ cm}^2$$

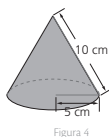
Ejemplo 4

Para determinar el área total de un cono cuya área lateral es 38 cm^2 y cuyo radio de la base es 3 cm , se procede como se muestra a continuación.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}$$

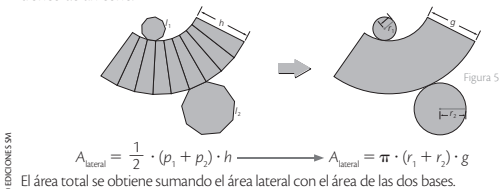
$$A_{\text{total}} = 38 \text{ cm}^2 + \pi \cdot (3 \text{ cm})^2$$

$$A_{\text{total}} = 38 \text{ cm}^2 + 28,26 \text{ cm}^2 = 66,26 \text{ cm}^2$$



14.3 Área del tronco de cono

Observa en la Figura 5 el desarrollo del tronco de una pirámide y el desarrollo del tronco de un cono.



APLICA © EDICIONES SM

179

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Introduzca el tema con la utilización de la aproximación geométrica. Ejemplo: presénteles a los estudiantes la estimación del área de cilindros y conos, utilizando el área de prismas y pirámides regulares con triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos, y así otros polígonos regulares en las bases de manera que se ilustre que para un número lo suficientemente grande de lados en las bases el área de cilindros y conos se aproxima al área de prismas y pirámides de igual altura.
2. Plantee la estimación del área total de estos cuerpos mediante el desarrollo de los mismos sobre una superficie plana.
3. Propóngales a los estudiantes analizar las similitudes y diferencias para hallar el área lateral y el área total entre un prisma regular y un cilindro recto, igualmente entre una pirámide regular y un cono recto, así como entre un tronco de pirámide regular y un tronco de cono recto.
4. Presente el tema de los troncos de conos como casos límites de troncos de pirámides, de manera análoga a como se utilizó la aproximación geométrica para introducir el tema de áreas de cilindros y conos.

■ Actividades colaborativas

Organiza a los estudiantes por equipos y crea dentro de ellos pequeños grupos de trabajo que se encargarán de construir medios de enseñanza-aprendizaje para el tratamiento del tema. Esto permite activar y motivar el proceso.

■ Actividades colaborativas

Organice a los estudiantes en tres equipos con el propósito de desarrollar juegos didácticos sencillos en los que los equipos tengan que resolver problemas geométricos relacionados con el cálculo de área de cilindros y conos. Por ejemplo, se pueden realizar una competencia con varias rondas, en cada una de ellas los integrantes de dos equipos ofrecen una solución a un problema determinado y el tercero tendrá que ganarse la puntuación de la ronda evaluando el trabajo desarrollado por los otros dos equipos. Es importante que los equipos tengan indicadores de rapidez y precisión para el éxito en el desarrollo de las actividades.

Organiza a los estudiantes por equipos y crea dentro de ellos pequeños grupos de trabajo, de cuatro a cinco integrantes, que se encargarán de recolectar objetos que puedan encontrar en sus vidas cotidianas, y que tengan la forma de cilindros y conos. De esta manera los estudiantes tendrán variedad de representantes de cada una de estos sólidos. Los objetos reunidos pueden pasar a formar parte de un conjunto de objetos de la realidad que se utilizan como medios de enseñanza-aprendizaje en la escuela. Proponga actividades a los estudiantes en las que tengan que ser capaces de medir, estimar, convertir y calcular longitudes y áreas en estos objetos recolectados.

14

Área de cilindros y conos

Actividades resueltas

Resolución de problemas

- 1 La altura de una lata es de 10 cm y el diámetro de su base, 7 cm. Salvo las bases, la lata está recubierta de un papel en el que figuran la marca comercial y otra información general. ¿Qué superficie de papel, en metros cuadrados, se necesitará para recubrir 1 000 latas?

Solución:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 219,8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para 1 000 latas: } 219,8 \cdot 1\,000 = 219\,800 \text{ cm}^2$$

Se necesitan aproximadamente 22 m² de papel para cubrir las 1 000 latas.

Ejercitación

- 2 Calcula el área total del tronco de cono representado en la Figura 6.

Solución:

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g + \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2$$

$$A_{\text{total}} = 3,14 \cdot (5 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) \cdot 10 \text{ cm} + 3,14 \cdot (5 \text{ cm})^2 + 3,14 \cdot (3 \text{ cm})^2$$

$$A_{\text{total}} = 251,2 \text{ cm}^2 + 78,5 \text{ cm}^2 + 28,26 \text{ cm}^2 = 357,96 \text{ cm}^2$$

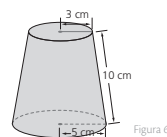


Figura 6

Matemáticas

Halla el área total de un tronco de cono con la calculadora científica

En tu calculadora puedes obtener el área de un cilindro, de un cono o de un tronco de cono de manera más aproximada, ya que se tienen en cuenta más cifras decimales del número π . En la mayoría de las calculadoras se utiliza la tecla π combinada con una tecla en la que se identifica el número π ; para esta calculadora es la tecla π .

- Observa el procedimiento para calcular el área total de un tronco de cono empleando la fórmula correspondiente, si se sabe que el radio de la base superior es 4 cm, la generatriz es 12 cm y el radio de la base inferior es 6 cm.

- Para hallar el área lateral del tronco de cono empleando la fórmula $\pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g$ en la calculadora, se digita la secuencia:

$\pi \times (4+6) \times 12$

La calculadora registra:

376.9911184

- Para hallar el área de las bases del tronco de cono empleando la fórmula $\pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2$, se digita:

$\pi \times 4^2 + \pi \times 6^2$

En pantalla:

163.362818

- Elige la aproximación que requieres y suma los valores anteriores. Si quieres sumar en la calculadora los valores aproximados a las centésimas, digita:

163.36 + 376.99

En la pantalla se observa:

540.35

Por consiguiente, el área total del tronco de cono es 540,35 cm².



Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Construir conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de conos y cilindros.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3. Dibuja un cilindro de 4 cm de diámetro y 6 cm de altura.
 - Luego, calcula su área total.
4. Calcula el área de los cilindros cuyas dimensiones son:
 - a. Radio: 2,5 cm; altura: 1,2 dm
 - b. Diámetro: 4,8 cm; altura: 0,8 dm
5. Halla las áreas que se indican.
 - a. Área total de un cilindro recto de 8 cm de altura y con un diámetro de la base de 5 cm.
 - b. Área total de un cono recto de 2 dm de altura y con un diámetro de la base de 1 dm.
10. Un envase tiene forma de cilindro circular recto. El área de cada base es de 1225 cm^2 y su altura es de 12 cm.
 - a. ¿Cuánto mide el diámetro de la base?
 - b. ¿Cuál es el área lateral del recipiente?
 - c. ¿Cuánto mide su área total?
11. Una empresa de atún empaca doce latas por caja. Las dimensiones de cada lata y la disposición en la que se vende el producto a los supermercados se muestra en la Figura 9.

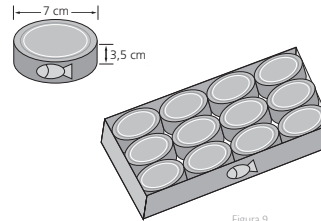


Figura 9

- a. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?
- b. Si se quiere etiquetar la superficie lateral de las latas de atún, ¿cuánto papel se necesita para tres cajas del producto?

Razonamiento

6. Lee y responde.
 - Al girar el rectángulo de la Figura 7 alrededor del lado $\overline{AB}$ se obtiene un cilindro. Si se gira alrededor del lado $\overline{AD}$ se obtiene otro cilindro. ¿Tienen la misma área? Compruébalo calculando ambas áreas.

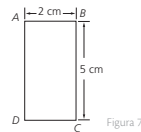


Figura 7

Ejercitación

7. Calcula el área total de los conos cuyas dimensiones se presentan a continuación.
 - a. Radio: 2,5 cm; generatriz: 1,2 dm
 - b. Diámetro: 24 cm; altura: 1,6 dm
8. Construye y determina el área total del tronco de cono representado en la Figura 8.
12. El radio de un cono mide 2,5 cm y la generatriz, 7 cm.
 - Calcula su área total.
13. El diámetro de un cono mide 12 cm y su altura es de 8 cm. Calcula su área total.
14. La galleta de un cono de helado se cubre con una servilleta como la de la Figura 10. Si el área de la servilleta es 110 cm^2 , ¿cuánto mide el radio?

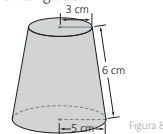


Figura 8

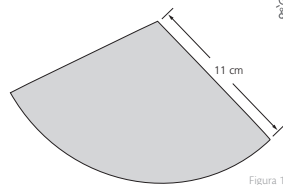
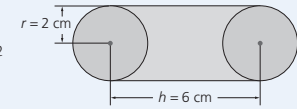


Figura 10

Resolución de problemas

9. Los radios de las bases de un tronco de cono miden 5 cm y 2 cm, respectivamente, y su altura mide 4 cm. Calcula el área total del tronco de cono.

Ejercitación



3. $A = 28\pi \text{ cm}^2$
4. a. $A_{\text{lateral}} = 60\pi \text{ cm}^2$ y $A_{\text{total}} = 66,25\pi \text{ cm}^2$
b. $A_{\text{lateral}} = 38,4\pi \text{ cm}^2$ y $A_{\text{total}} = 44,16\pi \text{ cm}^2$
5. a. $A_{\text{total}} = 46,25\pi \text{ cm}^2$
b. $A_{\text{total}} = 1,28\pi \text{ dm}^2$

Razonamiento

6. Sí tienen la misma área lateral pero no tiene la misma área total.

Ejercitación

7. a. $A_{\text{total}} = 113,8827 \text{ cm}^2$
b. $A_{\text{total}} = 384\pi \text{ cm}^2$
8. $A = 82\pi \text{ cm}^2$

Resolución de problemas

9. $A = 65\pi \text{ cm}^2$
10. a. $d = 39,5 \text{ cm}$
b. $A_{\text{lateral}} = 473,9181\pi \text{ cm}$
c. $A_{\text{total}} = 3938,86 \text{ cm}^2$
11. a. Ancho: 28 cm, largo: 21 cm y altura: 3,5 cm
b. $2770,8847 \text{ cm}^2$
12. $A_{\text{total}} = 74,6128 \text{ cm}^2$
13. $A_{\text{total}} = 427,2566 \text{ cm}^2$
14. $r = 3,18 \text{ cm}$

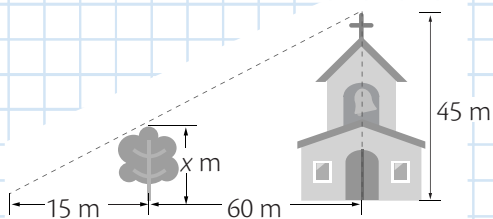
UNIDAD
4

Evaluación sumativa

1. En una representación a escala las alturas de Amanda y Benito son 5,4 cm y 4,5 cm, respectivamente. En la realidad, Benito mide 155 cm. ¿Qué estatura tiene Amanda en la realidad?

2. En un triángulo ABC, $a = 9$ cm, $b = 12$ cm y $c = 15$ cm. Calcula los lados de un triángulo PQR, semejante al triángulo ABC, de perímetro igual a 24 cm.

3. Calcula la altura del árbol.



4. Halla las coordenadas del triángulo semejante al triángulo ABC cuyos vértices son $A(0; 2)$, $B(2; 1)$ y $C(1; 4)$, mediante la homotecia con centro en $D(3; 2)$ y factor de proporcionalidad $-1,5$.

Nombre:

Grado: Fecha:

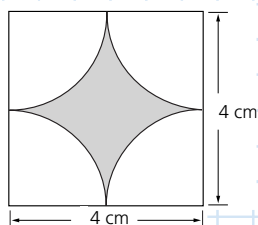
5. Carlos desea cercar con alambre un terreno de forma rectangular para el cultivo de arveja. La medida del largo del terreno es de 155 dm y su ancho es de 76 dm. Si va a utilizar tres filas de alambre, ¿cuántos dm de alambre necesita?

6. Pedro tiene cultivado lo siguiente: 6 hm^2 de naranjas, 30 dam^2 de mandarinas, 7000 dm^2 de limones y 820 000 cm^2 de toronjas. ¿Cuántos m^2 en total tiene cultivados?

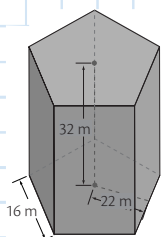
7. El suelo de una habitación rectangular mide 4 m de largo y 2,5 m de ancho. Se desea cubrirlo con baldosas cuadradas de 25 cm de lado. ¿Cuántas baldosas se necesitan?

8. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 8 cm y su hipotenusa mide 2 cm más que su otro cateto. Calcula la medida de cada lado.

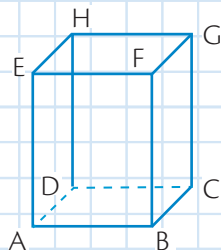
9. Halla el área de la siguiente región sombreada.



10. Calcula el área total de cada uno de los prismas y pirámides regulares representados.



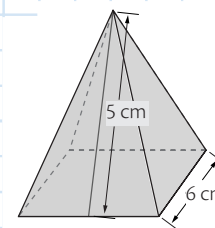
11. Se tiene un prisma regular de base cuadrada, se conoce además que su altura es 4 cm y que el perímetro de la base es igual a 12 cm. Calcula el área total del prisma.



12. El diámetro de un cono mide 20 cm y su altura es de 24 cm. Calcula su área total.

13. Un futbolista entrenó en el día corriendo 30 veces ida y vuelta la diagonal del terreno de juego de un campo de fútbol que tiene unas medidas de 105 x 67 m. ¿Qué distancia recorrió el futbolista en el entrenamiento del día?

14. Alberto quiere construir la pirámide regular que muestra la figura con un trozo de cartulina de 15 cm de largo por 6 cm de ancho. ¿Le alcanza la cartulina a Alberto para construir la pirámide? Justifica tu respuesta.



UNIDAD

5

Evaluación diagnóstica

Nombre:

Grado: Fecha:

1. Ordena de menor a mayor las siguientes longitudes, 7541523cm, 7541423cm, 7641123cm y 7641423cm.

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números: $\frac{7}{10}$; 3; $\frac{4}{5}$; $\frac{0}{4}$; 1; $2\frac{1}{6}$

3. ¿Cuáles son los valores de las letras que completan la siguiente multiplicación?

$$\begin{array}{r} 3 2 8 \\ \times 5 a \\ \hline 6 5 b \\ + 1 6 4 c \\ \hline 1 7 0 d 6 \end{array}$$

4. ¿Cuáles son los valores de las letras que completan la siguiente división?

3	8	1	a	3	b
0	7	c		1	2 a
0	9	3			
	0	0	0		

5. Simplifica las fracciones dadas de forma tal que se obtenga en el denominador de la fracción un múltiplo de 10.

A. $\frac{4}{200}$

B. $\frac{30}{500}$

C. $\frac{70}{20}$

6. Identifica dentro del paréntesis, con una V si los pares de fracciones dadas son equivalentes, y con una F, si no lo son.

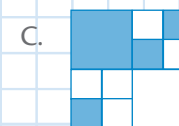
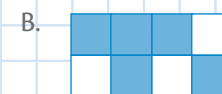
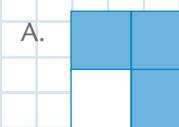
A. $\frac{3}{5} = \frac{5}{3}$ ()

B. $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$ ()

C. $\frac{9}{4} = \frac{18}{16}$ ()

D. $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ ()

7. Escribe la fracción que representa cada una de las partes sombreadas.



8. Representa las siguientes fracciones en porcentajes y expresiones decimales.

	Fracción	Decimal	Porcentaje
a.	$\frac{15}{100}$	0,15	15%
b.	$\frac{25}{100}$		
c.	$\frac{100}{100}$		
d.	$\frac{7}{10}$		
e.	$\frac{3}{5}$		

Propósito de la unidad

Bloque de estadística y probabilidad

En este bloque los estudiantes estudiarán sobre tipos de variables estadísticas, así como sobre la recolección y conteo de datos, las distribuciones de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas a partir de situaciones reales del contexto que les permitan arribar a conclusiones válidas para decisiones razonables.

Conocerán sobre la representación de información estadística con varios tipos de gráficas entre las cuales se incluyen histogramas y polígonos de frecuencias para datos agrupados, a partir de datos vinculados a varios campos diferentes como el deporte, la cultura, el tiempo, la economía, la sociología, la medicina, la equidad de géneros, la educación ambiental entre otros que les puedan resultar interesantes.

Aprenderán sobre medidas de tendencia central, haciendo énfasis en la importancia de los instrumentos de cálculo que tienen a su alcance para el tratamiento de grandes cantidades de información. Igualmente estudiarán medidas de dispersión con una nueva perspectiva para el análisis de los datos estadísticos. Asimismo trabajarán con experimentos aleatorios y diferentes tipos de sucesos, a partir de destacar la gran frecuencia con que ocurren en la vida fenómenos aleatorios.

De igual forma, en este bloque lidiarán con las probabilidades para contribuir a consolidar su concepción científica del mundo, al aprender cómo solucionar problemas no deterministas.

Evaluaciones

Diagnóstica

Se realizará la evaluación diagnóstica a los estudiantes aplicando ejercicios donde comparen y reconozcan la relación de orden en los números naturales y fracciones para asegurar las bases de las distribuciones de frecuencias, el análisis de medidas de tendencia central, fundamentalmente la mediana, y las medidas de dispersión. También se diagnosticarán las habilidades con fracciones decimales, la representación de fracciones en porcentajes y expresiones decimales, utilizado en el trabajo con frecuencias relativas. Igualmente se indagará sobre el dominio de las operaciones básicas de multiplicación y división entre números, lo que será muy útil para el cálculo de la media aritmética y la probabilidad de sucesos. En este último aspecto será necesario de la misma forma la representación de fracciones, en función de la identificación de sucesos aleatorios, lo que se diagnostica igualmente junto al trabajo con fracciones equivalentes por su incidencia igualdad de probabilidades.

Formativa

Se realizará la evaluación formativa para obtener información del avance que ha adquirido cada estudiante en cuanto a los contenidos impartidos. Se realizarán ejercicios de identificación de variables tanto cualitativas como cuantitativas, así como sobre organizar datos procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Igualmente se evaluarán las destrezas para organizar datos procesados en tablas de frecuencias para representarlos gráficamente. Además, se valorarán las destrezas para el cálculo e interpretación de las medidas de tendencia central y las de dispersión.

Sumativa

La evaluación sumativa se realizará en función de constatar que los estudiantes hayan adquirido las destrezas para analizar y representar en tablas de frecuencias, y gráficas estadísticas, datos recolectados en el entorno e información publicada en medios de comunicación, así como el análisis e interpretación del significado de calcular medidas de tendencia central y de dispersión. Igualmente se atenderán las relaciones que se dan en el cálculo de probabilidades de sucesos aleatorios.

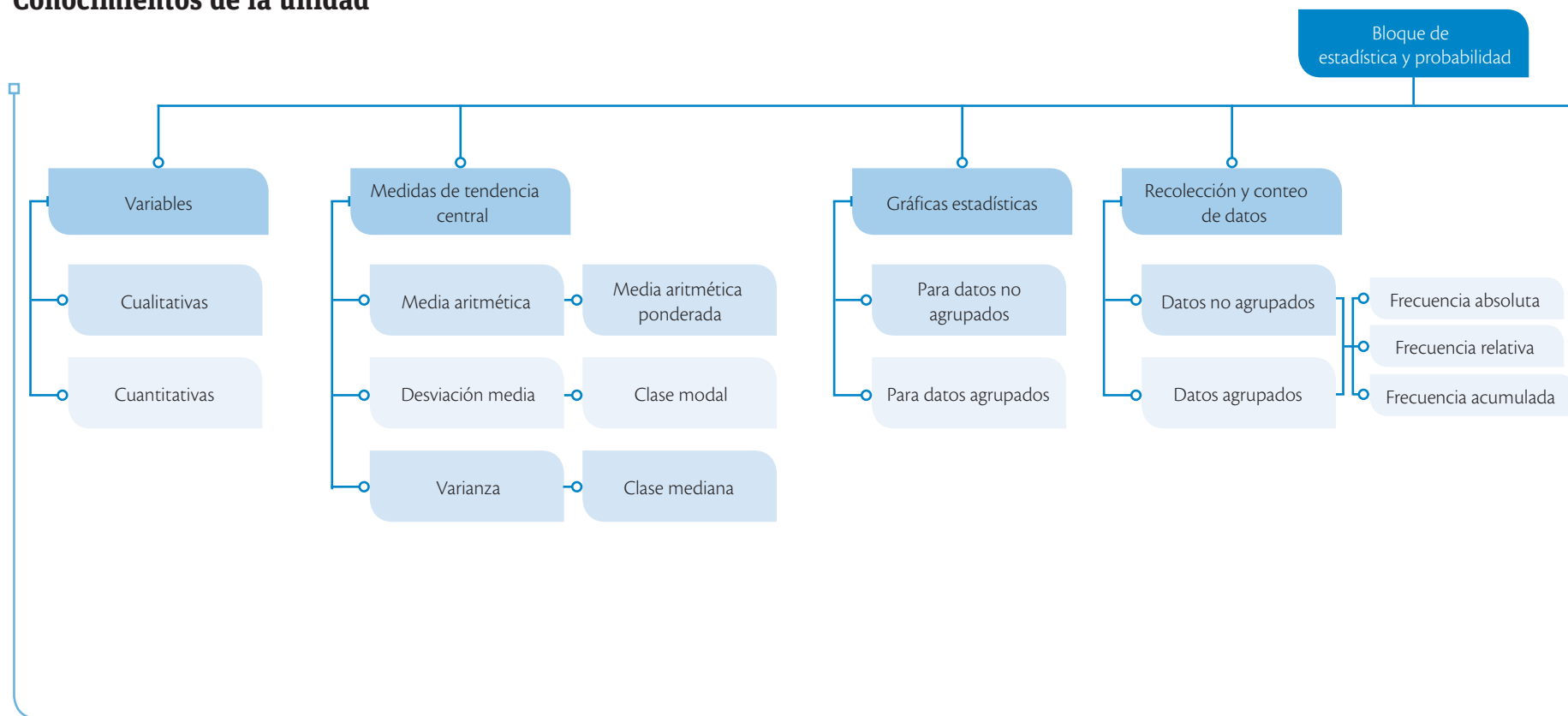
Respuestas

Evaluación diagnóstica

- 7 541 423cm; 7 541 523cm; 7 641 123cm; 7 641 423cm.
- $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{4}{5}$; 1; $2\frac{1}{6}$; 3;
- a=2; b=6; c=0; d=5.
- a=3; b=1; c=1.
- a. $\frac{2}{100}$; b. $\frac{6}{100}$; c. $\frac{35}{10}$
- a. F; b. V; c. F; d. V
- A = $\frac{3}{4}$ B = $\frac{5}{8}$ C = $\frac{7}{16}$
- b. 0,25; 25% c. 1; 100% d. 0,7; 70% e. 0,6; 60%

Esquema conceptual

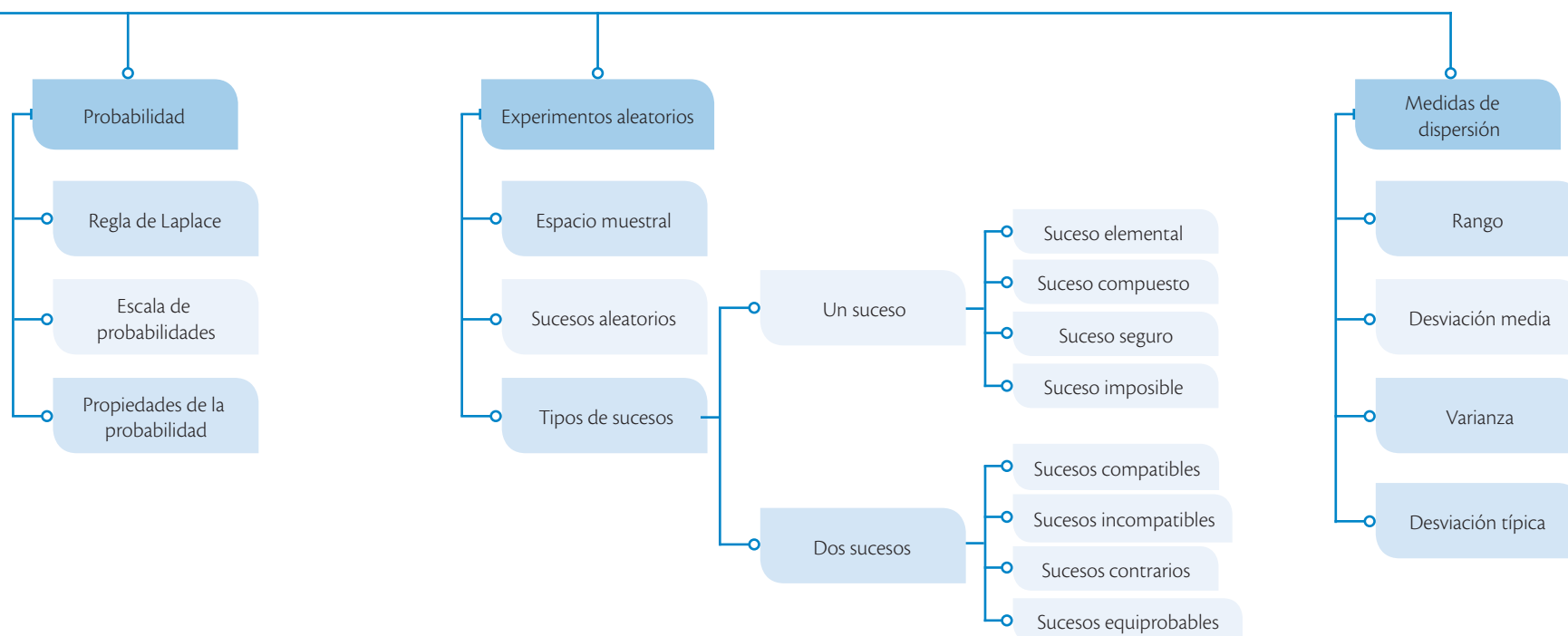
Conocimientos de la unidad



Cultura del Buen Vivir

■ Valor: **La prudencia**

Una persona prudente es aquella que actúa con precaución y que se modera al hablar.



■ Compromiso a lograr

En esta unidad se abordan temas muy importantes que se relacionan directamente con lo cotidiano, y que se manifiestan en la vida práctica de manera muy frecuente por lo que están en correspondencia con los conocimientos, destrezas y actitudes que deben alcanzar los estudiantes, de ahí que contribuyen a lograr que estos adquieran el valor indicado en la unidad. Aprenderán a recolectar, organizar, presentar y analizar datos que se obtienen de la observación de fenómenos para hacer estudios en personas, animales, objetos, entre otros con la intención de arribar a conclusiones válidas que permitan tomar decisiones razonables basadas en estas. De tal forma durante las clases se harán continuas reflexiones sobre conducirse de una manera razonada y equilibrada, ser comedidos, justos, y medir de forma acertada las consecuencias de sus actos con precaución para evitar posibles daños, situación que se traducirá en el establecimiento de relaciones interpersonales sólidas, basadas en sentimientos de respeto.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 5: estadística y probabilidad				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.1. – OG.M.6.		O.M.4.1. – O.M.4.7.		
Objetivos de subnivel		Valores		
OI.4.1 – OI.4.2. – OI.4.8. – OI.4.9. – OI.4.12.		• La prudencia		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.7. – CE.M.4.8.		I.M.4.7.1. – I.M.4.8.1.		
Objetivos de la unidad				
• Interpretar la información gráfica y la tendencia de un conjunto de datos analizando las medidas de tendencia central y medidas de dispersión, a partir de situaciones de la realidad cotidiana en las que se deba recolectar, organizar, presentar y analizar datos para hacer estudios probabilísticos y estadísticos, en función de lograr que los estudiantes se incentiven a sentir, pensar y actuar con conciencia, precaución, moderación, respeto y responsabilidad en la toma de decisiones, evitando hacerlo de manera irreflexiva en las múltiples situaciones que deben enfrentar en la vida cotidiana.				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Estadística y probabilidad	- Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas. - Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. - Organizar datos agrupados y no agrupados, procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. - Organizar datos agrupados en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada para analizar el significado de los datos. - Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada y representarlos gráficamente con ayuda de las TICs. - Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media) de un conjunto de datos en la solución de problemas.	Reactive fundamentalmente la relación de orden en los números, así como el dominio de las operaciones básicas de multiplicación y división entre números, lo que será muy útil para las distribuciones de frecuencias, el análisis de medidas de tendencia central y las medidas de dispersión.	- Identifica variables estadísticas. - Calcula frecuencias absolutas, frecuencias relativas y frecuencias absolutas acumuladas de una serie de datos. - Organiza datos en tablas de distribución de frecuencias para analizar el significado de los datos.	Actividad: de la experiencia aleatoria de lanzar un dado, escriba los sucesos que pida el docente. Técnica: observación

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Estadística y probabilidad	- Representar de manera gráfica, con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular, en función de analizar datos. - Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas. - Calcular e interpretar las medidas de tendencia central, medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas. - Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada. - Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.	- Introduzca algunas referencias históricas sobre las necesidades prácticas que llevaron al hombre y a la sociedad a realizar actividades de recopilación, procesamiento y análisis de datos cuantitativos y cómo éstas se han ido perfeccionando hasta nuestros días. Propicie reflexiones sobre la necesidad de una actitud razonada y equilibrada, de ser comedidos, justos, y medir de forma acertada las consecuencias de sus actos en el trabajo con datos estadísticos. - Apóyese en Excel para la construcción de tablas y de los distintos tipos de gráficos. Es importante valorar la actualización didáctica que se necesita para desarrollar clases contemporáneas, en un proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas acorde al desarrollo tecnológico actual. - Utilice información actualizada de las agencias que se encargan de estudios estadísticos en el país para contextualizar las actividades a la realidad ecuatoriana, con datos vinculados a varios campos diferentes como el deporte, la cultura, la educación ambiental entre otras aplicaciones.	- Elabora e interpreta gráficos estadísticos. - Calcula la media aritmética y la mediana, de un conjunto de datos estadísticos. - Calcula el rango, la varianza, la desviación media y típica de un grupo de datos estadísticos. - Calcula probabilidades simples con el uso de fracciones	Instrumento: registro descriptivo.

Recursos: Programa Excel para la construcción de tablas y de distintos tipos de gráficos. Clases contemporáneas para un excelente proceso de enseñanza aprendizaje.

Bibliografía: Libro de texto Matemática 8vo grado privada. Texto Probabilidades y estadística, Colectivo de autores Editorial Pueblo y Educación 1999.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Introduzca algunas referencias históricas sobre las necesidades prácticas que llevaron al hombre y a la sociedad a realizar actividades de recopilación, procesamiento y análisis de datos cuantitativos y cómo éstas se han ido perfeccionando hasta nuestros días.
- Emplee datos que estimulen el reconocimiento, valoración y utilidad de la estadística en diferentes ámbitos sociales, políticos y económicos, para interpretar, describir y predecir situaciones reales.
- Trate de que inicialmente las cantidades para la recolección de datos sean números de hasta solo 2 o 3 cifras para que las dificultades en el cálculo no sean un obstáculo adicional en la comprensión del proceso.
- Utilice información actualizada de las agencias que se encargan de estudios estadísticos en el país para contextualizar las actividades a la realidad ecuatoriana.

Ampliación conceptual

Estadística se ocupa en general de fenómenos observables. Se desarrolla observando hechos, formulando leyes que los explican y realizando experimentos para validar o rechazar dichas leyes.

Las variables son rasgos que pueden ser observados. Tienen la propiedad de poder variar, de asumir valores. Estas se refieren a características medibles, con lo que se necesitan escalas para hacerlo.

Los datos estadísticos son las informaciones que se obtienen de la observación del fenómeno que se estudia en personas, animales, objetos, entre otros.

1

Variables, datos y frecuencias

Explora

En un estudio estadístico aplicado a un grupo de estudiantes universitarios, se consideran las siguientes variables estadísticas: estatura, edad, deporte que practica, comida favorita, número de hermanos, peso y profesión de los padres.



- ¿Cuáles de esas variables se pueden expresar numéricamente?

Ten en cuenta

La suma N de las frecuencias absolutas es igual al número de datos.

$$N = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$$

La suma de las frecuencias relativas siempre es igual a 1.

Ten en cuenta

La estadística, que es una ciencia tan antigua como la escritura, es una rama de las matemáticas que estudia y aplica métodos para recoger, organizar, analizar e interpretar información con el propósito de tomar decisiones. Otras ciencias como la economía, la medicina y la ingeniería hacen uso de ella.

De las variables consideradas en el estudio, las que se pueden medir son: la estatura, la edad, el peso y el número de hermanos. A este tipo de variables se les llama **cuantitativas**. Las demás variables (el deporte que practica, la comida favorita y la profesión de los padres) se denominan variables **cualitativas**, y representan características no medibles.

Una **variable estadística** es una propiedad que se puede estudiar en una población y que permite clasificar a los individuos o elementos de la misma.

En estadística se estudian dos tipos de variables.

- Cuantitativas:** si se pueden medir y expresar con un número.
- Cualitativas:** si representan una característica que no se puede medir.

Cada uno de los valores que puede tomar una variable se conoce como **dato**. Cuando una variable cuantitativa solo puede tomar valores aislados que se expresan mediante números enteros, se dice que es una **variable cuantitativa discreta**. De otro lado, si la variable puede tomar todos los valores de un intervalo predeterminado, se dice que es **continua**.

Ejemplo 1

La estatura es una variable estadística continua, ya que puede tomar valores como 1,28 m, 1,56 m o 1,36 m; mientras que el número de hermanos es una variable discreta, pues solo puede tomar valores enteros como cero, uno, tres, cinco...

Los datos de un estudio estadístico se disponen en tablas, las cuales permiten clasificar y organizar la información recogida.

Para un conjunto de datos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ obtenidos en un estudio estadístico:

- La **frecuencia absoluta** f_i indica el número de veces que aparece un dato x_i en el estudio estadístico.
- La **frecuencia relativa** h_i es el cociente entre la frecuencia absoluta de un dato x_i y el número total de datos.
- La **frecuencia absoluta acumulada** F_i es la suma de la frecuencia absoluta de un dato x_i y la de los datos menores que él.

Ejemplo 2

En un centro recreativo para adultos mayores se realizó una encuesta a 25 personas con el fin de saber cuántos días por semana van a este centro. En la encuesta se obtuvieron los siguientes resultados:

5 2 3 1 2 4 5 4 2 1 5 3 4 2 1 4 4 5 4 5 5 1 3

Los datos recogidos se organizaron en la Tabla 1.

Número de días por semana	1	2	3	4	5
Número de personas	4	4	3	6	8

Tabla 1

En esta tabla se observa que, por ejemplo, hay seis adultos mayores que van al centro recreativo cuatro veces por semana; esto significa que la frecuencia absoluta del dato "van cuatro veces por semana" es 6.

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destrezas con criterios de desempeño: Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.
Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

Ejemplo 3

La Tabla 2 muestra las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de los datos del Ejemplo 2.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas
1	4	$\frac{4}{25} = 0,16$	4
2	4	$\frac{4}{25} = 0,16$	$4 + 4 = 8$
3	3	$\frac{3}{25} = 0,12$	$4 + 4 + 3 = 11$
4	6	$\frac{6}{25} = 0,24$	$4 + 4 + 3 + 6 = 17$
5	8	$\frac{8}{25} = 0,32$	$4 + 4 + 3 + 6 + 8 = 25$
Suma = 25		Suma = 1	

Tabla 2

En esta tabla, el valor 17 de la columna de frecuencias absolutas acumuladas indica el número de personas que asisten como máximo cuatro días por semana al centro recreativo.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Lee y resuelve.

- Se les preguntó a diez estudiantes de séptimo grado por su número de hermanos y se obtuvieron estos datos: 0 2 2 0 1 2 3 1 3 1.
- Organiza la información en una tabla y halla las frecuencias absolutas, las frecuencias relativas y las frecuencias absolutas acumuladas.
- ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada del dato "dos hermanos" y qué representa esta frecuencia en el contexto del problema?
- ¿Qué porcentaje de personas tiene un hermano?

Solución:

a.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas
0	2	$\frac{2}{10} = 0,2$	2
1	3	$\frac{3}{10} = 0,3$	5
2	3	$\frac{3}{10} = 0,3$	8
3	2	$\frac{2}{10} = 0,2$	10

Tabla 3

- La frecuencia acumulada de "dos hermanos" es 8, y significa que ocho personas tienen dos hermanos o menos.
- $0,3 \cdot 100 = 30\%$ de personas tienen un hermano.

Ten en cuenta

Las frecuencias relativas expresan el porcentaje o tanto por ciento de la población que tiene ese dato.

Por ejemplo, de la Tabla 2 se deduce que un 16% de las personas encuestadas visita el centro recreativo una vez por semana, mientras que un 24% lo visita cuatro veces por semana.

Ten en cuenta

En estadística, una **población** es el conjunto de todos los elementos sobre el que se hace un estudio estadístico y una **muestra** es un subconjunto de la población.

CULTURA del Buen Vivir

La prudencia

El análisis de datos a partir de las gráficas estadísticas permite tomar decisiones justas y adecuadas. Esto demuestra prudencia de nuestra parte frente a esas decisiones o acciones.

- ¿En qué tipo de situaciones consideras prudente realizar un estudio estadístico y analizar los resultados?

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Incluya experiencias manipulativas, con materiales y recursos diversos que se encuentran habitualmente en las aulas o son fáciles de conseguir.
- Propongas a los estudiantes actividades que sean un reto para sus estrategias de conteo y que los lleven a la necesidad del tarjado de los datos. Ejemplo: Se quiere saber de forma rápida cuántas naranjas están en un montón grande en el suelo. Respuesta: Si se divide el grupo en equipos, y cada equipo separa las naranjas en montones pequeños de una misma cantidad, al final tendrán que multiplicar la cantidad de montones por la cantidad de naranjas de dichos montones. Todos los equipos tendrán que ponerse de acuerdo para hacer los montones de naranjas de una misma cantidad y tratar siempre de que se hagan de números fáciles de multiplicar. Ese es el procedimiento que se podrá emplear para las actividades colaborativas que se propondrán.

■ Actividades colaborativas

Propóngales a los estudiantes realizar un estudio estadístico sobre el sabor de helado favorito de los compañeros de clase, entre los sabores de vainilla, fresa, chocolate y almendra. Para ello pídeles que recolecten los datos de 10 de sus compañeros, y que organicen los resultados en una tabla que permita clasificar y resumir la información para luego presentar un informe con los resultados.

Comunicación

2. a. Cuantitativa discreta
b. Cuantitativa continua.
c. Cualitativa.
d. Cuantitativa continua.
e. Cuantitativa discreta
f. Cuantitativa discreta

3. Cualitativas c, d, g, m, p;
Variables discretas b, e, h, i, k,
Variables continuas a, f, j, l, n,

Razonamiento

4.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas
Fútbol	240	$\frac{240}{600} = 0,4$	240
Baloncesto	108	$\frac{108}{600} = 0,18$	348
Natación	72	$\frac{72}{600} = 0,12$	420
Ciclismo	156	$\frac{156}{600} = 0,26$	576
Atletismo	24	$\frac{24}{600} = 0,04$	600

Ejercitación

5. Verificar Validez de la respuesta.

6.

Resultado	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
Cara	11	$\frac{11}{20} = 0,55$
Sello	9	$\frac{9}{20} = 0,45$

7. a.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1	2	2
2	5	7
3	3	10
4	4	14

b.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	40	0,4
2	10	0,1
3	25	0,25
4	25	0,25

1

Variables, datos y frecuencias

Comunicación

2. Clasifica cada variable estadística en cualitativa o cuantitativa. En caso de ser cuantitativa, indica si es discreta o continua.

- a. Número de estudiantes aprobados en un curso
- b. Peso de los recién nacidos en un hospital
- c. Color favorito de un grupo de compradores de un almacén de ropa
- d. Peso de los melones de una frutería
- e. Cantidad de libros leídos en un año por cada uno de los estudiantes de un colegio
- f. Número de pétalos de una flor

3. Copia en tu cuaderno la Tabla 4 y ubica en ella cada una de las siguientes variables estadísticas, según sea su clasificación.

Variables estadísticas		
Cualitativas	Cuantitativas	
	Variables discretas	Variables continuas

Tabla 4

- a. Peso que transporta un camión
- b. Número de pulsaciones por minuto
- c. Profesión
- d. Color de los ojos
- e. Número de los estudiantes de un curso
- f. Perímetro craneal
- g. Estado civil
- h. Edad
- i. Cantidad de empleados de una empresa
- j. Longitud de la palma de una mano
- k. Número de libros vendidos en una librería
- l. Distancia de una ciudad a otra
- m. Sexo de los recién nacidos en un hospital
- n. Temperaturas mínimas registradas en una ciudad
- o. Número de veces que una familia va al cine al año
- p. Género de película favorito

Razonamiento

4. Halla las frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas correspondientes a cada deporte, si se sabe que de 600 jóvenes que asisten a un polideportivo, el 40% juega fútbol, el 18% practica baloncesto, el 12% opta por la natación, el 26% se dedica al ciclismo y el resto, hace aeróbicos.

Ejercitación

5. Elabora una tabla de frecuencias para cada conjunto de datos.

- a. Las edades de los miembros de una compañía de teatro juvenil:

15 17 14 19 17 16 13 12 15 16 13
12 19 13 12 18 17 16 15 14 13 12

- b. La estatura, en centímetros, de los integrantes de un equipo de baloncesto:

175 177 178 179 185 184
175 178 178 179 181 190

6. Halla la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los resultados que se obtienen al lanzar al aire una moneda 20 veces, a partir de los datos consignados en la Tabla 5.

Lanzamiento	Resultado	Lanzamiento	Resultado
1	Cara	11	Cara
2	Sello	12	Cara
3	Cara	13	Sello
4	Cara	14	Cara
5	Sello	15	Sello
6	Cara	16	Sello
7	Cara	17	Cara
8	Cara	18	Cara
9	Sello	19	Sello
10	Sello	20	Sello

Tabla 5

7. Completa cada tabla de frecuencias.

- a.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1		
2	5	7
3	3	
4		14

Tabla 6

- b.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	40	
2		0,1
3		0,25
4		0,25

Tabla 7

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destaca con criterios de desempeño: Organizar datos agrupados y no agrupados, procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

Razonamiento

8. Analiza la veracidad de la afirmación: "La frecuencia absoluta de un dato en un estudio estadístico puede ser igual a su frecuencia relativa".

Resolución de problemas

9. Lanza cincuenta veces un dado de seis caras.

a. Registra los resultados de cada lanzamiento.

b. Realiza una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los resultados.

10. En una encuesta realizada en los veinte apartamentos de un conjunto residencial, se preguntó acerca del número de habitantes en cada uno, la cantidad de mascotas y el número de carros que poseían. Las respuestas se registraron en la Tabla 8.

Apto.	Número de habitantes	Número de mascotas	Número de carros
101	4	1	1
102	4	0	1
201	3	0	2
202	1	1	1
301	1	1	0
302	4	0	1
401	3	0	1
402	2	0	2
501	2	0	1
502	4	1	2
601	5	0	1
602	3	0	0
701	3	0	0
702	2	0	1
801	4	1	1
802	3	0	1
901	2	0	0
902	3	1	0
1001	3	0	2
1002	2	2	2

Tabla 8

a. ¿Cuáles y de qué tipo fueron las variables estadísticas consideradas en la encuesta?

b. ¿Cuántas personas viven en el conjunto residencial?

c. ¿Qué porcentaje de familias tiene solamente un carro?

d. ¿Qué porcentaje de familias no tiene mascota?

11. Los siguientes datos corresponden a la temperatura mínima (en grados Celsius) registrada durante el mes de febrero en una ciudad.

12	11	10	11	10	9	8
10	11	9	9	12	11	10
9	5	3	7	7	8	5
6	8	6	10	10	12	8

a. Organiza la información en una tabla de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

b. ¿Cuál fue la temperatura mínima registrada en febrero?

c. ¿Cuántos días de ese mes la temperatura fue por lo menos de 8°C?

d. ¿Qué porcentaje de los días de febrero la temperatura fue de 6°C?

e. Comprueba que la suma de las frecuencias absolutas es igual al número de datos y que la suma de las frecuencias relativas es igual a 1.

12. Los resultados de una encuesta realizada a diez estudiantes se muestran en la tabla de la Figura 1.

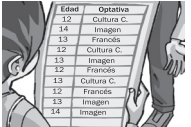


Figura 1

Alberro ha completado la tabla de doble entrada (Tabla 9) con los datos de la encuesta. Sofía, solo con mirar una casilla de esa tabla, asegura que está mal elaborada. Explica por qué Sofía dice eso y corrige la tabla.

Edad	Materia optativa			Total
	Cultura C	Imagen	Francés	
12	2	1	1	4
13	1	2	2	5
14	0	2	0	2
Total	3	5	3	11

Tabla 9

13. Los estudiantes de un centro escolar visitan un jardín botánico y tienen que tomar tres clases de datos que correspondan a variables cualitativas, variables cuantitativas discretas y variables cuantitativas continuas. ¿Cuáles datos pueden considerarse en cada caso?

Razonamiento

8. Es verdadero solamente cuando hay un dato. Cuando hay más de un dato la frecuencia absoluta es un número mayor o igual a 1 y la frecuencia relativa es un número menor que uno, en consecuencia la frecuencia absoluta será mayor que la frecuencia relativa.

Resolución de problemas

9. Múltiples respuestas. Estas varían dependiendo de los resultados obtenidos por cada estudiante al lanzar el dado.
10. a. Número de habitantes del apartamento, número de mascotas del apartamento y número de carros. Las tres variables son cuantitativas discretas.
- b. 58 personas c. 50% d. 65%

11. a.

Temperatura	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas
3	1	$\frac{1}{28} = 0,035$	1
5	2	$\frac{2}{28} = 0,071$	3
6	2	$\frac{2}{28} = 0,071$	5
7	2	$\frac{2}{28} = 0,071$	7
8	4	$\frac{4}{28} = 0,142$	11
9	4	$\frac{4}{28} = 0,142$	15
10	6	$\frac{6}{28} = 0,214$	21
11	4	$\frac{4}{28} = 0,142$	25
12	3	$\frac{3}{28} = 0,107$	28
Total	28	1	

b. 3° C

c. 21 días

d. 7,1%

12. Sofía dice eso porque el total de estudiantes debe ser 10 y en la tabla aparece 11. La corrección de la tabla es:

13. Cualitativa: Especies de plantas.

Cuantitativa discreta: Cantidad de plantas de una especie.

Cuantitativa continua: tamaño de las plantas.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

La Estadística es la ciencia de la sistematización, recogida, ordenamiento y presentación de los datos referidos a conjuntos lo más numerosos posible y ocurridos en diferentes instantes de tiempo, relativos a un fenómeno que presenta variabilidad o incertidumbre para su estudio metódico, con objeto de deducir las leyes que rigen esos fenómenos, y poder de esa forma arribar a conclusiones válidas y tomar decisiones razonables sobre las mismas.

Para el trabajo con datos agrupados en clases de frecuencias es importante considerar que:

- Las clases deben ser exhaustivas y mutuamente excluyentes.
- El número de clases no puede ser muy pequeño ni excesivamente grande. Cuando el número de clases es pequeño se puede producir concentración de los datos, y dispersión cuando es muy grande.
- Deben evitarse las clases de frecuencia nula.
- Deben tener la misma amplitud (siempre que sea posible).
- La marca de clase (punto medio) debe calcularse con facilidad.

Recomendaciones para desarrollar la lección

Introduzca el tema con un ejercicio en el que se muestre la conveniencia de organizar los datos en clases, y definir el número de observaciones de la variable que pertenecen a cada una de ellas, para describir una cantidad grande de datos. Ejemplo: Se necesita organizar y procesar la información correspondiente al número de goles que anotaron 100 jugadores que participaron en un campeonato.

2

Datos agrupados

Explora

En una biblioteca se van a reubicar los libros en cinco estantes, de manera que los más pesados se ubiquen en los estantes inferiores y los más livianos en la parte superior.

Carlos, el encargado, debe presentar un reporte que permita conocer la cantidad de libros que hay en la biblioteca de acuerdo con su peso.

- ¿Cómo puede presentar el reporte?

Ten en cuenta

Cada uno de los intervalos en los que se agrupan los datos incluye el extremo izquierdo pero no el derecho. Por ejemplo, el intervalo $[9, 11)$ indica que este incluye el valor 9 pero no el valor 11.

Ten en cuenta

El número de clases en las que se pueden agrupar los datos es variable, pero existe un criterio que aconseja hacer un número de clases aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de datos.

Para presentar el reporte, Carlos puede realizar una tabla como la 1 en la cual agrupe los libros de acuerdo con su peso en intervalos disjuntos de igual amplitud.

Peso de los libros (en gramos)	Número de libros
$[100, 200)$	40
$[200, 300)$	65
$[300, 400)$	45
$[400, 500)$	35
$[500, 600)$	35
$[600, 700)$	38

Tabla 1



De la tabla se puede inferir que hay 258 libros en la biblioteca, que los más livianos pesan entre 100 g y 200 g, y los más pesados entre 600 g y 700 g.

Si una variable estadística es cuantitativa continua o cuantitativa discreta con un número grande de datos, conviene agrupar dichos datos en **intervalos** o **clases** que tengan la misma **amplitud**, es decir la misma cantidad de números en cada intervalo.

En cada intervalo se toma un valor representativo llamado **marca de clase**, que corresponde al valor medio del intervalo. Para hallar la marca de clase, se suman los extremos del intervalo y se divide el resultado entre dos.

Ejemplo 1

A cuarenta estudiantes se les solicitó medir el tiempo (en minutos) que navegaron por internet durante un fin de semana. Los resultados obtenidos ordenados de forma ascendente son:

0	15	20	35	35	38	40	45
45	45	50	55	58	65	65	70
72	90	95	100	100	110	110	110
120	125	125	130	130	130	150	160
170	175	180	185	190	195	200	220

Para resumir la información y organizarla en una tabla de frecuencias, se pueden agrupar los datos en seis intervalos, cada uno de amplitud 40 min, y hallar su frecuencia.

A partir del conteo de los datos que pertenecen a cada intervalo, se obtiene la Tabla 2 de frecuencias absolutas.

Tiempo (en minutos)	Marca de clase	Frecuencia absoluta
$[0, 40)$	20	6
$[40, 80)$	60	11
$[80, 120)$	100	7
$[120, 160)$	140	7
$[160, 200)$	180	7
$[200, 240)$	220	2

Tabla 2

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño:

Organizar datos agrupados en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada para analizar el significado de los datos.

Ejemplo 2

Las notas de cincuenta estudiantes de octavo EGB en una prueba de matemáticas se registran de la siguiente manera:

6,8	7,8	5,8	7,9	8,0	10,0	7,5	8,0	6,5	3,3
7,0	3,5	7,0	9,0	5,6	1,5	2,8	4,7	7,5	4,5
7,8	2,8	8,0	8,0	8,0	4,0	7,0	5,5	3,0	8,0
9,3	9,4	3,5	4,6	5,7	7,5	9,5	9,2	3,8	4,9
9,6	8,8	8,9	7,9	5,5	10,0	8,5	9,3	8,4	9,5

La Tabla 3 muestra las notas agrupadas en intervalos de amplitud 1,5, las frecuencias y las marcas de clase.

Nota	Marca de clase	f_i	h_i	$h_i(\%)$	F_i	H_i	$H_i(\%)$
[1,5; 3)	2,25	3	0,06	6	3	0,06	6
[3; 4,5)	3,75	6	0,12	12	9	0,18	18
[4,5; 6)	5,25	9	0,18	18	18	0,36	36
[6; 7,5)	6,75	5	0,1	10	23	0,46	46
[7,5; 9)	8,25	17	0,34	34	40	0,8	80
[9; 10,5)	9,75	10	0,2	20	50	1	100
		$N = 50$	1	100			

Tabla 3

Actividades resueltas

Ejercitación

- Halla la marca de clase del segundo y del sexto intervalo de la Tabla 4, que muestra una distribución de frecuencias de los salarios semanales (en dólares) de 63 empleados de una compañía.

Solución:

Salario (\$)	Número de empleados
[50, 70)	8
[70, 90)	10
[90, 110)	16
[110, 130)	14
[130, 150)	10
[150, 170)	5

Tabla 4

La marca de clase se halla dividiendo la suma de los extremos de los intervalos entre 2.

El segundo intervalo es [70, 90)

$$\frac{70 + 90}{2} = 80$$

El sexto intervalo es [150, 170)

$$\frac{150 + 170}{2} = 160$$

- Haz una tabla estadística agrupando en tres clases los datos correspondientes a los tiempos que tardan diez niños en lavarse los dientes.

1 min 30 s 2 min 45 s 3 min 30 s 1 min 20 s 1 min 30 s
0 min 45 s 3 min 00 s 3 min 15 s 1 min 45 s 2 min 35 s

Solución:

Tiempo	Marca de clase	f_i	h_i	$h_i(\%)$	F_i	H_i	$H_i(\%)$
[0:45; 1:43)	1:14	4	0,4	40	4	0,4	40
[1:43; 2:41)	2:12	2	0,2	20	6	0,6	60
[2:41; 3:39)	3:10	4	0,4	40	10	1	100

En esta situación la amplitud de cada intervalo es 58 s.

Tabla 5

Ten en cuenta

En una tabla estadística usualmente la frecuencia absoluta se nota f_i , la frecuencia relativa h_i , la frecuencia absoluta acumulada F_i y la frecuencia relativa acumulada H_i .

CULTURA del Buen Vivir

La prudencia

Es una virtud según la cual es posible reflexionar sobre las consecuencias de lo que se haga o se diga en cualquier circunstancia.

- ¿Qué beneficios crees que trae consigo ser prudente?

App

Gráficas estadísticas

Abre la aplicación 3D Gráficos y construye diferentes gráficos estadísticos en 3D.



■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Solicítele a los estudiantes que realicen el tarjado de los datos para que puedan realizar estrategias de conteo que optimice el trabajo con los datos primarios para su organización en clases.
- Plantee actividades en las que se muestre la utilidad de la frecuencia relativa para la comparación y determinación de orden de preferencias en dos muestras, fundamentalmente si estas tienen tamaños diferentes.
- Haga una valoración sobre la necesidad de una actitud prudente en la utilización de la estadística para la toma de decisiones razonables. Refuerce la idea de la prudencia como el valor correspondiente a la unidad, en virtud de actuar de forma justa, adecuada y con cautela.

■ Actividades colaborativas

Pídales a los estudiantes que recolecten envases y que los traigan a la clase. Organice a los estudiantes en pequeños grupos de manera que haya suficientes envases en cada grupo para recopilar información de frecuencias sobre ellos y organizar los datos agrupados en clases. Puede solicitarles que peguen a los envases con cinta adhesiva o algo similar una etiqueta con alguna o varias características para clasificarlos y construir tablas que ejemplifiquen el concepto de frecuencia absoluta para su comprensión, así como el concepto de número total de datos.

Ejercitación

3. Verificar validez de la respuesta.

4.

Ahorro (en dólares)	Número de familias	Número de familias
[0, 600)	39	39
[600, 1200)	15	15
[1200, 1800)	25	25
[1800, 2400)	11	11
[2400, 3000)	10	10

5.

Intervalo de clase	x_i	f_i	h_i	F_i
[0, 10)	5	6	0,2	6
[10, 20)	15	4	0,133	10
[20, 30)	25	7	0,233	17
[30, 40)	35	5	0,166	22
[40, 50)	45	3	0,1	25
[50, 60)	55	5	0,166	30

Comunicación

6. Porque no se cumple $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f_n$.

7. a. Sí b. Sí
c. No d. No
e. Sí

8.

Salario (en dólares)	Marca de clase	Número de empleados
[70, 120)	95	9
[120, 170)	145	5
[170, 220)	195	2
[220, 270)	245	0
[270, 320)	295	2
[320, 370)	345	1
[370, 420)	395	1

- a. La amplitud de cada intervalo es 50.
b. 2 c. El 80% d. El 20%

Razonamiento

9.

Intervalo	Marca de clase	f_i	F_i
[2, 7)	4,5	4	4
[7, 12)	9,5	3	7
[12, 17)	14,5	2	9
[17, 22)	19,5	1	10

2

Datos agrupados

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3. Haz una tabla estadística para cada conjunto de datos. Usa intervalos con la amplitud indicada.

a. Intervalos de amplitud 2.

10	11	12,2	13,5	9,5	13,2
11,3	12,3	9	14,2	15	11,3
13,6	15,4	10,2	16,4	15,3	12,3

b. Intervalos de amplitud 25.

90	120	122	95	145	75	66	207	45	77
148	69	110	180	88	90	95	110	85	125

4. Halla la marca de clase de los intervalos de la Tabla 6 en los que se agruparon los datos recogidos sobre el ahorro de 100 familias a lo largo de un año.

Ahorro (en dólares)	Número de familias
[0, 600)	39
[600, 1200)	15
[1200, 1800)	25
[1800, 2400)	11
[2400, 3000)	10

Comunicación

5. Completa la Tabla 7.

Intervalo de clase	x_i	f_i	h_i	F_i
[0, 10)	5	6		6
[10, 20)	15	4		
[20, 30)	25	7		17
[30, 40)	35	5		
[40, 50)	45	3		
[50, 60)	55	5		

6. Explica por qué las tablas 8 y 9 no representan las frecuencias acumuladas de un conjunto de datos.

Intervalo	f_i
[0, 5)	3
[5, 10)	4
[10, 14)	5
[14, 19)	6
[19, 24)	1

Tabla 8

Intervalo I	f_i
[0, 5)	1
[5, 10)	2
[10, 15)	4
[15, 20)	2
[20, 25)	3

Tabla 9

7. Determina si a partir de la información de la Tabla 10 se pueden deducir las conclusiones que se muestran abajo.

Intervalo	Marca de clase	f_i
[100, 150)	125	2
[150, 200)	175	3
[200, 250)	225	4
[250, 300)	275	2
[300, 350)	325	4

Tabla 10

- a. El número total de datos es 15.
b. El 350 no pertenece al conjunto de datos.
c. La frecuencia de 225 es 4.
d. 125, 175, 225, 275 y 325 son datos del conjunto.
e. Nueve datos son menores que 250.

Razonamiento

8. Observa la Tabla 11, que agrupa mediante intervalos los salarios semanales de los veinte empleados de una microempresa. Complétala y, luego, contesta las preguntas.

Salario (en dólares)	Marca de clase	Número de empleados
[70, 120)		9
[120, 170)		5
[170, 220)		2
[220, 270)		0
[270, 320)		2
[320, 370)		1
[370, 420)		1

Tabla 11

- a. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?
b. ¿Cuántos empleados ganan \$ 320 o más?
c. ¿Qué porcentaje de ellos gana menos de \$ 250?
d. ¿Qué porcentaje de empleados gana más de \$ 250?

9. Completa la Tabla 12.

Intervalo	Marca de clase	f_i	F_i
[2, 7)		4	
[7, 12)		3	
[12, 17)		2	
[17, 22)		1	10

Tabla 12

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Organizar datos agrupados en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada para analizar el significado de los datos.

Resolución de problemas

- 10 En un parqueadero se registra el tiempo de permanencia (en minutos) de 60 autos, así:

15 450 18 20 25 27 30 32 320 34
36 36 40 135 40 45 142 55 58 60
65 68 136 71 72 73 73 148 75 80
81 82 85 96 98 105 110 112 120 126
127 130 69 140 40 145 50 74 148 220
250 34 330 350 360 370 420 425 430 18



- a. Elabora una tabla estadística para estos datos agrupándolos en ocho intervalos.
b. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?
c. ¿Es posible determinar qué porcentaje de los autos permanecen menos de una, dos, tres o cuatro horas en el parqueadero?

- 11 En una vía en la que la máxima velocidad permitida es 80 km/h, se midió la rapidez de veinte autos que transitaron de 9:00 p. m. a 10:00 p. m. Los datos obtenidos se consignaron en la Tabla 13.

Velocidad (km/h)	Número de autos
[60, 70)	4
[70, 80)	14
[80, 90)	1
[90, 100)	1

Tabla 13

- a. Halla la marca de clase para cada intervalo.
b. ¿Es posible determinar el número de autos que superaron el límite de velocidad permitido? En caso afirmativo, ¿cuál es el porcentaje correspondiente?
c. ¿Qué porcentaje de autos transitaba a una velocidad inferior a 70 km/h?

- 12 Las alturas, en centímetros, de veinte plantas de una determinada especie son:

6,1 5,3 6,2 5,6 4,8 4,9 5,2 5,6 6,1 6,2
5,9 5,8 5,7 5,1 4,9 5,2 5,3 6,1 5,9 5,8

Elabora una tabla estadística para estos datos, agrupándolos en siete intervalos, y halla la marca de clase de cada uno.

- 13 Los pesos de 60 personas dados en kilogramos son:

66 65 59 82 64 55 76 64 67 71 48 52
65 69 80 58 65 70 67 73 71 60 72 79
68 71 82 55 63 70 65 52 64 61 68 62
65 72 56 61 72 66 62 64 69 65 74 60
62 62 74 60 69 65 63 71 62 72 78 51

Elabora una tabla estadística para estos datos, agrupándolos en clases de amplitud 5 y halla la marca de clase de cada uno.

- 14 En la Tabla 14 se registra la edad de los pacientes que asisten a un consultorio médico en una semana.

Edad (en años)	Número de pacientes
[20, 30)	2
[30, 40)	4
[40, 50)	14
[50, 60)	17
[60, 70)	5
[70, 80)	6
[80, 90)	2

Tabla 14

- a. Halla la marca de clase de cada intervalo.
b. ¿Cuántos pacientes asisten en una semana al consultorio médico?
c. ¿Qué porcentaje de pacientes son menores de 50 años?

- 15 Se realiza una encuesta a los alumnos de tres cursos de séptimo grado acerca del tiempo que tardan en tender la cama. Los resultados se registran en la Tabla 15.

Duración (minutos)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)
Número de alumnos	11	0	25	28	4

Tabla 15

- a. ¿Hay algún estudiante que tarde seis minutos en tender la cama? ¿Y un minuto? Explica tus respuestas.
b. ¿Qué porcentaje de estudiantes tarda al menos cuatro minutos en tender la cama?
c. ¿Qué porcentaje tarda mínimo dos minutos en tenderla?
d. ¿Es posible determinar el número de estudiantes que tardan exactamente dos minutos en tender la cama?

Resolución de problemas

10. a. Verificar validez

b. La amplitud de cada intervalo es 55.

c. Para una, dos y cuatro horas no es posible determinar el porcentaje de los autos que permanecen en el parqueadero. El 81,6% de autos permanecen tres horas en el parqueadero.

11. a. Verificar validez

b. No, se necesita conocer la velocidad del auto que se ubicó en la clase [80, 90). Si dicha velocidad fuera 80 km/h el porcentaje de autos que excedió el límite sería 5%, pero si esa velocidad fuera superior a 80 km/h, el porcentaje sería 10%.

c. 20 %

12. Verificar validez

13. Verificar validez

14. a. Verificar validez

b. 50 pacientes

c. 40%

15. a. Ningún estudiante tarda seis minutos en tender la cama y no es posible determinar cuántos tardan exactamente un minuto.

b. 47,05%

c. 83,82%

d. Sí, ninguno.

Ampliación conceptual

Un gráfico es la representación de los datos estadísticos por medio de puntos, líneas, rectángulos u otras figuras cuyas dimensiones tienen que ser proporcionales a la magnitud de los datos presentados.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Centre la motivación por el estudio de las gráficas en la necesidad, utilidad, facilidad, completitud, así como en la búsqueda de relaciones y dependencias en la representación y análisis de la información.
- Resalte la ventaja de que los gráficos estadísticos permiten apreciar más rápidamente el comportamiento de los datos.
- Tenga mucho cuidado en la elaboración de gráficos estadísticos pues es fundamental la precisión, la claridad en los títulos, la elección del tipo de gráfico y el uso de escalas adecuadas. Si uno de estos aspectos no se tiene en cuenta, el gráfico puede dar una idea inadecuada de la información que se trata de comunicar.
- Realice la comparación de información representada en diferentes gráficas para reforzar la necesidad de utilizar la gráfica en función del tipo de estudio o información.
- Discuta la conveniencia de la utilización de cada tipo de gráfica en función del problema que se estudia y en consecuencia, del tipo de variable que se está analizando.
- Apóyese en EXCEL para la construcción de tablas y de los distintos tipos de gráficos, aunque un gran número de paquetes estadísticos está ahora disponible.

Gráficas estadísticas

Explora

En Tercero de BGU se realiza una encuesta sobre el destino preferido para realizar la excursión de fin de año. Los datos obtenidos se organizan en la Tabla 1.

Posibles destinos de excursión	Votos
Mompiche	5
Santa Elena	9
Cuenca	7
Puyo	10
Machala	4

Tabla 1

- Si se quieren mostrar los resultados a los padres de familia de una forma clara y fácil de entender, ¿cuál es la manera más práctica de hacerlo?

Deporte	f_i	h_i
Fútbol	43	0,339
Atletismo	27	0,212
Baloncesto	14	0,110
Natación	31	0,244
Ciclismo	12	0,094

Tabla 2



Figura 2

TECNOLOGÍAS
de la información y la comunicación

http://www.vitutor.com/estadistica/descriptiva/a_4_e.html
Obtén más información acerca de estadística descriptiva.

3.1 Gráficas estadísticas para datos no agrupados

La información que se recogió en la encuesta puede representarse con una gráfica de barras rectangulares, cuyas longitudes sean proporcionales a los datos recolectados o frecuencias absolutas. La gráfica de la Figura 1 comunica de manera efectiva los resultados de la encuesta.

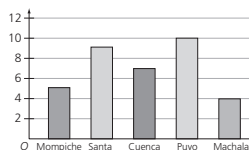


Figura 1

Un **diagrama de barras** se utiliza para presentar datos cualitativos o datos cuantitativos de tipo discreto. En el eje horizontal se ubican las variables y en el eje vertical, las frecuencias.

Para representar datos de variables cualitativas o cuantitativas discretas también es útil el uso de **diagramas circulares**. Este tipo de diagramas distribuye la superficie de un círculo en sectores de amplitud proporcional a la **frecuencia relativa** de cada dato.

Ejemplo 1

En la Tabla 2 se muestran los datos obtenidos sobre las preferencias deportivas de un grupo de 127 estudiantes. Para calcular la amplitud del ángulo central que le corresponde a cada dato en un diagrama circular, se multiplica cada frecuencia relativa (h_i) por 360° (como se observa en la cuarta columna de la Tabla 3). La Figura 2 presenta el diagrama circular correspondiente al estudio.

Deporte	f_i	h_i	Medida del ángulo central
Fútbol	43	0,339	$0,339 \cdot 360^\circ = 122^\circ$
Atletismo	27	0,212	$0,212 \cdot 360^\circ = 76^\circ$
Baloncesto	14	0,110	$0,110 \cdot 360^\circ = 40^\circ$
Natación	31	0,244	$0,244 \cdot 360^\circ = 88^\circ$
Ciclismo	12	0,094	$0,094 \cdot 360^\circ = 34^\circ$

Tabla 3

Los **gráficos** o **diagramas de líneas** muestran un conjunto de puntos conectados mediante una sola línea. Estos gráficos se usan principalmente para mostrar las variaciones de una o más variables estadísticas con respecto al cambio de otra variable, comúnmente el tiempo.

Ejemplo 2

La Tabla 4 presenta la variación del número de estudiantes matriculados en los primeros grados de un colegio desde 1995 hasta 2011, y la Figura 3 muestra el diagrama de líneas correspondiente.

	1.º	2.º	3.º
1995	5	15	28
1999	7	17	18
2003	7	31	50
2007	14	21	13
2011	24	25	35

Tabla 4

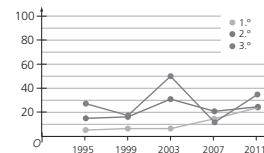


Figura 3

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destrezas con criterios de desempeño: Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada y representarlos gráficamente con ayuda de las TICs.
Representar de manera gráfica, con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular, en función de analizar datos.

3.2 Gráficas estadísticas para datos agrupados

Para hacer la representación gráfica de datos agrupados en clases, se utilizan los **histogramas** y los **polígonos de frecuencias**.

Para construir un histograma se siguen estos pasos.

1. Se dibujan los extremos de las clases sobre el eje de abscisas.
2. Se construyen rectángulos cuyas bases son la amplitud del intervalo. Si son todas iguales, las alturas son proporcionales a las frecuencias absolutas.

Un **polígono de frecuencias** se forma uniendo los puntos medios de las barras de un histograma en su parte superior mediante segmentos.

Actividad resuelta

Ejercitación

- 1 Haz un histograma y el polígono de frecuencias con los datos recogidos en la Tabla 5 correspondientes a la estatura de los 30 estudiantes de un curso.

Estatura (cm)	Número de estudiantes
[149, 156)	7
[156, 163)	10
[163, 170)	8
[170, 177)	5

Tabla 5

Solución:

En la Figura 4 se encuentran el histograma y el polígono de frecuencias.

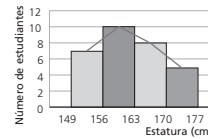


Figura 4

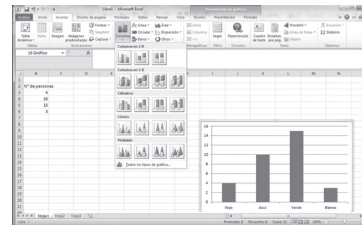
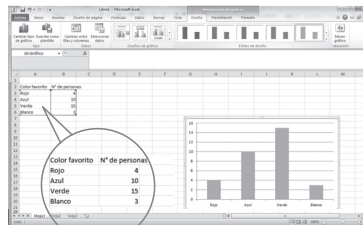
Matemáticas

Construye gráficos estadísticos con Excel

Para crear un **diagrama de barras** en Excel de una variable cualitativa, primero se deben digitar los datos en una tabla y luego, se sigue el procedimiento descrito a continuación.

- Selecciona los datos de la tabla, ve a la pestaña **Insertar** y dentro del grupo **Gráficos** haz clic en el icono y luego en la opción **Columna agrupada**. En Excel se muestra el diagrama de barras correspondiente.

- Para cambiar el color de las barras o el estilo del gráfico, selecciona el gráfico; en la parte superior se despliegan diferentes opciones para hacer los cambios que se deseen, e incluso, puedes cambiar el tipo de gráfico.



■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Propóngales a los estudiantes actividades en las que se refuerce la idea de que en un histograma es el área de cada rectángulo la que es igual a la frecuencia absoluta (o relativa) de la clase correspondiente, a diferencia de las gráficas de barras en las que la altura es la que es proporcional a la frecuencia.
2. Dirija el tratamiento también a la previsión de errores y su consideración en el proceso. Ejemplo: presente actividades en las que se evidencien las diferencias entre el histograma y los gráficos de barras, aunque muestre también cuando el ancho (rango) del intervalo de clase es una unidad.
3. Planteeles a los estudiantes la valoración de grandes matemáticos que tuvieron su influencia en la idea de las gráficas estadísticas para propiciar variadas experiencias en relación con la evolución cultural, histórica y científica del tema.

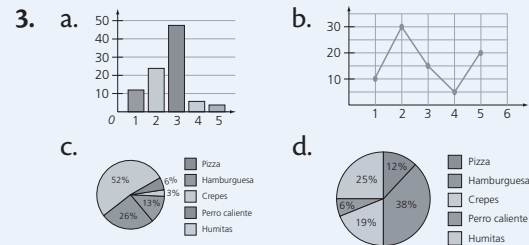
■ Actividades colaborativas

Organiza a los estudiantes en pequeños grupos de trabajo, de cuatro a cinco integrantes, que se encargarán de recopilar recortes de periódicos, revistas, fotografías de documentos en internet u otras fuentes de información, en las que se empleen gráficas, sin importar el idioma en que se publiquen, para mostrar que lo utilizan ingenieros, arquitectos, físicos, matemáticos, técnicos, médicos y muchos más. Refuerce la idea de la universalidad del lenguaje de las gráficas y su utilidad.

Razonamiento

2. Respuesta abierta

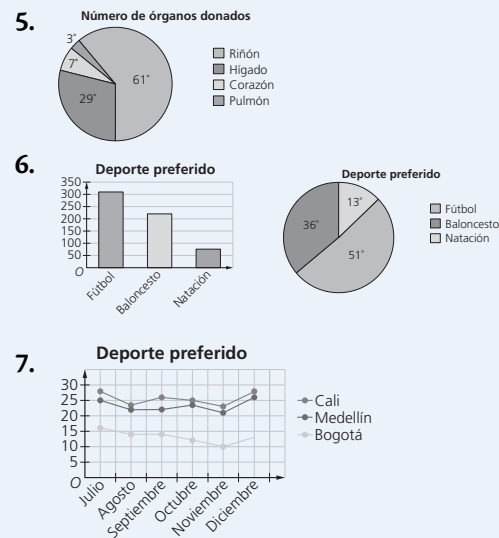
Comunicación



Razonamiento

4. a. F b. F c. V d. V e. F

Modelación



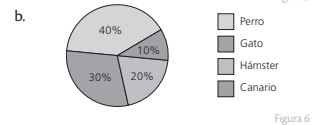
3

Gráficas estadísticas

Desarrolla tus destrezas

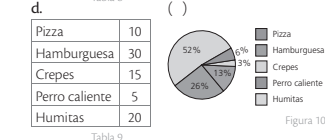
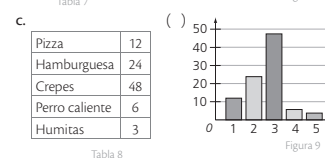
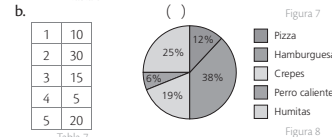
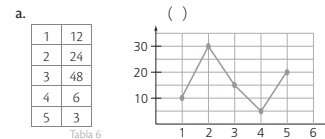
Razonamiento

2. Escribe tres conclusiones que puedas obtener a partir de los gráficos de las Figuras 5 y 6.



Comunicación

3. Relaciona cada tabla con la representación gráfica que le corresponde.



Razonamiento

4. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
- Un conjunto de datos cualitativos se puede representar mediante un histograma. ()
 - En un diagrama circular se pueden representar solo datos cualitativos. ()
 - Un polígono de frecuencias se utiliza para representar datos cuantitativos. ()
 - Un histograma y un diagrama de barras representan un conjunto de datos mediante rectángulos. ()
 - El diagrama más apropiado para representar el cambio de una variable a través del tiempo es un histograma. ()

Modelación

5. Representa en un diagrama circular los datos que se muestran en la Tabla 10, que corresponden al número de órganos donados en un país durante el año 2010.

Órgano	Número de órganos donados
Riñón	2 794
Hígado	1 302
Corazón	324
Pulmón	157

Tabla 10

6. Representa mediante un diagrama de barras y un diagrama circular la información registrada en la Tabla 11 sobre el deporte preferido de un grupo de estudiantes.

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Natación
Alumnos	305	215	80

Tabla 11

7. Elabora un diagrama de líneas con las temperaturas promedio de los últimos seis meses del año 2014 en Quito, Cuenca y Latacunga que se registran en la Tabla 12.

	Quito	Cuenca	Latacunga
Julio	28° C	25° C	16° C
Agosto	23° C	22° C	14° C
Septiembre	26° C	22° C	14° C
Octubre	25° C	24° C	12° C
Noviembre	23° C	21° C	10° C
Diciembre	28° C	26° C	13° C

Tabla 12

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño:

Representar de manera gráfica con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular en función de analizar datos.

Ejercitación

8. Lee y resuelve.

- Se realizó una encuesta en un jardín infantil para conocer el tipo de postre preferido por los niños y las niñas. En la Tabla 13 se registraron los datos.

Postres	Número de niños
Chocolatina	20
Gelatina	15
Arroz de leche	12
Galletas rellenas	18
Helado	25
Donas	10

Tabla 13

Representa en un diagrama circular y en un diagrama de barras la anterior información.

Comunicación

- Elige una de las preguntas, aplica una encuesta a tus compañeros de curso y prepara una exposición con los resultados.

¿Cuál es tu pasatiempo favorito?

¿Cuál es tu peso?

¿Cuántos hermanos tienes?

- Construye un gráfico circular para mostrar la siguiente información.

Nuestro sistema solar tiene ocho planetas, de los cuales cuatro son de tipo rocoso, es decir, están formados por roca y metal: Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Los otros cuatro planetas son de tipo gaseoso, lo que significa que están compuestos por gases muy densos en su atmósfera. A este último tipo corresponden: Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

- Lanza un dado veinte veces, completa una tabla en la que muestres cuántas veces salió cada número y elabora el diagrama de barras de tus resultados en la Figura 11.

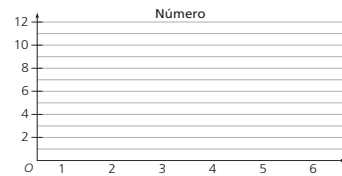


Figura 11

Comunicación

- Observa las figuras 12 y 13, que muestran las temperaturas promedio en dos ciudades de Ecuador en una semana. Luego, responde.

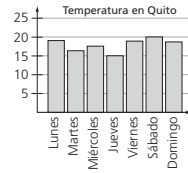


Figura 12

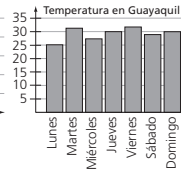


Figura 13

- ¿Cuál fue la temperatura máxima en la ciudad de Quito? ¿Qué día se presentó?
- ¿Cuál fue la temperatura mínima en las dos ciudades?
- ¿Entre qué valores se encuentra la temperatura en Guayaquil durante la semana en la que se tomaron los datos?
- ¿Cuál es la temperatura más frecuente en cada una de las ciudades?

- Haz un histograma y el polígono de frecuencias con los datos de la Tabla 14.

Intervalo	Frecuencias absolutas
[10, 20)	7
[20, 30)	20
[30, 40)	15
[40, 50)	8

Tabla 14

Resolución de problemas

- Completa la Tabla 15 con los datos del diagrama circular de la Figura 14. Ten en cuenta que el total de las personas encuestadas es 200.

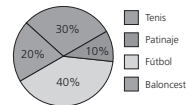


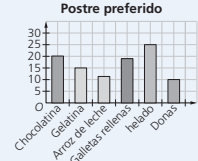
Figura 14

Deporte	Número de personas	Porcentaje	Ángulo
Fútbol		40%	
Baloncesto		20%	
Tenis		30%	
Patinaje		10%	

Tabla 15

Ejercitación

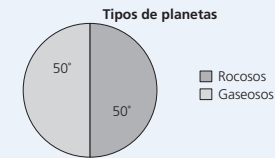
8.



Comunicación

9. Respuesta abierta

10.



11. Respuesta abierta

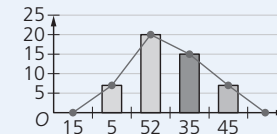
12. a. La temperatura máxima fue el sábado, 20 °C

b. Quito: 15 °C y Guayaquil 25 °C

c. Entre 24 °C y 33 °C

d. Quito: 19 °C y Guayaquil: 30 °C

13.



Resolución de problemas

14.

Deporte	Número de personas	Porcentaje	Ángulo
Fútbol	80	40%	144°
Baloncesto	40	20%	72°
Tenis	60	30%	108°
Patinaje	20	10%	36°

Libro del alumno

Ampliación conceptual

La media aritmética:

- Se aplica cuando la variable está medida en escalas métricas.
- Siempre existe, y es única.
- Es una función algebraica de los datos individuales. Esto significa que la modificación de cualquiera de los datos hace variar el valor de la media aritmética.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Proponga a los estudiantes actividades en las que se evidencie que la media aritmética está “afectada” por cada dato y principalmente por los “valores extremos”.
- Presente ejercicios, problemas y actividades basados en situaciones reales del grupo o de la escuela en que sea necesario conocer la media aritmética simple, ponderada o para datos agrupados. En cada caso recuerde el procedimiento para determinar cada una de esas medidas, sus ventajas y limitaciones en el análisis de datos.
- Plantee a los estudiantes recolectar datos de muestras de 20 compañeros de clase para hacer un estudio de la estatura en centímetros de estos.
Proponga que organicen los datos en clases que usted les sugiera en función de la realidad de las posibles frecuencias.
- Realice la comparación de las medias de dos distribuciones de frecuencias correspondientes a muestras distintas de una misma variable para arribar a conclusiones y establecer conjeturas.

4

Media aritmética

Explora

Julián hizo un recorrido diario durante su preparación para participar en una carrera. Él registró la distancia que recorrió durante una semana en la Tabla 1.

Días	Distancia (km)
Lunes	11,4
Martes	12,1
Miércoles	12,5
Jueves	10,8
Viernes	11,3
Sábado	12,4
Domingo	11,5

Tabla 1

- Si la distancia promedio la semana anterior fue de 12,3 km, ¿se puede afirmar que esta semana obtuvo un mejor promedio?

En la calculadora

Media aritmética de un conjunto de datos

Para hallar la media aritmética en la calculadora se utilizan las teclas $\frac{\square}{\square}$ y $\frac{\square}{\square}$. Por ejemplo, la media aritmética de 7, 6, 6 y 3 se calcula digitando en la calculadora la secuencia:

$\frac{\square}{\square}$ 2 7 EXE 6 EXE 6 EXE 3 EXE $\frac{\square}{\square}$

El primer valor obtenido corresponde a la media de este conjunto de datos.

- Identifica cómo hallar la media en tu calculadora y halla la media de los números 5, 6, 7 y 8.

Para determinar el promedio de la distancia recorrida por Julián durante la semana, se suman las distancias y se divide entre el número de días.

$$\frac{11,4 + 12,1 + 12,5 + 10,8 + 11,3 + 12,4 + 11,5}{7} = \frac{82}{7} = 11,71 \text{ km}$$

Al comparar el promedio de distancia recorrida por Julián la semana anterior con el obtenido esta semana, se puede concluir que su promedio bajó con respecto a la semana previa, pues $11,71 < 12,3$.

La **media aritmética** o **promedio** de un conjunto de datos es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de estos.

Ejemplo 1

La primera columna de la Tabla 2 muestra el tiempo semanal en horas que dedica a navegar por internet un grupo de estudiantes; la segunda columna indica la frecuencia absoluta de cada tiempo, y en la tercera se calcula el producto de cada tiempo por su frecuencia.

Tiempo en horas	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
3	3	$3 \cdot 3 = 9$
4	5	$4 \cdot 5 = 20$
5	15	$5 \cdot 15 = 75$
6	6	$6 \cdot 6 = 36$
7	4	$7 \cdot 4 = 28$
8	2	$8 \cdot 2 = 16$
Total	35	184

Tabla 2

Por tanto, en promedio los estudiantes navegan por internet $\frac{184}{35} = 5,26$ horas semanales.

4.1 Media ponderada

En ocasiones, no todos los datos de la variable tienen la misma importancia. En tal caso, se multiplican los datos por distintos números, que se denominan pesos y que modifican su valor.

Para calcular la **media aritmética ponderada** se siguen estos pasos.

- Se multiplica cada dato por su peso y se suman los resultados.
- Se divide la cantidad obtenida por la suma de los pesos.

Ejemplo 2

En un concurso, se asigna un puntaje a un ejercicio de salto y otro al tiempo de ejecución, dándole una importancia de siete al primero y de tres al segundo. Clara obtuvo nueve en salto y seis en tiempo de ejecución. ¿Cuál fue su puntuación final?

$$\frac{9 \cdot 7 + 6 \cdot 3}{7 + 3} = \frac{81}{10} = 8,1$$

La puntuación de Clara es 8,1.

El valor calculado es la media aritmética ponderada.

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, $\bar{x}$) y de un conjunto de datos en la solución de problemas.

4.2 Media aritmética de datos agrupados

Para calcular la **media aritmética** o **promedio** de un conjunto de **datos agrupados**, se deben calcular las marcas de clase de los intervalos, luego se multiplican las marcas de clase por sus frecuencias absolutas respectivas y finalmente, se divide la suma de estos productos por el total de datos.

Ejemplo 3

En la Tabla 3 se registraron las estaturas de los estudiantes de octavo EGB de un colegio.

Estatura (m)	Número de estudiantes
[1,40; 1,45)	2
[1,45; 1,50)	10
[1,50; 1,55)	25
[1,55; 1,60)	5

Tabla 3



Para calcular la media aritmética de este grupo de datos, se construye una tabla en la que se agregan dos columnas más: marca de clase (x_i) y producto entre x_i y su correspondiente frecuencia absoluta f_i , como se muestra en la Tabla 4.

Estatura (m)	Marca de clase (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Marca · frecuencia ($x_i \cdot f_i$)
[1,40; 1,45)	1,425	2	2,85
[1,45; 1,50)	1,475	10	14,75
[1,50; 1,55)	1,525	25	38,125
[1,55; 1,60)	1,575	5	7,875
Total		42	63,6

Tabla 4

Entonces, la media aritmética de la estatura de los estudiantes de octavo EGB es:

$$\frac{63,6}{42} = 1,51 \text{ m.}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Calcula la media aritmética del peso de los 35 recién nacidos cuyos pesos en kilogramos se muestran en la Tabla 5.

Solución:

Peso (kg)	Marca de clase (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Marca · frecuencia ($x_i \cdot f_i$)
[1,5; 2,0)	1,75	1	1,75
[2,0; 2,5)	2,25	3	6,75
[2,5; 3,0)	2,75	9	24,75
[3,0; 3,5)	3,25	12	39
[3,5; 4,0)	3,75	6	22,5
[4,0; 4,5)	4,25	4	17
		Suma = 35	Suma = 111,75

Tabla 6

Por tanto, la media del peso de los niños es:

$$\frac{111,75}{35} = 3,19 \text{ kg.}$$

Ten en cuenta

La media aritmética o promedio de un conjunto de datos está comprendida entre el menor y el mayor de los datos del conjunto.

Así, por ejemplo, antes de realizar el cálculo se puede asegurar que la media de los datos 15, 17, 19, 23, 24 y 31 no puede ser menor que 15 ni mayor que 31.



Un bebé al nacer suele pesar entre 2,5 kg y 4,5 kg, y puede medir entre 45 cm y 55 cm.

Peso (kg)	Número de niños
[1,5; 2,0)	1
[2,0; 2,5)	3
[2,5; 3,0)	9
[3,0; 3,5)	12
[3,5; 4,0)	6
[4,0; 4,5)	4
	35

Tabla 5

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Retome algunas de las tablas que los estudiantes hicieron como parte de la actividad colaborativa del tema de variables, datos y frecuencias, y pídale que determinen el valor de la media aritmética de los sabores de helado entre los diez compañeros seleccionados. Este ejercicio es útil como forma de provocar contradicciones que les hagan comprender los argumentos de por qué esta no se puede determinar en variables cualitativas como el sabor del helado, sino que se aplica cuando la variable está medida en escalas métricas.
2. Haga énfasis en la importancia de los instrumentos de cálculo que los estudiantes tienen a su alcance: la calculadora y la computadora en el tratamiento de grandes cantidades de información.

■ Actividades colaborativas

Organiza a los estudiantes en pequeños grupos de trabajo, de cuatro a cinco integrantes, que se encargarán de recolectar datos de 20 compañeros de clase para hacer un estudio de la cantidad de hermanos de los integrantes de la muestra. Cada uno de los grupos debe seleccionar muestras diferentes de 20 compañeros para calcular la media aritmética y luego comparar resultados, y utilizarlos además posteriormente en el tema de medidas de dispersión. Haga énfasis en el reconocimiento y la valoración del trabajo en equipo como la forma más eficaz para la recogida de datos.

Ejercitación

2. a. $x = 7$
b. $x = 5$
c. $x = 8$
3. a. No se puede porque son datos cualitativos.
b. La media es 1 125
c. La media es 6
d. No se puede porque son datos cualitativos
4. a. 3,2 b. 5
c. 5,83 d. 4,583
5. La calificación final de Beatriz es 7,8.

Modelación

6. Respuesta abierta

4

Media aritmética

MatemaTICS

Determina la media aritmética con Excel

- Observa cómo hallar el costo promedio de un apartamento con Excel.

Primero, consigna los datos en una tabla. Para este caso, en la primera columna escribe el valor en miles de un apartamento (x) y, en la segunda, la cantidad de apartamentos con ese valor (frecuencia absoluta f_i).

Valor del apartamento (x)	Número de apartamentos (f_i)
56	18
75	15
120	21
150	10
250	8
540	2

Selecciona una celda vacía (B9) y escribe en ella $=\text{SUMAPRODUCTO}(A2:A7;B2:B7)/\text{SUMA}(B2:B7)$ y luego da ENTER. En la celda B9 se muestra el promedio de los datos.

Valor del apartamento (x)	Número de apartamentos (f_i)
56	18
75	15
120	21
150	10
250	8
540	2
Promedio	124,7702703

El valor promedio de los apartamentos de la ciudad en la que se hizo el estudio es, en forma aproximada, \$ 124 770.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Determina el valor de x para que la media del conjunto de datos sea la que se indica.
 - a. La media de 5, 6 y x es 6.
 - b. La media de 3, 8, x , 2 y 7 es 7.
 - c. La media de 10, 13, 8, x y 1 es 8.
3. Halla la media en los casos que sea posible hacerlo. En el conjunto que no se pueda calcular, explica la razón.
 - a. Azul, rojo, rojo, verde, azul, rojo, rojo
 - b. 1 000, 1 000, 1 000, 1 500, 1 000, 1 500, 1 000, 1 000
 - c. 5, 6, 7, 8, 4, 5, 6, 7, 6
 - d. Masculino, femenino, femenino, femenino
4. Halla la media aritmética de los siguientes conjuntos de datos.
 - a. 2 1 4 6 3
 - b. 5 5 5 5 5 5 5
 - c. 7 8 4 3 6 7
 - d. 6 5 4 3 7 6 5 4 3 0 7 5

5. Lee y responde.

Para hallar la nota de matemáticas, se multiplica por cinco la nota de problemas, por cuatro la nota de cálculo y por uno la nota de teoría. Si Beatriz tiene unas notas de 8, 7 y 10, respectivamente, ¿cuál es su calificación final?

Modelación

6. Realiza una encuesta a tus compañeros de salón para poder dar respuesta a las siguientes preguntas.
 - a. ¿Cuál es la estatura promedio de los estudiantes de tu curso?
 - b. ¿Cuál es la edad promedio de los estudiantes de tu curso?
 - c. ¿Cuál es el tiempo promedio que los estudiantes de tu curso practican deporte semanalmente?
 - d. ¿Cuál es el tiempo promedio que los estudiantes de tu curso navegan por internet semanalmente?

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Ejercitación

- 7 Completa las Tablas 7 a 9. Luego, halla la media aritmética de los datos presentados en cada una.

a.

Tiempo	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
2	5	
3	7	
4	6	
5	4	
6	3	
Total		

Tabla 7

b.

N.º hermanos	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
0	16	
1	37	
2	51	
3	23	
Total		

Tabla 8

c.

Edad	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
2	14	
3	20	
4	13	
5	6	
6	30	
7	45	
8	21	
9	12	
Total		

Tabla 9

- 8 Halla la media aritmética del número de libros leídos por un grupo de integrantes de un club lector a lo largo de un mes, según los datos de la Tabla 10.

Número de libros	1	2	3	4	5	6	7
Número de personas	4	12	9	6	8	6	1

Tabla 10

- 9 Halla la media aritmética de la edad de los niños que acuden al servicio de urgencias en el hospital pediátrico teniendo en cuenta los datos registrados en la Tabla 11.

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
Número de niños	12	8	5	7	3

Tabla 11

- 10 Completa las tablas 12 a 14 y determina la media aritmética de cada conjunto de datos.

a.

Peso (kg)	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[30, 40)		8	
[40, 50)		2	
[50, 60)		11	
[60, 70)		15	
Total			

Tabla 12

b.

Velocidad (m/s)	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[0, 25)		5	
[25, 50)		14	
[50, 75)		30	
[75, 100)		43	
[100, 125)		15	
Total			

Tabla 13

c.

Sueldo en dólares	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[500, 1 000)		25	
[1 000, 1 500)		54	
[1 500, 2 000)		34	
[2 000, 2 500)		28	
[2 500, 3 000)		28	
[3 000, 3 500)		12	
[3 500, 4 000)		5	
Total			

Tabla 14

Resolución de problemas

- 11 En la nota definitiva de la asignatura de inglés, cada estudiante tiene cinco valoraciones. Las valoraciones de Andrés fueron: 7, 8, 9, 10, 6 y se sabe que Mariana sacó la misma definitiva, pero no tuvo las mismas notas. Escribe dos posibles grupos de valoraciones de Mariana.

- 12 En el curso de pintura barroca, las notas teóricas valen el 30% y las prácticas 70%. Determina la nota definitiva de cada estudiante a partir de las notas registradas en la Tabla 15.

	Notas teóricas					Notas prácticas				
Ana	7	6	8	6	8	8	9	8	7	
Juan	3	5	4	6	7	8	8	7	9	
Liz	9	9	7	8	10	10	9	10	8	
Luis	10	10	9	8	8	9	10	10	10	

Tabla 15

Ejercitación

7. a. La media aritmética es $\frac{93}{25} = 3,72$ minutos

- b. La media aritmética es $\frac{208}{127} = 1,64$ hermanos

- c. La media aritmética es $\frac{941}{161} = 5,84$ años

8. $\frac{162}{46} = 3,52$ libros

9. La media aritmética es $\frac{137}{35} = 3,91$ años

10. a. La media aritmética es $\frac{1950}{36} = 54,16$ kg

- b. La media aritmética es $\frac{7912,5}{107} = 73,95$ m/s

- c. La media aritmética es $\frac{343500}{186} = 1846,774$ dólares

Resolución de problemas

11. Múltiples respuestas; por ejemplo, 9, 5, 7, 10 y 9.

12. Ana: 7,6; Juan: 6,8; Liz: 9,1 y Luis: 9,4

Ampliación conceptual

La moda en un conjunto de datos:

- Es aplicable a cualquier tipo de datos. Es muy útil para datos cualitativos.
- Puede que no exista, puede que haya una única, o puede haber más de una.
- No es una función algebraica de los datos individuales.

La mediana:

- Es aplicable a cualquier tipo de datos que puedan ser ordenados, es decir, tiene sentido cuando los datos pueden ser medidos por escalas métricas y ordinales.
- Siempre existe y es única.
- No es una función algebraica de los datos individuales, esto significa que no varía fácilmente al modificar los valores extremos.
- Es apropiada para un grupo pequeño de datos.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Proponga a los estudiantes actividades en las que se presenten cada uno de los posibles casos para el cálculo de la moda y la mediana
- Destaque que la mediana no se puede determinar en variables cualitativas como el sabor del helado, u otras medidas en una escala nominal entre cuyas clases no está definido un orden.
- Presente ejercicios en los que las tres medidas de tendencia central sean iguales, o diferentes, o solo dos de ellas sean iguales para generalizar y reforzar las relaciones entre ellas.

5

Moda y mediana

Explora

Los resultados de una encuesta aplicada a 850 estudiantes acerca de la forma en la que se desplazan a su colegio, se recogen en la Tabla 1.

Medio de transporte	f_i
A pie	28
Bicicleta	49
Bus escolar	550
Servicio público	175
Automóvil	48

Tabla 1

- ¿Cuál es el medio de transporte más usado?

Ten en cuenta

La moda no necesariamente es única, como sí lo son la media y la mediana.

Ten en cuenta

- Si en un estudio estadístico el número de datos es impar, la mediana es el valor central.
- Si en el estudio estadístico el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales.

Según la tabla, la mayor parte de los estudiantes llega al colegio en el bus escolar, pues es la respuesta que aparece con mayor frecuencia en la encuesta.

5.1 Moda y clase modal

La **moda** de un conjunto de datos es el dato que tiene la mayor frecuencia absoluta. Si los datos están agrupados en clases, la clase de mayor frecuencia es la **clase modal**; en este caso, el valor de la moda corresponde a la **marca de clase modal**, es decir, al punto medio de la clase.

Ejemplo 1

Las edades de los 550 estudiantes que usan como medio de transporte el bus escolar para llegar al colegio, se presentan agrupadas en la Tabla 2.

Edad	f_i
[5, 8)	220
[8, 11)	115
[11, 14)	87
[14, 17)	83
[17, 20)	45

Tabla 2



Como la mayor frecuencia se presenta en el intervalo [5, 8), esa se considera la clase modal. La moda es la marca de clase de este intervalo, es decir, 6,5 años.

5.2 Mediana y clase mediana

La **mediana** es el valor que ocupa la posición central de todos los datos cuando estos están ordenados de menor a mayor. En un conjunto de **datos agrupados** la mediana se encuentra en la **clase mediana**, para la cual la frecuencia absoluta acumulada es el primer valor mayor o igual a la mitad del tamaño de la muestra.

Actividades resueltas

Ejercitación

- Halla la moda a partir de la información de la Tabla 3, la cual muestra el tiempo empleado por 20 personas para desayunar.

Tiempo (min)	5	10	12	15	20
Número de personas	2	6	6	4	2

Tabla 3

Solución:

Como 10 minutos y 12 minutos son los datos que se presentan con mayor frecuencia, el conjunto es bimodal.

- Identifica la clase mediana del conjunto de datos del Ejemplo 1.
 - En la Tabla 2 se observa que la primera frecuencia absoluta acumulada mayor que la mitad del tamaño de la muestra es 335. Por tanto, la clase mediana es [8, 11).

APLICA © EDICIONES SM

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 3 Halla la mediana y la moda de cada conjunto de datos.
- a. 5 9 8 13 4 0
 - b. 6 6 3 3 2 2
 - c. 0 1 2 3 4
 - d. 9 9 5 3 6 6 6 1 1 0 0
 - e. 24 32 28 40 33 45 28 34 33
 - f. 50 50 50 30 60 10 80

- 4 Calcula la clase mediana y la moda de los conjuntos de datos.

a.

Intervalo	Frecuencia
[0, 10)	4
[10, 20)	7
[20, 30)	6
[30, 40)	5
[40, 50)	2

Tabla 4

b.

Intervalo	Frecuencia
[12, 14)	5
[14, 16)	6
[16, 18)	6
[18, 20)	1
[20, 22)	2

Tabla 5

c.

Intervalo	Frecuencia
[70, 75)	3
[75, 80)	2
[80, 85)	1
[85, 90)	6
[90, 95)	2
[95, 100)	7

Tabla 6

Razonamiento

- 5 Encuentra el dato que falta en cada conjunto de datos para que se cumpla la condición.
- a. 5 7 6 5 4 3 7 6 5 x. La moda es 5.
 - b. 21 10 16 18 x 23 12 14. La mediana es 16.
- 6 Explica qué ocurre con la moda y la mediana de los datos 6, 8, 10, 9 y 10, si (a) cada dato
- a. se multiplica por 4
 - b. se le suma 4
 - c. se eleva al cuadrado
 - d. se divide entre 2
 - e. se le suma su doble
 - f. se le resta 1

Comunicación

- 7 Propón un conjunto de datos en el que se cumpla cada condición.
- a. La moda es menor que la mediana.
 - b. La moda es mayor que la mediana.
 - c. La media es igual que la mediana.
 - d. La media, la moda y la mediana son iguales.

Resolución de problemas

- 8 En un colegio se llevó a cabo una campaña de reciclaje de envases. Después del conteo, se registraron en una tabla los datos recogidos (Tabla 7).

Tipo de envases	Latas	Papel	Cristal	Plástico	Cartón
Número de envases	617	2 438	445	1 300	711

Tabla 7

¿Qué tipo de envases se recolectaron más?

- 9 El número de alojamientos rurales en cierta comunidad se distribuye según los datos de la Tabla 8.

Tipo de alojamiento	Número de plazas
Campamentos	160
Viviendas en alquiler	3 600
Albergues	380
Habitaciones en viviendas	1 400

Tabla 8

¿Cuál es la moda de los datos?

- 10 La Tabla 9 señala el precio de varios computadores personales en una tienda de informática.

Precio en dólares	Número de computadores
[600, 900)	60
[900, 1 200)	124
[1 200, 1 500)	30
[1 500, 1 800)	15
[1 800, 2 100)	3

Tabla 9

Calcula la clase modal, la moda y la clase mediana.

- 11 La Tabla 10 muestra la cantidad de respuestas correctas de un grupo de 40 estudiantes en un examen de 14 preguntas. Halla la clase modal y la clase mediana.

Número de respuestas	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
Número de estudiantes	4	9	15	7	5

Tabla 10

Ejercitación

3. a. La mediana es 6,5 y no hay moda.
b. La mediana es 3 y no hay moda.
c. La mediana es 2 y no hay moda.
d. La mediana es 5,5 y la moda es 6.
e. La mediana es 33 y la moda es 28,33.
f. La mediana es 50 y la moda es 50.
4. a. La clase mediana es [20, 30); la moda es 15.
b. La clase mediana es (14, 16); la moda es 15 y 17.
c. La clase mediana es [85, 90); la moda es 97,5.

Razonamiento

5. a. x puede ser 3, 4 o 5. b. $x = 16$
6. a. Se cuadruplican.
b. Se aumentan en 4 unidades.
c. Se elevan al cuadrado.
d. Se reducen a la mitad.
e. Se triplican
f. Se disminuyen en una unidad.

Comunicación

7. Respuesta abierta

Resolución de problemas

8. Papel
9. Viviendas en alquiler
10. La clase modal es [900, 1 200), la moda es 1 050 y la clase mediana es [900, 1 200)
11. La clase modal y la clase mediana es (4, 6)

Ampliación conceptual

Las medidas de dispersión nos proporcionan una medida del mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a las medidas de tendencia central.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Tenga en cuenta los conocimientos precedentes relativos a la media, moda y mediana, para establecer las relaciones con este nuevo contenido de medidas de dispersión desde una nueva perspectiva para el análisis de datos, en la que se revelen algunas de las siguientes limitaciones de las medidas de tendencia central:
 - Cada una se refiere a un único valor conjunto de todos los datos, o pocos cuando la moda es más de uno.
 - No informan sobre la relación entre valores pequeños y mayores.
 - No manifiestan si las diferencias entre los elementos varían o no regularmente y si son grandes o pequeñas.
- Presente situaciones de la realidad cotidiana a partir de ejemplos de muestras en las que las medidas de tendencia central sean iguales, pero que las diferencias en la dispersión de sus datos sean evidentes. Resalte que son muestras muy diferentes para arribar a determinadas conclusiones y luego tomar decisiones razonables basadas en ellas.
- Cuentes a los estudiantes anécdotas, fábulas y parábolas que estén vinculadas al concepto de medida de dispersión y constituyan un desafío y una invitación a reflexionar sobre los valores que rigen su vida diaria en sus relaciones con los demás.

6

Medidas de dispersión

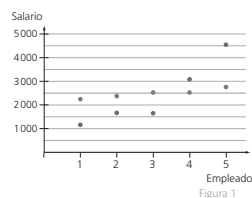
Explora

Juan compara los salarios de dos pequeñas empresas a partir de los sueldos de cinco personas que trabajan en diferentes áreas. Los sueldos de estos empleados se muestran en la Tabla 1.

Compañía A	Compañía B
\$ 1 200	\$ 2 300
\$ 1 800	\$ 2 400
\$ 1 800	\$ 2 500
\$ 3 000	\$ 2 500
\$ 4 500	\$ 2 600

Tabla 1

- ¿Se puede decir que los salarios en las dos empresas son similares?



Ten en cuenta

Un diagrama de dispersión muestra los datos como un conjunto de puntos. Para realizar un diagrama de este tipo, se representa cada par de valores como las coordenadas de un punto.

Estatura (cm)	f_i
[150, 160)	18
[160, 170)	24
[170, 180)	14
[180, 190)	7
[190, 200)	1

Tabla 2

Juan toma los cinco salarios de los empleados a los que entrevistó en cada empresa y halla la media correspondiente.

El promedio salarial de la compañía A es:

$$\frac{1200 + 1800 + 1800 + 3000 + 4500}{5} = \$ 2460$$

El promedio salarial en la compañía B es:

$$\frac{2300 + 2400 + 2500 + 2500 + 2600}{5} = \$ 2460$$

Las dos compañías tienen el mismo promedio o media aritmética. Sin embargo, se observa que los salarios de la compañía A se alejan más de la media que los de la compañía B. Se dice entonces que los datos salariales de la compañía A son **muy dispersos**, mientras que los de la compañía B son **poco dispersos**.

Las **medidas de dispersión** son parámetros de centralización que miden la separación de los datos de una distribución respecto a su media. Las más utilizadas son el **rango** o **recorrido**, la **desviación media**, la **varianza** y la **desviación típica**.

6.1 Rango

El **rango** o **recorrido** de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor y el menor valor de los datos. Si los datos están agrupados en clases, el rango se calcula como la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primero.

Ejemplo 1

Los rangos de los salarios de las compañías de la situación inicial son:

Compañía A: \$ 4500 — \$ 1200 = \$ 3300

Compañía B: \$ 2600 — \$ 2300 = \$ 300

Los puntos azules del diagrama de dispersión de la Figura 1 representan los salarios de la compañía A y los rojos, los de la compañía B.

Ejemplo 2

Las estaturas de los 64 estudiantes de octavo EGB de un colegio se registran en la Tabla 2.

Como el extremo superior del último intervalo es 200 y el extremo inferior del primero es 150, el rango de la distribución es 200 — 150 = 50 cm.

6.2 Desviación media

La **desviación** respecto a la **media** es la diferencia entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética.

Para calcular la desviación media de un conjunto de datos:

- Se hallan las desviaciones respecto a la media: dato — media
- Se calculan los valores absolutos de las desviaciones: |dato — media|
- Se encuentra la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones.

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño:

Calcular e interpretar las medidas de tendencia central, medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Ejemplo 3

Las estaturas, en centímetros, de los jugadores de dos equipos de baloncesto son:

Equipo A: 190, 192, 195, 198, 200

Equipo B: 170, 175, 195, 215, 220

$$\text{Estatura media del equipo A: } \frac{190 + 192 + 195 + 198 + 200}{5} = 195 \text{ cm}$$

$$\text{Estatura media del equipo B: } \frac{170 + 175 + 195 + 215 + 220}{5} = 195 \text{ cm}$$

Las tablas 3 y 4 presentan las desviaciones con respecto a la media y sus valores absolutos.

Equipo A		
Datos	Dato - media	Dato - media
190	190 - 195 = -5	5
192	192 - 195 = -3	3
195	195 - 195 = 0	0
198	198 - 195 = 3	3
200	200 - 195 = 5	5
Suma = 16		

Tabla 3

Equipo B		
Datos	Dato - media	Dato - media
170	170 - 195 = -25	25
175	175 - 195 = -20	20
195	195 - 195 = 0	0
215	215 - 195 = 20	20
220	220 - 195 = 25	25
Suma = 90		

Tabla 4

Las desviaciones medias de las estaturas de los equipos A y B son:

$$\frac{5 + 3 + 0 + 3 + 5}{5} = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ cm y } \frac{25 + 20 + 0 + 20 + 25}{5} = \frac{90}{5} = 18 \text{ cm}$$

Como la desviación media del equipo B es mayor que la del equipo A, entonces las estaturas de los integrantes del equipo B están más dispersas que las del equipo A, como se observa en las figuras 3 y 4.



Figura 3



Figura 4

Ten en cuenta

Una desviación media elevada implica mucha variabilidad en los datos, mientras que una igual a cero implica que todos los valores son iguales y, por tanto, coinciden con la media.

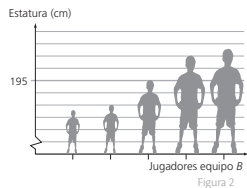


Figura 2

Ten en cuenta

La suma de las desviaciones respecto a la media siempre es 0. Por ello, para hallar la dispersión de los datos se recurre a la desviación media (valor absoluto de las desviaciones respecto a la media) o a la varianza (cuadrado de las desviaciones respecto a la media).

6.3 Varianza y desviación típica

La **varianza** de una distribución estadística es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media. Se representa por s^2 y está dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + f_3(x_3 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}$$

La **desviación típica** s es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo 4

Halla la varianza y la desviación típica de las edades 4, 8, 2 y 9 cuya media es 5,75. Primero, se completa la Tabla 5 incluyendo las desviaciones con respecto a la media y sus cuadrados. De acuerdo con la definición, la varianza y la desviación típica de la distribución son, respectivamente:

$$s^2 = \frac{32,75}{4} = 8,1875 \Rightarrow s = \sqrt{8,1875} = 2,86$$

Edad x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	-3,75	14,0625
4	-1,75	3,0625
8	2,25	5,0625
9	3,25	10,5625
Suma	0	32,75

Tabla 5

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Propóngales a los estudiantes actividades en las que se evidencie que el rango o recorrido de un conjunto de datos se utiliza para una comparación primaria porque considera solo las dos observaciones extremas, con independencia de cómo están distribuidas las restantes, de ahí que se recomienda solo para muestras pequeñas.
2. Plantee actividades relacionadas con el significado de las medidas de dispersión. Ejemplos:
 - La desviación media indica dónde estarían concentrados los datos si todos estuvieran a la misma distancia de la media aritmética, con lo que la media aritmética es menos representativa de los datos a mayor desviación media.
 - Si se suma y se resta la desviación típica a la media aritmética nos da el intervalo de mayor concentración de los datos.

■ Actividades colaborativas

Organiza a los estudiantes en pequeños grupos de trabajo que se encargarán de formular problemas a partir de determinadas condiciones entregadas en tarjetas relacionadas con conjuntos de datos estadísticos discretos tomados del entorno y de medios de comunicación. También puede ser que las tarjetas se preparen sobre la base de la construcción hipotética de situaciones con condiciones preestablecidas. Ejemplo de una tarjeta puede ser:

Inventa un problema referido a rachas ganadoras de equipos de fútbol del país en una temporada cuya media sea aproximadamente 5 y cuyo rango sea 7.

Libro del alumno

■ Actividades colaborativas

Organice a los estudiantes en diferentes grupos de trabajo, de siete a ocho integrantes, que se encargarán de recopilar información de los restantes miembros de la clase. De esta manera las muestras de cada uno de los grupos serán diferentes porque estarán constituidas por todos los integrantes de la clase menos los integrantes del grupo de trabajo. La información se recopila con la siguiente pregunta:

¿Cuál es la nota, entre 0 y 100 puntos, que alcanzaste en el último examen de Matemática?

Como un estudiante será parte de la muestra de varios grupos para responder la misma pregunta se pueden contrastar algunas respuestas, en función de verificar la veracidad de la información recopilada y la sinceridad con la que respondieron los integrantes de la clase. Esto contribuirá a desarrollar el valor de la prudencia cuando se llevan a cabo estudios para la toma de decisiones.

Una vez que los estudiantes hayan construido las tablas de frecuencias, pídales que respondan interrogantes que permitan trabajar con el concepto de medidas de dispersión.

Ejemplo: Plantee actividades que conlleven a la comparación de las notas de dos grupos de estudiantes. Trate de conformar equipos en que al menos uno sea bien heterogéneo, con grandes diferencias en su rendimiento, y otro bastante homogéneo, con pocas diferencias con respecto a la misma variable.

6

Medidas de dispersión

Ejemplo 5

En la Tabla 6 se muestran, en la primera columna, las notas obtenidas por un estudiante; en la segunda, las desviaciones típicas respecto a la media ($\bar{x} = 6$), y en la tercera, los cuadrados de estas desviaciones.

Notas x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
4	$4 - 6 = -2$	$(-2)^2 = 4$
5	$5 - 6 = -1$	$(-1)^2 = 1$
6	$6 - 6 = 0$	$0^2 = 0$
7	$7 - 6 = 1$	$1^2 = 1$
8	$8 - 6 = 2$	$2^2 = 4$
Suma	0	10

Tabla 6

De acuerdo con la definición, la varianza es $s^2 = \frac{10}{5} = 2$ y la desviación típica de la distribución es: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Ejemplo 6

La Tabla 7 muestra los datos agrupados correspondientes al peso de 55 personas. Las columnas se han completado de tal forma que la información se use para

calcular la varianza con la expresión $s^2 = \frac{f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + f_nx_n^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} - \bar{x}^2$.

Peso (kg)	x_i	f_i	$x_i^2 \cdot f_i$
[60, 65)	62,5	7	27 343,75
[65, 70)	67,5	12	54 675
[70, 75)	72,5	16	84 100
[75, 80)	77,5	11	66 068,75
[80, 85)	82,5	5	34 031,25
[85, 90)	87,5	4	30 625
Suma		55	296 843,75

Tabla 7

La media es $\bar{x} = 73,14$ kg.

La varianza y la desviación típica son, respectivamente:

$$s^2 = \frac{296\,843,75}{55} - 73,14^2 = 47,7 \text{ kg}^2$$

$$s = \sqrt{47,7 \text{ kg}^2} = 6,91 \text{ kg}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

- Halla la varianza y la desviación típica de la distribución de los pesos dados en la Tabla 8.

Solución:

Se completa la tabla calculando la columna $x_i^2 \cdot f_i$.

Peso (kg)	Marca de clase (x_i)	f_i	Marca · frecuencia ($x_i \cdot f_i$)	$x_i^2 \cdot f_i$
[1,5; 2,0)	1,75	1	1,75	3,0625
[2,0; 2,5)	2,25	3	6,75	15,1875
[2,5; 3,0)	2,75	9	24,75	68,0625
[3,0; 3,5)	3,25	12	39	126,75
[3,5; 4,0)	3,75	6	22,5	84,375
[4,0; 4,5)	4,25	4	17	72,25
Suma		35	111,75	369,6875

Tabla 8

$$\bar{x} = \frac{111,75}{35} = 3,1929 \text{ kg} \quad s^2 = 0,368 \text{ kg}^2 \quad s = \sqrt{0,368} = 0,6 \text{ kg}$$



Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño:

Calcular e interpretar las medidas de tendencia central, medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

- 2 Calcula el rango de cada conjunto de datos.
 - a. 3, 4, 10, 23, 8, 0, 15, 16, 67, 69, 4
 - b. 28, 32, 25, 35, 28, 25, 30, 35, 29, 29, 25, 35, 35, 30, 28, 30, 28
 - c. 125, 75, 130, 50, 130, 75, 75, 100, 100, 135, 135, 130, 50, 50, 75, 135
 - d. 9, 5, 13, 11, 4, 8, 12, 8, 8, 5, 4, 9, 10, 13, 11, 11, 5, 4, 9, 9, 8, 9, 8

- 3 Calcula el rango de los datos agrupados en las tablas 8 y 9.
 - a.

Velocidad	Número de accidentes
[0, 25)	0
[25, 50)	1
[50, 75)	1
[75, 100)	2
[100, 125)	5
[125, 150)	26

Tabla 8

- b.

Estatura	Número de personas
[150, 155)	4
[155, 160)	8
[160, 165)	12
[165, 170)	11
[170, 175)	6
[175, 180)	5
[180, 185)	3
[185, 190)	1

Tabla 9

- 4 Determina la varianza y la desviación típica de los datos que se encuentran en las tablas 10 a 12.

- a.

Número de libros	1	2	3	4	5	6	7
Número de personas	5	12	18	11	7	4	1

Tabla 10

- b.

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)
Número de niños	8	8	5	3

Tabla 11

- c.

Peso (kg)	[15, 17)	[17, 19)	[19, 21)
Número de niños	7	9	4

Tabla 12

Razonamiento

- 5 Determina cuál de los siguientes conjuntos de datos tiene mayor dispersión.
 - a. 2, 6, 3, 8, 10, 32, 15
 - b. 110, 112, 111, 113, 111, 110, 111
 - c. 2,5; 2,5; 2,5; 3,5; 3,5
- 6 Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).
 - a. El rango de un conjunto de datos puede ser negativo. ()
 - b. La desviación típica de un conjunto de datos puede ser 0. ()
 - c. La varianza siempre es menor que la desviación típica. ()
 - d. Dos conjuntos con igual rango tienen igual dispersión. ()

Ejercitación

- 7 Halla la desviación media de cada grupo.
 - Grupo A: 72 65 71 56 59 63 61 70 52 49
 - Grupo B: 50 93 90 70 69 68 72 71 70 71
 ¿Qué conclusión puedes sacar a la vista de los resultados obtenidos?

Resolución de problemas

- 8 Un grupo de dieciséis estudiantes midieron sus estaturas y las consignaron así:
 - 165 167 162 175 171 169 172 170
 - 169 171 172 175 169 170 172 166
 Faltaba por llegar Luis, que mide 196 centímetros.
 - a. ¿Se altera el valor del rango?
 - b. Si Luis hubiese medido 174 centímetros, ¿se habría alterado el valor del rango?
- 9 Los jugadores de dos equipos de fútbol se pesaron. Los datos, en kilogramos, se muestran a continuación.
 - Equipo A: 72, 65, 71, 56, 59, 63, 61, 70
 - Equipo B: 61, 82, 84, 73, 77, 70, 69, 68
 - a. Calcula el recorrido de cada equipo.
 - b. Calcula la media en cada equipo.
 - c. Calcula la desviación media para cada equipo.
 - d. ¿Qué equipo tiene los datos más dispersos?



Ejercitación

2. a. 69 b. 10
c. 85 d. 9
3. a. 150 b. 40
4. a. $s^2 = 4$ y $s = 2$.
b. $s^2 = 4,11$ y $s = 2,03$.
c. $s^2 = 2,11$ y $s = 1,45$

Modelación

5. El más disperso es el conjunto a

6. a. F b. V c. F d. F

Ejercitación

7. Desviación media $A = 5,84$ y $B = 7,64$. Los datos del grupo B están más dispersos que los datos del grupo A.

Resolución de problemas

8. a. Sí b. No
9. a. El recorrido de A es 16 y el recorrido de B es 23.
b. La media de A es 64,625 y la media de B es 70,5.
c. La desviación media de A es 4,875 y la desviación media de B es 6.
d. El equipo B.

UNIDAD 4

Evaluación formativa

- Clasifica cada variable estadística en cualitativa o cuantitativa. En caso de ser cuantitativa, indica si es discreta o continua.
 - Estatura en metros de un conjunto de trabajadores
 - Sexo de un grupo de estudiantes.
 - Cantidad de goles anotados un equipo de futbol.
 - Sabor de helado favorito de un grupo de amigos.
 - Peso en libras de los animales de una granja.
- Se preguntó a un grupo de 25 personas acerca de su mascota preferida, las respuestas se registran en este cuadro. Organiza los datos obtenidos en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

pez – gato – perro – pájaro – gato – perro – pez
 perro – gato – pájaro – pez – gato – pez – perro – pájaro – pez
 perro – gato – pez – gato – pájaro

Mascota	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa			Frecuencia acumulada
		Fracción	número decimal	Porcentaje	
Gato					
Pez					
Perro					
Pájaro					
Total					

Nombre:

Grado: Fecha:

- En la siguiente tabla se registra la edad de los pacientes que asisten a un consultorio médico en una semana.

Edad en años	Número de pacientes
[0, 10)	3
[10, 20)	5
[20, 30)	15
[30, 40)	18
[40, 50)	6
[50, 60)	7
[60, 70)	3

- Halla la marca de clase de cada intervalo.
 - ¿Cuántos pacientes asisten en una semana al consultorio médico?
 - ¿Qué porcentaje de pacientes son menores de 30 años?
- En la siguiente tabla se muestran las edades de 100 trabajadores de un centro, seleccionados para participar en un estudio estadístico. ¿Cuál es la edad más frecuente?

Edades	26	28	29	30	31
# de trab.	10	20	30	25	15

- Clasifica cada variable estadística en cualitativa o cuantitativa. En caso de ser cuantitativa, indica si es discreta o continua.
 - Estatura en metros de un conjunto de trabajadores.
cuantitativa continua
 - Sexo de un grupo de estudiantes. **cualitativa**
 - Cantidad de goles anotados un equipo de fútbol.
cuantitativa discreta
 - Sabor de helado favorito de un grupo de amigos.
cualitativa
 - Peso en libras de los animales de una granja.
cuantitativa discreta
- Se preguntó a un grupo de 25 personas acerca de su mascota preferida, las respuestas se registran en este cuadro. Organiza los datos obtenidos en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

pez – gato – perro – pájaro – gato – perro – pez perro – gato – pájaro pez – perro – pez – perro – pez – gato – pez – perro – pájaro – pez perro – gato – pez – gato – pájaro					
Mascota	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa			Frecuencia acumulada
		Fracción	número decimal	Porcentaje	
Gato	6	6/25	0.24	24%	6
Pez	8	8/25	0.32	32%	14
Perro	7	7/25	0.28	28%	21
Pájaro	4	4/25	0.16	16%	25
Total	25	25/25	1	100%	

- En la siguiente tabla se registra la edad de los pacientes que asisten a un consultorio médico en una semana.

Edad en años	Número de pacientes
[0, 10)	3
[10, 20)	5
[20, 30)	15
[30, 40)	18
[40, 50)	6
[50, 60)	7
[60, 70)	3

- Halla la marca de clase de cada intervalo. **Verificar respuesta**
 - ¿Cuántos pacientes asisten en una semana al consultorio médico? **57**
 - ¿Qué porcentaje de pacientes son menores de 30 años? **40.35%**
- En la siguiente tabla se muestran las edades de 100 trabajadores de un centro, seleccionados para participar en un estudio estadístico. ¿Cuál es la edad más frecuente? **29 años**

Edades	26	28	29	30	31
# de trab.	10	20	30	25	15

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Identificar tipos de variables estadísticas	1			
Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.	2 y 3			
Representar gráficamente las frecuencias de datos estadísticos	4			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Experimento es la realización de un conjunto de condiciones que pueden ser repetidas un número arbitrario de veces (al menos, mentalmente).

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Reflexione sobre la diferencia entre los experimentos determinísticos o aleatorios a partir de los resultados obtenidos, siempre se espera obtener algún resultado; pero ocurre que en muchos experimentos se podrá saber con certeza qué resultado se va a obtener, mientras que en otros no se podrá realizar dicha aseveración. Muestre ejemplos de experimentos determinísticos que contrasten con los aleatorios, como el caso de soltar una pelota en el aire podemos asegurar que caerá hacia la tierra atraída por la fuerza de gravedad.
- Introduzca el estudio de los experimentos aleatorios a partir de destacar la gran frecuencia con que ocurren en la vida fenómenos aleatorios. Esto es importante porque este tema estimula las nociones de un pensamiento probabilístico, complemento de lo determinístico.
- Propóngales a los estudiantes ejercicios, problemas y actividades en los que se evidencie el hecho de que, aunque en los experimentos aleatorios no es posible predecir el resultado exacto que se obtendrá al realizar el experimento, sí se puede saber cuál o cuáles serán los posibles resultados de éste.

7

Experimentos aleatorios. Sucesos

7.1 Experimentos aleatorios

A pesar de que algunas selecciones llegan como favoritas al Mundial de Fútbol, no se puede predecir con certeza cuál de las 32 será la campeona hasta que no se jueguen todos los partidos del campeonato.

Cuando no se puede saber el resultado de un experimento, aunque se repita muchas veces, se le llama **experimento aleatorio**. Por el contrario, cuando se sabe de antemano el resultado de un experimento, se le llama **determinista**.

Ejemplo 1

Observa algunos tipos de experimentos en la Tabla 1.

Experimentos	
Aleatorios	Deterministas
Obtener un número par al lanzar un dado.	Crear color verde, mezclando amarillo con azul.
Ganar la lotería.	Sumar 2 con 3 y obtener 5.
Escoger un representante del curso de los 30 estudiantes de grado séptimo.	Congelar el agua a una temperatura bajo cero.

Tabla 1

7.2 Espacio muestral

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se denota con la letra E .

Ejemplo 2

El espacio muestral correspondiente a los equipos que participaron en el Mundial Brasil 2014 se muestra en la Figura 1.



Figura 1

Ejemplo 3

Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

- Lanzar una moneda.
- Girar una perinola.
- Lanzar un dado.
- Extraer una carta de la baraja española.

- Hay dos posibles resultados: $E = \{\text{cara, sello}\}$.
- $E = \{\text{toma 1, toma 2, toma todo, pon 1, pon 2, todos ponen}\}$
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Hay 52 resultados posibles: $E = \{\text{todas las cartas de la baraja}\}$

Ten en cuenta

La mayoría de experimentos aleatorios se presentan en juegos, concursos y eventos naturales, entre otros.

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

7.3 Sucesos aleatorios

A los subconjuntos de un espacio muestral se les llama **sucesos** o **eventos**. Se representan con letras mayúsculas y se designan escribiendo entre llaves los posibles resultados que pueden darse.

Ejemplo 4

Para el evento "sacar el nombre de un país de una urna que contiene el nombre de los países que participaron en el Mundial de Brasil 2014", se pueden considerar estos sucesos:

a.A: "sacar el nombre de un equipo suramericano"

$A = \{\text{Brasil, Argentina, Colombia, Chile, Uruguay, Ecuador}\}$

b.B: "sacar el nombre de un equipo europeo"

$B = \{\text{España, Alemania, Bélgica, Suiza, Holanda, Italia, Inglaterra, Portugal, Grecia, Bosnia, Croacia, Rusia, Francia}\}$

Ejemplo 5

En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por ejemplo, algunos sucesos de E son:

Salir un número par: $P = \{2, 4, 6\}$

Salir un número impar: $I = \{1, 3, 5\}$

Salir un número múltiplo de 3: $M = \{3, 6\}$

Salir un número múltiplo de 5: $N = \{5\}$

Estos sucesos son aleatorios.



Ten en cuenta

Aunque parezca increíble, si una pareja quiere tener cuatro hijos es mucho más probable que tengan tres hijos de un sexo y uno del otro que cualquier otra posibilidad.



7.4 Tipos de sucesos

- **Suceso elemental:** es el formado por un solo resultado.
- **Suceso compuesto:** es el formado por más de un resultado.
- **Suceso seguro:** es el que ocurre siempre en un determinado experimento.
- **Suceso imposible:** es el que nunca ocurre en un determinado experimento.

Ejemplo 6

En el Mundial de Fútbol del 2018 se pueden presentar diferentes tipos de sucesos, como se muestra en la Tabla 2.

Tipo de suceso	El ganador del Mundial será...
Elemental	El que ha ganado más copas mundiales. $A = \{\text{Brasil}\}$
Compuesto	El que ya ha sido campeón mundial. $B = \{\text{Brasil, Alemania, Italia, Argentina, España, Inglaterra, Francia, Uruguay}\}$
Seguro	Uno de los equipos clasificados para el Mundial de Fútbol 2018.
Imposible	Un equipo no clasificado para el Mundial de Fútbol 2018. $C = \emptyset$

Tabla 2

Ten en cuenta

Los sucesos seguros se designan por E y los imposibles con $\emptyset$.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Proponga actividades relacionadas con variados ejemplos de experimentos aleatorios:
 - El lanzamiento de un dado homogéneo, o de una moneda, sobre una superficie plana.
 - La selección de una tarjeta, de entre cinco que son idénticas y que han sido perfectamente mezcladas.
 - Extraer una carta de una baraja.
 - El resultado de un partido de fútbol.
 - El rendimiento de un cultivo.
 - El incremento en peso de un animal.
2. Involucre a los estudiantes en la búsqueda de información relacionada con las aplicaciones prácticas de los experimentos aleatorios para resolver problemas de la vida cotidiana, en función de que estos entiendan el porqué de su estudio, en qué situaciones van a poder utilizarlos y qué utilidad tienen en sus vidas.

■ Actividades colaborativas

Organiza a los estudiantes por equipos, quienes se encargarán de construir medios de enseñanza-aprendizaje para activar y motivar el proceso del tratamiento de combinaciones simples y sus relaciones con los sucesos aleatorios. Pueden elaborar conjuntos de objetos con determinadas características que se puedan utilizar para establecer diferentes combinaciones con ellos, como muñecos de madera, tela u otro material con gorras, pantalones o zapatos diferentes que se puedan intercambiar para crear situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Proponga a los estudiantes ejercicios, problemas y actividades en los que tengan que comprobar si una situación representa o no a uno de los sucesos compatibles, incompatibles o contrarios, utilizando el sistema de características de estos conceptos.
- Comience el trabajo para la asimilación de estos conceptos a partir de la definición o la explicación de los mismos, y la determinación de una actividad apropiada para la identificación o trabajo con ellos.
- Proyecte actividades relacionadas con la determinación de la pertenencia o no de relaciones a los conceptos que se trabajan en este apartado, utilizando ejercicios en los que se aumenta sistemáticamente su grado de dificultad.
- Organice y dirija la ejecución de acciones (por etapas) y ejercicios cuidadosamente seleccionados, graduados en dificultad y variados, de manera que garantice un proceso didáctico que promueva el ejercicio de la comunicación, la interacción y la crítica sobre las propias soluciones, como condición necesaria para un aprendizaje desarrollador.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Estimule a derivar consecuencias de las definiciones de estos conceptos y a establecer conjeturas relacionadas con ellos.
- Plantee situaciones en las que los estudiantes tengan que considerar o construir ejemplos y contra ejemplos, así como señalar casos límites y casos especiales.

7

Experimentos aleatorios. Sucesos

7.5 Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios

Dos sucesos son **compatibles** si tienen al menos un suceso elemental en común. Dos sucesos son **incompatibles** si no tienen ningún suceso elemental en común.

Ejemplo 7

Si se extrae al azar una bola de la urna de la Figura 2, es posible determinar los siguientes sucesos:

H : "sacar una bola con el número 8"

G : "sacar una bola de color verde"

Estos dos sucesos son compatibles porque pueden verificarse al mismo tiempo: se puede extraer una bola de color verde que tenga el número 8.

Por su parte, los sucesos P : "sacar una bola roja" y Q : "sacar una bola con un número impar" son incompatibles, porque cualquier bola que se extraiga de esa urna no puede ser roja y tener un número impar al mismo tiempo.

Se llama **suceso contrario** de A al suceso que ocurre siempre que no ocurra A y se expresa de la forma $\bar{A}$. Los sucesos contrarios también se llaman **complementarios**.

Ejemplo 8

En el experimento que consiste en el lanzamiento de un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6, el suceso contrario a A : "salir número par" = $\{2, 4, 6\}$ es el suceso $\bar{A}$: "salir número impar" = $\{1, 3, 5\}$.

Observa que si se verifica el suceso A no se verifica el suceso contrario $\bar{A}$ y viceversa.

7.6 Sucesos equiprobables

Los **sucesos equiprobables** son aquellos que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Ejemplo 9

En la Figura 3 se muestra una urna con tantas bolas rojas como azules. Los sucesos A : "sacar una bola roja" y B : "sacar una bola azul" son equiprobables, ya que es igual de probable extraer una bola roja o una bola azul de la urna.

Actividad resuelta

Comunicación

- Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos, indica algunos sucesos y escribe el suceso contrario.

- Lanzar una moneda
- Lanzar un dado especial (Figura 4)

Solución:

En la Tabla 3 se indican los sucesos y sus contrarios.

Experimento	Espacio muestral	Algunos sucesos	Sucesos contrarios
Lanzar una moneda	$E = \{\text{cara, sello}\}$	$A = \{\text{cara}\}$ $B = \{\text{sello}\}$	$\bar{A} = \{\text{sello}\}$ $\bar{B} = \{\text{cara}\}$
Lanzar un dado especial	$E = \{1, X, 2\}$	$A = \{1\}$ $B = \{X, 2\}$ $C = \{1, X\}$ $D = \{X\}$	$\bar{A} = \{2, X\}$ $\bar{B} = \{1\}$ $\bar{C} = \{2\}$ $\bar{D} = \{1, 2\}$

Tabla 3

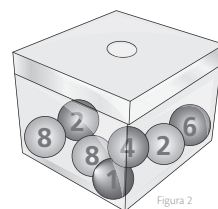


Figura 2

Ten en cuenta

El contrario del suceso seguro (el espacio muestral) es el suceso imposible (el conjunto vacío) y viceversa.

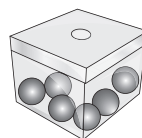


Figura 3



Figura 4

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Escribe tres ejemplos de experimentos aleatorios y tres de experimentos deterministas.
3. Indica si los siguientes experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, escribe el espacio muestral.
 - a. Sacar sin mirar un yogur de una nevera en la que hay yogures de cuatro sabores: fresa, limón, natural y mora.
 - b. Girar una ruleta que tiene los números del 1 al 10.
 - c. Contar el número de personas que suben a un bus en una estación.
 - d. Aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo.
 - e. Saber el ganador de la próxima Liga de Campeones.

4. Considera el experimento "extraer un papel de una bolsa en la que hay 100 papeles numerados del 00 al 99". Escribe tres sucesos de cada categoría mencionada.
 - a. elementales b. compuestos c. imposibles

Ejercitación

5. Forma el espacio muestral de los experimentos aleatorios que se describen a continuación.
 - a. Se lanza una moneda y se espera que caiga cara.
 - b. Se lanza un dado y se anota el resultado de su cara superior.
 - c. Se extrae, sin mirar, una bola de una urna en la que hay doce balotas numeradas del 1 al 12.
 - d. Se lanzan dos dados y se anota el resultado de la suma de sus caras superiores.
6. Considera el experimento aleatorio "sacar una bola de una urna en la que hay nueve bolas numeradas del 1 al 9" y encuentra lo siguiente.
 - a. El espacio muestral.
 - b. El suceso A: "sacar un número par"
 - c. El suceso B: "sacar un número mayor que 3"

Razonamiento

7. Establece los diferentes tipos de sucesos para cada experimento.
 - a. Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.
 - b. Se lanza un dado y se anota el resultado de la cara superior.

Ejercitación

8. Observa las ruletas de las Figuras 5 a 8. ¿En cuál de ellas es igual de probable obtener verde que amarillo?
 - a. b. c. d.



Figura 5



Figura 6



Figura 7



Figura 8

Razonamiento

9. Enuncia los sucesos contrarios a los sucesos indicados en cada caso, si se sabe que una bolsa contiene una bola roja, una azul y una negra.

A: "sacar la bola roja"
B: "sacar la bola azul"
C: "sacar la bola negra"
10. Supón que tienes una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9 y realizas el experimento de sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Considera los sucesos: A = "salir un número primo" y B = "salir un número cuadrado".
 - a. Escribe el espacio muestral de los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
 - b. ¿Son A y B sucesos compatibles o incompatibles? Explica.
 - c. Encuentra los sucesos contrarios a A y B.

Resolución de problemas

11. Javier tiene una bolsa con pinturas de color anaranjado, amarillo y rosado. Sin mirar, saca dos pinturas para dárselas a Susana.
 - a. Escribe el espacio muestral.
 - b. Propón dos sucesos compatibles.
 - c. Escribe dos sucesos incompatibles.
12. Describe un experimento aleatorio y, a partir de este, determina lo siguiente.
 - a. El espacio muestral.
 - b. Dos sucesos elementales.
 - c. Dos sucesos compuestos.
 - d. Dos sucesos compatibles.
 - e. Dos sucesos incompatibles.
 - f. Dos sucesos equiprobables.
 - g. Dos sucesos seguros.
 - h. Dos sucesos imposibles.

Comunicación

2. Respuesta abierta
3. a. Sí. $E = \{\text{fresa, melocotón, natural, mora}\}$
b. Sí. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
c. No d. No e. No
4. Respuesta abierta

Ejercitación

5. a. $E = \{\text{cara, sello}\}$ b. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
c. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
d. $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
6. a. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ c. $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Razonamiento

7. Respuesta abierta

Ejercitación

8. En la ruleta a

Razonamiento

9. a. A: "Sacar bola azul o negra"
b. B: "Sacar bola roja o negra"
c. C: "sacar bola azul o roja"
10. a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ y $A \cap B = \emptyset$. b. Incompatibles
c. $\bar{A}$: "Salir número compuesto" = $\{4, 6, 8, 9\}$
 $\bar{B}$: "Salir número no cuadrado" = $\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

Resolución de problemas

11. a. $E = \{\text{naranja y amarillo, amarillo y rosa, rosa y naranja}\}$
b. y c. Respuesta abierta
12. Respuesta abierta

Libro del alumno

Ampliación conceptual

La probabilidad es una medida cuantitativa de que las posibilidades pueden llegar a ser realidades.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Introduzca el tema vinculado a los juegos de azar, pues en definitiva, la teoría de las probabilidades surge en los siglos XVI-XVIII relacionada con problemas producto de este tipo de juegos.
- Utilice las potencialidades de este tema para contribuir a consolidar la concepción científica del mundo en los estudiantes al aprender estos cómo solucionar problemas no deterministas, que tanta presencia tienen en la vida y asimilar cómo las abstracciones probabilístico-estadísticas son un reflejo de la realidad.
- Presente anécdotas curiosas y pequeños datos biográficos de grandes hombres de ciencia vinculados a las probabilidades como los casos de P. Fermat, B. Pascal y Laplace, los que luego serán tratados con mayor profundidad en la actividad colaborativa propuesta, relacionada con la evolución cultural e histórica de la teoría de las probabilidades. Esto ayudará a los estudiantes a entender y comprender el contexto histórico que enmarca los conceptos que se abordan, y es una útil oportunidad para generar un aprendizaje vivencial en función de que estos puedan enfrentar los aspectos relacionados con este tema como la contemplaron inicialmente quienes fueron sus iniciadores.

8

Probabilidad

Explora

Para participar en una rifa en la que juegan cien números, la familia Ramírez compró tres boletos, la familia Suárez compró quince boletos y la familia Pérez compró nueve boletos.



- ¿Cuál familia tiene mayor probabilidad de ganar? ¿Cuál tiene menor probabilidad de ganar?

Ten en cuenta



Pierre Simon, marqués de Laplace (1749-1827).

Fue un Astrónomo, físico y matemático francés que enunció la primera definición de probabilidad.

La familia que adquirió la mayor cantidad de boletos es la que tiene mayor probabilidad de ganar; en este caso, es la familia Suárez porque compró quince boletos. De otro lado, la familia Ramírez tiene menos probabilidad de ganar, pues adquirió menos boletos que las otras dos familias.

La **probabilidad de un suceso** indica las posibilidades que tiene de ser verificado un experimento aleatorio.

8.1 Asignación de probabilidades. Regla de Laplace

En 1812, el matemático francés Pierre Simón, marqués de Laplace, dio la primera definición de probabilidad. Esta es:

Regla de Laplace. Si todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables, se verifica la probabilidad de un suceso así:

$$\text{Probabilidad del suceso } A = P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo 1

Para determinar la probabilidad de que cada familia mencionada gane la rifa, se halla el cociente entre la cantidad de boletos comprados por cada familia y el total de boletos de la rifa.

Familia Ramírez	Familia Suárez	Familia Pérez
$\frac{3}{100} = 0,03 = 3\%$	$\frac{15}{100} = 0,15 = 15\%$	$\frac{9}{100} = 0,09 = 9\%$

Tabla 1

Ejemplo 2

En un salón de clases hay 18 niñas y 22 niños. Si se realiza una rifa, la probabilidad de que gane una niña es:

$$\frac{18}{40} = 0,45 = 45\%$$

Ejemplo 3

Para el viaje de fin de curso, los estudiantes organizaron una tómbola con 500 papeletas numeradas del 1 al 500. Juan compró una papeleta y Marta, cuatro. ¿Qué oportunidades de ganar tiene cada uno?

Como todos los números son equiprobables y Juan tiene una papeleta de las 500 vendidas, entonces se dirá que tiene una oportunidad entre 500 o que la probabilidad de que Juan gane viene dada por la fracción $\frac{1}{500}$. Como Marta tiene cuatro papeletas, tendrá cuatro oportunidades entre 500 de ganar; o sea que la probabilidad de que gane Marta viene dada por la fracción $\frac{4}{500}$.

Ejemplo 4

En una bolsa se depositan diez tarjetas numeradas del 0 al 9. Si se extrae una tarjeta al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

- A: "salir 3"
- B: "salir múltiplo de 4"
- C: "salir 13"
- D: "salir número compuesto"

$$\text{a. } \frac{1}{10} \quad \text{b. } \frac{1}{5} \quad \text{c. } \frac{0}{10} = 0 \quad \text{d. } \frac{2}{5}$$

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.

8.2 Escala de probabilidades

La probabilidad de que un suceso ocurra se mide con un número comprendido entre 0 y 1.

Ejemplo 5

Al lanzar una moneda al aire, se pueden establecer los sucesos que se muestran en la Tabla 2, junto con su respectiva probabilidad.

Suceso	Tipo de suceso	Probabilidad
Caer cara o sello	$A = \{C, S\}$	Seguro $\frac{2}{2} = 1 = 100\%$
Caer sello	$A = \{S\}$	Elemental $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$
Caer cara	$A = \{C\}$	Elemental $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$
No caer ni cara ni sello	$\emptyset$	Imposible $\frac{0}{2} = 0 = 0\%$

Tabla 2

Ejemplo 6

Si se extrae sin mirar una bola de las siguientes bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?

Bolsa A	Bolsa B	Bolsa C	Bolsa D	Bolsa E
Es imposible extraer una bola verde. Hay cero oportunidades entre cuatro.	Hay una oportunidad entre cuatro de extraer una bola verde.	Hay dos oportunidades entre cuatro de extraer una bola verde.	Hay tres oportunidades entre cuatro de extraer una bola verde.	Es seguro extraer una bola verde. Hay cuatro oportunidades entre cuatro.
$P(\text{verde}) = \frac{0}{4} = 0$	$P(\text{verde}) = \frac{1}{4} = 0,25$	$P(\text{verde}) = \frac{2}{4} = 0,5$	$P(\text{verde}) = \frac{3}{4} = 0,75$	$P(\text{verde}) = \frac{4}{4} = 1$

Tabla 3

8.3 Propiedades de la probabilidad

- La probabilidad del suceso imposible es 0.
- La probabilidad del suceso seguro es 1.
- La probabilidad del suceso contrario a A es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Actividad resuelta

Ejercitación

- 1 Calcula la probabilidad del suceso "sacar una bola de color rojo" de la urna de la Figura 1 y la probabilidad del suceso contrario.

Solución:

Como en la urna hay 20 bolas, la probabilidad de sacar una bola roja es:

$$P(A) = \frac{14}{20} = 0,7$$

$$\text{Por lo tanto: } P(\bar{A}) = 1 - \frac{14}{20} = \frac{6}{20} = 0,3.$$

Entonces, la probabilidad de sacar una bola verde es 0,3.

Cálculo mental

Pasar un decimal a porcentaje

Para expresar un número decimal como un porcentaje, se multiplica el número por 100. Por ejemplo, el número 0,34 equivale al 34% porque $0,34 \cdot 100 = 34\%$.

- Escribe como porcentaje los números 0,25 y 0,7.

Ten en cuenta

De la igualdad

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

se obtiene la igualdad

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

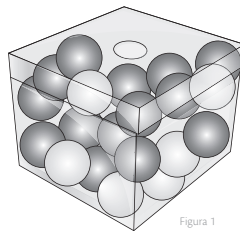


Figura 1

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://recursos.tic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/elazarylaprobabilidad/html/actividad_1_probabilidades.html
Aprende más sobre espacio muestral y probabilidad.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Proponga también a los estudiantes actividades que impliquen otros significados de la probabilidad de un suceso para que fijen que, independientemente de las diferentes interpretaciones que puede tener la probabilidad, en todos los casos sigue siendo el mismo procedimiento.

2. Presente ejercicios relacionados con las definiciones frecuencial, clásica, axiomática y geométrica de probabilidad. Por ejemplo la definición geométrica de probabilidad es de mucha aplicación en diferentes contextos de actuación de los estudiantes. Por ejemplo, la probabilidad de que un conducto de 5 metros de longitud sufra una avería en la parte comprendida entre los dos primeros metros es igual a $\frac{2}{5}$.

■ Actividades colaborativas

Organiza a los estudiantes por equipos y crea dentro de ellos pequeños grupos de trabajo, de cuatro a cinco integrantes, que se encargarán de buscar información en relación con la evolución cultural e histórica de la teoría de las probabilidades, y fundamentalmente sobre la vida y obra de P. Fermat, B. Pascal y Laplace, centrando la atención sobre la necesidad de que tomen conciencia de la interacción que se da entre los contenidos de este tema y las situaciones que lo impulsaron y del impacto que tienen en nuestra cultura y en nuestras vidas. De tal manera estos pueden entender y hacer comprender el contexto histórico y cultural que enmarca el concepto de probabilidad de un suceso.

Ejercitación

2. a. $P(A) = \frac{3}{6}$ b. $P(B) = \frac{3}{6}$
 c. $P(C) = \frac{2}{6}$ d. $P(D) = \frac{1}{6}$
 e. $P(A) = \frac{3}{6}$
3. a. $\frac{5}{9}$ b. $\frac{3}{9}$ c. $\frac{1}{9}$
 d. $\frac{4}{9}$ e. $\frac{8}{9}$ f. $\frac{6}{9}$
4. a. $\frac{10}{21}$ b. $\frac{5}{21}$ c. $\frac{11}{21}$ d. $\frac{15}{21}$
5. a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{3}$ d. 0

Razonamiento

6. a. $\frac{1}{9}$ b. $\frac{3}{9}$ c. $\frac{3}{9}$ d. $\frac{3}{9}$
7. a. $\frac{1}{10}$ b. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{3}{10}$ d. $\frac{3}{10}$
 e. $\frac{1}{2}$ f. $\frac{7}{10}$ g. $\frac{7}{10}$ h. $\frac{0}{10}$
8. Verificar validez
9. Verificar validez
10. a. $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$
 b. Suceso seguro: A: "suma menor que 13".
 $P(A) = 1$.
 c. Respuesta abierta
 d. Respuesta abierta
 e. Respuesta abierta

8

Probabilidad

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Halla la probabilidad de cada suceso, si el experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.
- a. A: "salir par"
 b. B: "salir impar"
 c. C: "salir múltiplo de 3"
 d. D: "salir múltiplo de 5"
 e. E: "salir número primo"
3. Calcula la probabilidad de cada suceso, si el experimento consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene cinco bolas rojas, tres azules y una amarilla.
- a. Que sea roja. b. Que sea azul.
 c. Que sea amarilla. d. Que no sea roja.
 e. Que no sea amarilla. f. Que no sea azul.
4. Lee y resuelve.
- Se escoge al azar un dulce de una caja donde hay diez de menta, seis de fresa y cinco de caramelo. Halla las siguientes probabilidades.
- a. Que sea de menta. b. Que sea de caramelo.
 c. Que no sea de menta. d. Que no sea de fresa.
5. Analiza y resuelve.
- Se lanza un dado que tiene dos caras con el número 1, dos caras con el número 2 y dos caras con el número 3. Halla la probabilidad de que al lanzarlo, la cara superior muestre las siguientes opciones.
- a. El número 1. b. El número 2.
 c. El número 3. d. El número 6.

Razonamiento

6. Halla la probabilidad del evento que se indica en cada caso, si el experimento consiste en extraer de forma aleatoria una bola identificada con algún número entre 1 y 9.
- a. Que la bola tenga el número 5.
 b. Que la bola muestre un número menor que 4.
 c. Que la bola esté identificada con un número mayor que 6.
 d. Que la bola muestre un número mayor que 2 pero menor que 6.

7. Resuelve.

- Lucía escribe cada uno de estos números en un papel. Después los dobla y selecciona uno de ellos al azar.

1 2 2 3 3 4 5 8 8 9

Calcula la probabilidad de que el papel que elija Lucía muestre el número o números que cumplan cada condición.

- a. El 5. b. Mayor que 4.
 c. Divisible entre 3. d. Múltiplo de 4.
 e. Par. f. Menor que 6.
 g. Menor o igual que 6. h. Mayor que 9.

8. Lee y resuelve.

- Oscar le pide a Alberto que elija un número cualquiera del conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a. Escribe los elementos de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades.

A: "elegir un número mayor que 3"

B: "elegir un número par"

C: "elegir un número distinto de 7"

b. Escribe los elementos de los sucesos contrarios. Calcula sus probabilidades.

c. ¿Hay algún suceso imposible? ¿Hay algún suceso seguro?

9. Calcula la probabilidad de sacar al azar una carta con la figura que se indica en cada caso, sabiendo que se toma de una baraja española que consta de 40 cartas.

- a. Una copa.
 b. Una sota.
 c. La sota de copas.



10. Halla lo que se pide en cada caso, si se efectúa un experimento que consiste en lanzar dos dados cúbicos y cada una de sus caras muestra un número entre 1 y 6.

- a. El espacio muestral.
 b. Un suceso seguro y su probabilidad.
 c. Tres sucesos equiprobables.
 d. Tres sucesos compuestos y la probabilidad de cada uno.
 e. Un suceso imposible y su probabilidad.

Bloque de Estadística y Probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.

Resolución de problemas

- 11 Una fábrica de bombillas tiene dos máquinas. La máquina A produce cuatro bombillas defectuosas por cada 250 bombillas fabricadas. El número de bombillas defectuosas que produce la máquina B es de seis por cada 400 fabricadas.

Nubia tiene una bombilla que funciona. ¿Con cuál máquina es más probable que se haya fabricado?

- 12 Una pareja espera mellizos. Calcula las probabilidades de
- todos los sucesos relativos al sexo de los recién nacidos.



- 13 Tres atletas, A, B, y C, participan en una carrera. Considerando que no llegan a la meta al mismo tiempo, halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

- a. Que gane A. b. Que C llegue de último.
c. Que gane A o B d. Que gane C.

- 14 La probabilidad de que un estudiante cualquiera llegue tarde a clase es $\frac{1}{15}$. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue temprano?

- 15 Juan y Pilar juegan con unos dados cúbicos especiales:
- sus caras están numeradas con los seis primeros números primos.



- a. Escribe todos los resultados que pueden obtener si lanzan los dos dados. Calcula el producto de las puntuaciones de cada uno.
b. Analiza el juego que propone Juan y explica de forma razonada por qué Pilar no acepta las condiciones.

- 16 Una baraja de 52 cartas está compuesta por trece cartas de corazones rojos, trece cartas de diamantes rojos, trece cartas de tréboles negros y trece cartas de picas negras. De las trece cartas de cada grupo una es as, nueve están numeradas del 2 al 10 y las restantes son las letras J, Q y K. Se mezclan muy bien y se saca una carta. Calcula lo siguiente.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta roja?
b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una letra?
c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número?
d. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un siete negro?
e. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as?
f. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par rojo?
g. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número impar?
h. Menciona un suceso seguro.
i. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario a sacar un as?

- 17 Calcula la probabilidad de las siguientes situaciones.

- a. Descubrir un número mayor que 10 pero menor que 50, cuyas cifras sean todas diferentes.
- b. Adivinar un número de cuatro cifras si lo único que sabes es que tiene seis unidades de mil.

- 18 Jorge debe hacer una exposición sobre el cosmos y puede escoger al azar dos elementos entre dos grupos diferentes. El primer grupo tiene como opciones planetas y satélites y el segundo tiene como opciones nebulosas, estrellas y asteroides.



¿Cuál es la probabilidad de que Jorge exponga sobre estrellas y satélites? Como pista puedes llenar la Tabla 4.

	Planetas	Satélites
Nebulosas		
Estrellas		
Asteroides		

Tabla 4

Resolución de problemas

11. Máquina B

12. A: "sean dos niños", B: "sean dos niñas" y C: "sea un niño y una niña". La probabilidad de cada suceso es $\frac{1}{3}$.

13. a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{1}{3}$

14. $\frac{14}{15}$

15. a. $E = \{(2,2), (2,3), (2,5), (2,7), (2,7), (2,13), (3,3), (3,5), (3,7), (3,1), (3,13), (5,5), (5,7), (5,1), (5,13), (7,7), (7,11), (7,13), (11,11), (11,13), (13,13)\}$

Productos = {4, 6, 10, 14, 22, 26, 9, 15, 21, 33, 39, 25, 35, 55, 65, 49, 77, 91, 121, 143, 169}

b. Es un suceso imposible.

16. Respuesta abierta

17. a. $\frac{1}{35}$ b. $\frac{1}{127}$

18.

	Planetas	Satélites
Nebulosas	Nebulosas y planetas	Nebulosas y satélites
Estrellas	Estrellas y planetas	Estrellas y satélites
Asteroides	Asteroides y planetas	Asteroides y satélites

UNIDAD
5

Evaluación sumativa

1. Un grupo de pacientes de un hospital se clasifica atendiendo a los diferentes aspectos que se listan a continuación. Clasifica cada variable estadística en cualitativa o cuantitativa. En caso de ser cuantitativa, indica si es discreta o continua.

- A. Enfermedad que padece.
B. Cantidad de veces que ha asistido al hospital.
C. Sexo del paciente.
D. Peso en kilogramos al llegar.

2. En un torneo de fútbol se obtuvo la siguiente información sobre el número de goles anotados por cada equipo participante:
- ¿Cuántos equipos participaron en el torneo?
 - ¿Qué tipo de variable se observó?
 - ¿Cuántos equipos anotaron menos de 25 goles?

28 – 22 – 26 – 23 – 27 – 22 – 25 – 26 – 27 – 23 – 22 – 28 26 – 25 – 22 – 28 – 24 – 23 – 28 – 24 – 25 – 22 – 26 – 27					
Mascota	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa			Frecuencia acumulada
		Fracción	Decimal	Porcentaje	
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					

Nombre:

Grado: Fecha:

3. En un supermercado se hizo un estudio sobre el tipo de refrescos vendidos en un día y se obtuvieron los datos de la tabla

Tipo	Botellas vendidas
De limón	150
De naranja	200
Cola	400
Otros	50

Responda según la información:

- A. ¿Cuál es el porcentaje de venta de cada sabor de refresco?
B. ¿Cuál es la frecuencia acumulada?

4. La siguiente tabla muestra parte de la información de un estudio sobre sabores favoritos de helados: completa la tabla

Sabor favorito	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
Chocolate	7		
Almendra	10		
Vainilla	8		
Fresa	9		
Mantecado	4		

- A. Representa la cantidad de personas que prefiere cada sabor de helado con un diagrama circular

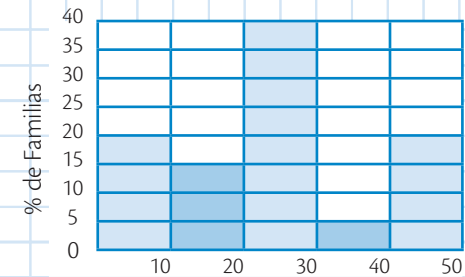
5. En la siguiente tabla se muestran las edades de 100 trabajadores de un centro, seleccionados para participar en un estudio estadístico. Halla la edad promedio de estos trabajadores.

Edades	26	28	29	30	31
# de trab.	10	20	30	25	15

6. Las edades de los integrantes de un equipo son:
11, 13, 14, 11, 12, 11, 13, 11, 11, 12, 13
¿Cuál es la mediana de estos datos?

7. De la experiencia aleatoria de lanzar un dado, escriba los sucesos que se indican a continuación:
- Sacar un número par
 - Sacar un número primo
 - Sacar un número mayor que cuatro
 - Sacar un número menor que siete

8. El Gobierno promovió una campaña de reducción del gasto de agua. El diagrama de barras de la figura representa el agua ahorrada por las familias que formaron parte de la muestra utilizada para estudiar la bondad de esta medida.



- ¿Qué porcentaje de familias de la muestra ahorró entre 10 litros y 30 litros diarios?
 - 12 familias de la muestra ahorraron menos de 10 litros diarios. ¿Cuántas familias ahorraron entre 30 L y 40 L diarios?
9. Determina cuál es la probabilidad de que Mario reserve una habitación con vista al mar, si el hotel donde se va a hospedar tiene dos habitaciones disponibles con vista al mar y cuatro que dan a la calle.

UNIDAD

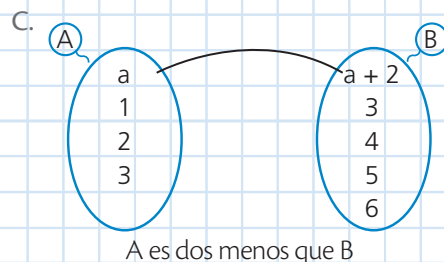
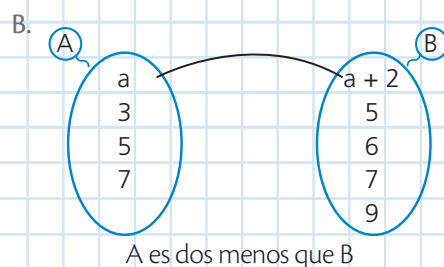
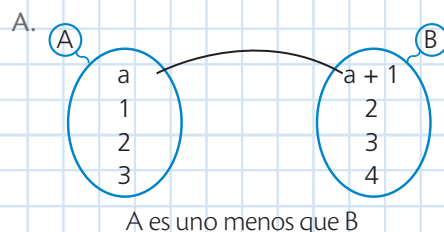
6

Evaluación diagnóstica

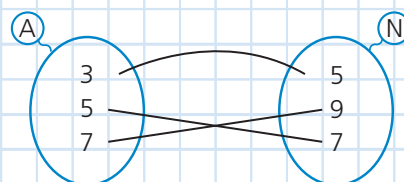
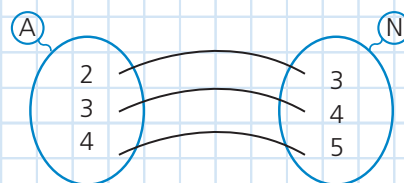
Nombre:

Grado: Fecha:

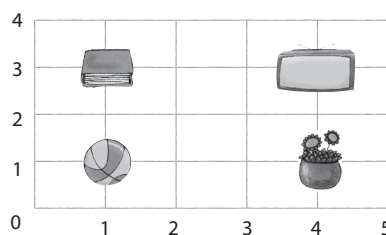
1. Para establecer una comparación entre el número de animales de cada clase, los abuelos de Roberto plantearon algunas correspondencias. Completa los diagramas para encontrar los valores de B que le corresponden a los elementos de A.



2. Para establecer la relación entre el número de adultos y de niños que asisten a la biblioteca se realizan los siguientes esquemas. Determina cuál es la relación que existe entre los elementos de los dos conjuntos.



3. La televisión está ubicada en las coordenadas:



- A. (1, 1) B. (1, 3)
C. (4, 3) D. (5, 1)

4. Para los siguientes ejercicios responde si es falso o verdadero y justifica tus respuestas.

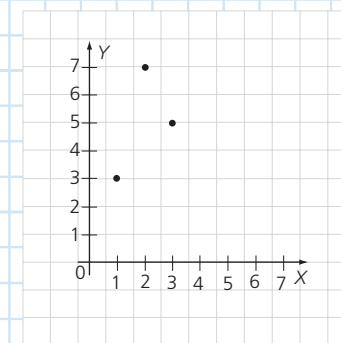
A. El número $-\frac{3}{5}$ es racional. ()

B. Al ubicar las fracciones $-\frac{7}{3}$, $-\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$, en la recta numérica, se observa que se encuentran ubicados entre los enteros -3 y -2 ; -1 y 0 ; 0 y 1 , respectivamente. ()

C. Al escribir la fracción $\frac{7}{20}$ como decimal se obtiene el número 0.53. ()

D. Todos los números racionales tienen expresión decimal finita. ()

5. Dada la siguiente gráfica determine qué figura se forma al unir sus puntos.



Propósito de la unidad

Bloque de álgebra y funciones.

En este bloque los estudiantes comenzarán con el estudio de la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico, o sea, comenzará a transformar oraciones simples en ecuaciones y viceversa, realizarán el estudio de las expresiones algebraicas y los términos que la conforman y por ende la forma de resolver cada expresión según su algoritmo de trabajo. Comenzarán el estudio de las coordenadas rectangulares y dentro del mismo, reconocerán las figuras que se pueden formar, representando varios puntos en el sistema, se abordarán los elementos fundamentales del sistema de coordenadas y sus cuadrantes. Se abordarán las parejas ordenadas en los conjuntos numéricos de los racionales y los enteros. Se abordará nuevamente el estudio de las funciones, comenzando por el concepto de función y la relación entre los elementos del conjunto de partida y los elementos del conjunto de llegada.

Bloque de geometría y Medida

En esta unidad se abordarán temas fundamentales como son el estudio de la teoría de las proposiciones donde los estudiantes serán capaces de identificar, una vez impartido el tema, el tipo de proposiciones que se les presenten, ya sean simples o compuestas, además de reconocer los conectivos lógicos que se utilizan en cada uno. Estudiarán la negación de proposiciones simples donde aplicará el razonamiento lógico-matemático para proceder con los temas sobre las proposiciones compuestas

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar los conceptos en los que se pueden encontrar dificultades. En este caso, se evaluarán temas de contenidos conocidos por los estudiantes como las funciones y la representación gráfica de parejas de ordenadas en diferentes dominios numéricos, los enteros y los racionales, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo que se proponen diferentes actividades para asegurar las bases para un excelente desarrollo, por parte del docente y comprensión por parte de los estudiantes. Se evaluarán temas correspondientes a los dominios numéricos de los enteros y los racionales.

Formativa

Para desarrollar las destrezas con criterios de desempeño, enfocado a los dominios numéricos, los estudiantes deberán identificar cuando se está en presencia de proposiciones simples y cuándo en presencia de proposiciones compuestas, además, de reconocer los conectivos lógicos que se encuentren en cada proposición, resolverán problemas donde transformarán del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa, además de aplicar el cálculo del valor numérico de una expresión algebraica dado el valor de una de las variables o de todas la variables de la expresión, se evaluarán los conocimientos adquiridos con las parejas ordenadas con números enteros y las parejas ordenadas con números racionales. Se evaluarán algunos elementos sobre las funciones, como

la relación entre conjunto y las funciones de proporcionalidad directa.

Sumativa

Para evidenciar si los niños desarrollaron las destrezas con criterio de desempeño propuestas en esta unidad se evaluarán los temas impartidos mediante la misma con ejercicios sencillos e integradores donde los estudiantes serán capaces de aplicar los nuevos conocimientos y desarrollar las destrezas adquiridas sobre los temas evaluados, incluyendo las funciones de proporcionalidad inversa.

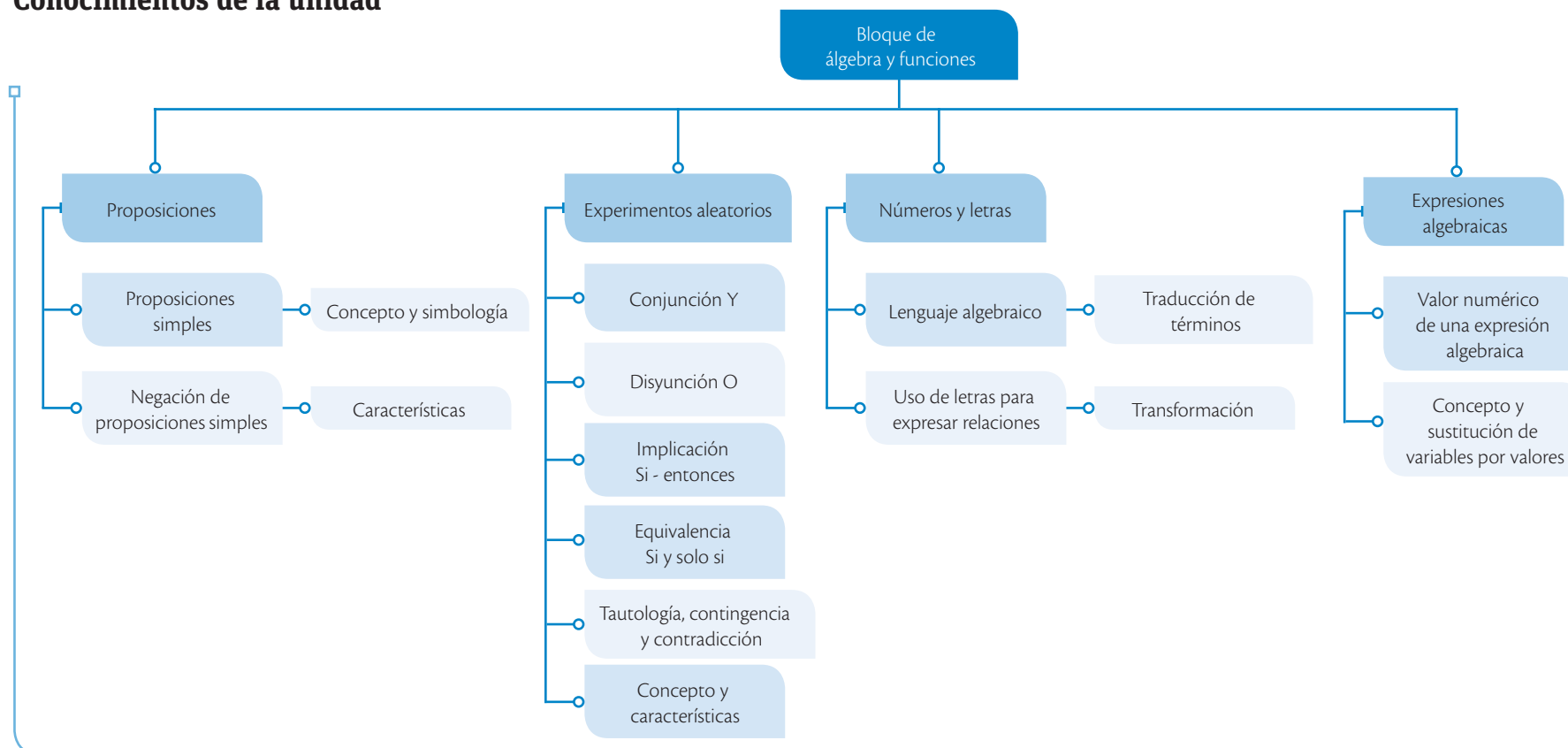
Respuestas

Evaluación diagnóstica

1. a) 1 -2; 2-3; 3 -4; b) 3 -5; 5 -7; 7 -9; c) 1 -3; 2 -5;
2. a) A es uno menos que N
b) A es dos menos que N
3. (4, 3)
4. a. V b. V c. F d. F
5. Se forma un triángulo

Esquema conceptual

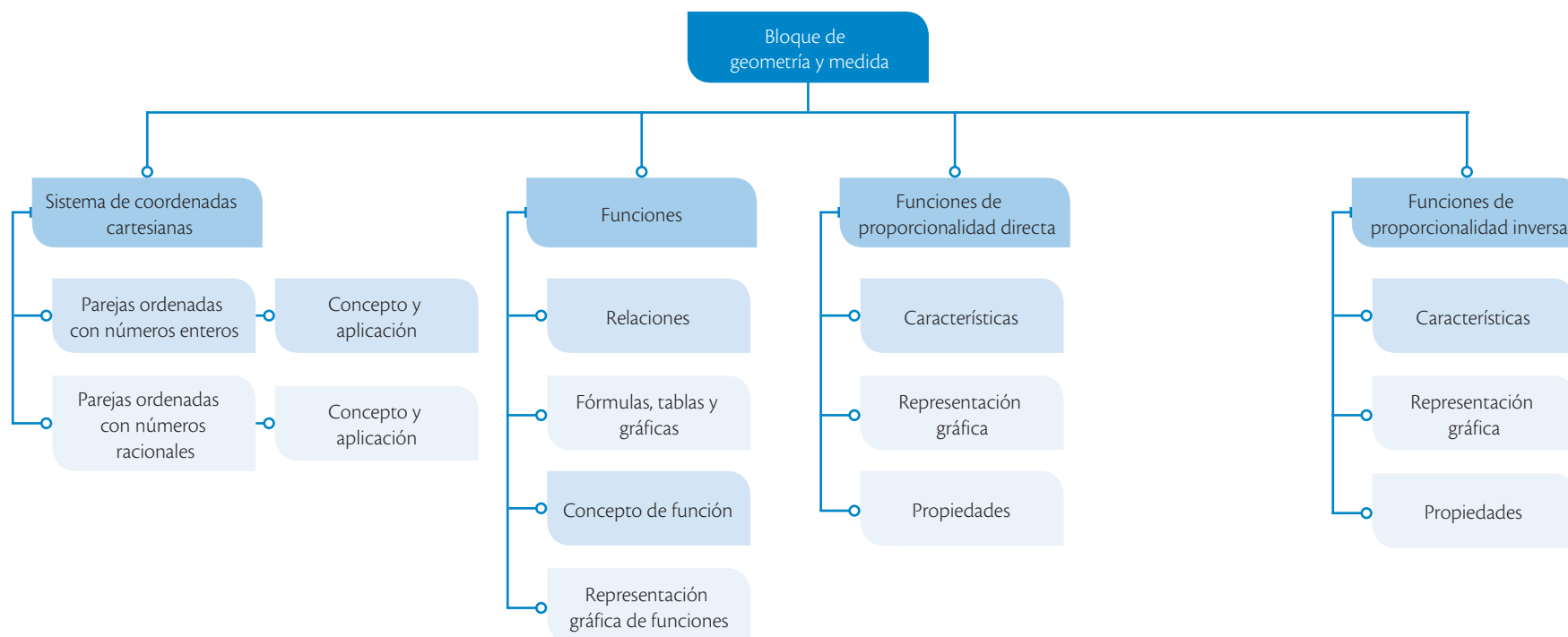
Conocimientos de la unidad



Cultura del Buen Vivir

■ Valor: La comunicación

Este valor permite a las personas intercambiar de forma efectiva pensamientos, ideas y sentimientos en un ambiente de cordialidad.



■ Compromiso a lograr

Con el desarrollo de los temas incluidos en la siguiente unidad didáctica los estudiantes actuarán de manera organizada, con autonomía e independencia; serán capaces de aplicar el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicar la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida, lo que les permitirá comunicarse de manera clara y utilizar varios lenguajes para la comunicación.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica				
Unidad 6: leyes de la lógica y funciones				
Objetivos generales del área		Objetivos del área por subnivel		
OG.M.1. – OG.M.6.		O.M.4.4		
Objetivos de subnivel		Valores		
OI.4.2. – OI.4.7. – OI.4.12.		• La comunicación (I.3, I.4.)		
Criterios de evaluación		Indicadores de evaluación		
CE.M.4.4.		I.M.4.4.1.		
Objetivos de la unidad				
• Elevar sistemáticamente las exigencias, para propiciar con la aplicación de los nuevos contenidos, el desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes. • Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas. • Representar funciones de forma gráfica, y analizar sus características.				
Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas. • Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas. • Ubicar pares ordenados con números enteros y racionales, en el plano cartesiano. • Calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos para definir relaciones binarias (subconjuntos) representándolas con pares ordenados. • Definir y reconocer funciones lineales en $\mathbb{Z}$, en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología.	• Socialice con los estudiantes el concepto de par ordenado. • Pregunte a los estudiantes: ¿cómo se representa un par ordenado y cuáles son las variables más utilizadas?,¿cuáles son las características principales para formar un sistema de coordenadas rectangulares?, y ¿cómo se determina dada una figura, las coordenadas de sus vértices?	• Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos.	Actividad: representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos. Clasifica la figura formada según sus lados.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
	Definir y reconocer funciones de proporcionalidad inversa en Z, en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología.	- Aplice los conocimientos previos para trabajar el tema de las coordenadas. - Pida a los estudiantes que representen varios puntos en un sistema de coordenadas y determinen y nombren la figura que se forma al unir los puntos en el plano.	Expresa enunciados en lenguaje algebraico.	Técnica: observación Instrumento: registro descriptivo
Geometría y medida	- Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado). - Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado). - Definir y reconocer una tautología para la construcción de tablas de verdad. - Conocer y aplicar las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas	- Socialice con los estudiantes el concepto de proposición. - Active el conocimiento sobre las proposiciones simples y compuestas y sus características dentro de los racionales. - Converse con los estudiantes sobre lo ¿cómo convertir una proposición simple a una proposición compuesta? Pregunte a los estudiantes: ¿Cómo podemos determinar cuándo estamos en presencia de una proposición simple? Y ¿cuándo estamos en presencia de una proposición compuesta? - Haga alusión a los conectivos y su aplicación para trabajar con cada una de las proposiciones. - Pídales que reconozcan algunos ejemplos de proposiciones simples y compuestas mostradas en el pizarrón. Pídales que mencionen los conectivos utilizados en cada proposición. - Solicite a los estudiantes que resuelvan los ejercicios sobre la veracidad o falsedad de proposiciones propuestas por el docente.	- Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos como funciones. - Utiliza conectivos lógicos, tautologías y la lógica proposicional en la solución de ejercicios. - Encuentra el valor numérico de una expresión algebraica.	Actividad: identifique las proposiciones simples y las compuestas; mencione los conectivos utilizados en cada una. Técnica: observación Instrumento: registro descriptivo

Recursos: Reglas, Cartabón, Cintas métricas y Compás,

Bibliografía: Libro básico de octavo grado. Cálculo con trascendentes tempranas Parte 1 James Stewart,

Indicaciones metodológicas complementarias para el trabajo con funciones lineales. Colectivo de autores. Editorial pueblo y Educación.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes varios conceptos de proposición, hasta llegar al concepto de lo que finalmente se propone en matemática, como: enunciado de una verdad demostrada o que se pretende demostrar.
- Plantee proposiciones simples donde los estudiantes integren los contenidos de otras asignaturas, con la matemática, por ejemplo:
 - La Habana es la capital de Cuba ()
 - Quito es la capital más alta sobre el nivel del mar ()
- El docente en esta unidad, y con este tema de las proposiciones simples puede integrar contenidos impartidos recibido por los estudiantes, para consolidar los contenidos. Analice la negación de las proposiciones simples de forma sencilla para una fácil comprensión por los estudiantes.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

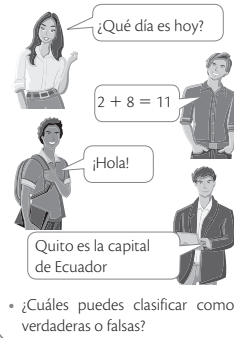
- Solicite a los estudiantes que determinen si son verdaderas o falsa las siguientes proposiciones:
 - El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números enteros ()
 - En el conjunto de los números enteros negativos, el valor mientras más se aleja del cero menor es. ()

1

Proposiciones

Explora

Fíjate en estas expresiones.



Ten en cuenta

No son consideradas proposiciones simples las preguntas, exclamaciones o expresiones que no se encuentran completas; por ejemplo:

¿Qué día es hoy?
¡Hola!
Juan tiene...

1.1 Proposiciones simples

Al leer las expresiones " $2 + 8 = 11$ " y "Quito es la capital del Ecuador", se puede afirmar que la primera es falsa y la segunda verdadera; pero con respecto a las expresiones "¿Qué día es hoy?" y "¡Hola!" no es posible hacer lo mismo.

Según lo anterior, $2 + 8 = 11$ y Quito es la capital de Ecuador son ejemplos de **proposiciones simples**.

Una **proposición simple** es una oración, expresión o enunciado sobre el que se puede asegurar que es verdadero o falso.

Las proposiciones simples se simbolizan con letras minúsculas (como p, q, r, s, t , etc.) y su **valor de verdad** se nota mediante V (si son verdaderas) o F (si son falsas).

Ejemplo 1

Observa los valores de verdad de estas proposiciones.

p : Cali es una ciudad de Colombia	(V)
q : España es un país de América	(F)
r : $15 \cdot 3 = 45$	(V)
s : Perú es una isla	(F)

1.2 Negación de proposiciones simples

Si p es una proposición simple, entonces la **negación de p** —denotada por $\sim p$ (que se lee "no p ")—es otra proposición cuyo valor de verdad es opuesto al de p ; es decir, si p es verdadera $\sim p$ es falsa, y si p es falsa $\sim p$ es verdadera.

Ejemplo 2

Sean las proposiciones simples:

p : La Tierra es plana
 q : 18 es divisible por 3
 r : 21 es un número primo

Entonces, las negaciones de p, q y r son, respectivamente:

$\sim p$: **No es cierto que** la Tierra es plana; o también,
 $\sim p$: La Tierra **no** es plana.
 $\sim q$: **No es cierto que** 18 es divisible por 3; o también,
 $\sim q$: 18 **no** es divisible por 3.
 $\sim r$: **No es cierto que** 21 es un número primo; o también,
 $\sim r$: 21 **no** es un número primo.

Se observa, además, que la proposición p es falsa (F), dado que se conoce con certeza que el planeta Tierra tiene forma esférica curvada, mientras que su negación $\sim p$ es verdadera (V). Con un análisis similar, se deduce que la proposición q es verdadera (V) y su negación $\sim q$ es falsa (F). Por último, la proposición r es falsa (F) y su negación $\sim r$ es verdadera (V).

Si p es una proposición simple, la **negación de su negación**, que se nota como $\sim(\sim p)$, es la misma proposición p .

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado).

Ejemplo 3

La proposición simple p : 2 es un número primo, es verdadera.
La negación de la proposición p —que es $\sim p$: 2 no es un número primo— es falsa.
Por último, la negación de $\sim p$ —que es $\sim(\sim p)$: 2 es un número primo— es de nuevo la proposición p , de la cual se indicó que es verdadera.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Encuentra la negación de las siguientes proposiciones simples.

- a. Los buses articulados de la Ecovía son de color amarillo
- b. $18 + 5 - 3 = 20$
- c. 2 divide a 18

Solución:

- a. Los buses articulados de la Ecovía **no** son de color amarillo
- b. **No es cierto que** $18 + 5 - 3 = 20$
- c. 2 **no** divide a 18



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica cuáles de las expresiones que se muestran a continuación son proposiciones simples.

- a. Mañana comienza el invierno
- b. $14 + 23 = 35$
- c. Al sumar dos números naturales, el resultado obtenido es otro número natural
- d. Caracas es la capital de Venezuela

Razonamiento

3 Copia la Tabla 1 en tu cuaderno y complétala marcando $\checkmark$ donde corresponda.

Proposición	V	F
Hoy es 7 de octubre		
El sistema solar está compuesto por ocho planetas		
$5 \times 8 = 40$		
$6 > 17$		
Los números pares son divisibles por 2		
Gabriel García Márquez es cantante		
No todos los números primos son impares		

Tabla 1

Ejercitación

4 Indica cuáles de las siguientes expresiones no se consideran proposiciones simples. Explica tu respuesta.

- a. Perú es un país europeo
- b. $18 < 21$
- c. 7 en un número primo
- d. ¿Cómo estás?

Comunicación

5 Simboliza las siguientes proposiciones. Luego, escribe la negación de cada una.

- a. La bandera de Ecuador tiene cinco colores
- b. $8 + 36 - 20 = 15$
- c. El producto de dos números naturales es otro número natural
- d. Un metro tiene 98 cm

Razonamiento

6 Determina el valor de verdad de cada proposición y de su negación.

- a. La suma de dos números pares es otro número par
- b. Los animales carnívoros se alimentan exclusivamente de las plantas
- c. Las ballenas son mamíferos
- d. 136 es múltiplo de 4

Resolución de problemas

7 A una reina le gustaba plantear a sus súbditos retos lógicos. En una ocasión les enseñó un cofre con esta inscripción en la parte superior:

Es falso que la joya no está aquí

¿Qué pueden decir los súbditos con respecto a la ubicación de la joya si

- a. la afirmación es verdadera?
- b. la afirmación es falsa?

Ejercitación

2. Todas son proposiciones simples.

Razonamiento

3.

Proposición	V	F
Hoy es 7 de octubre		X
El sistema solar está compuesto por ocho planetas		X
$5 \times 8 = 40$	X	
$6 > 17$		X
Los números pares son divisibles por 2	X	
Gabriel García Márquez es cantante		X
No todos los números primos son impares	X	

Ejercitación

4. Solo a., b. y c. son proposiciones simples porque se puede determinar sin ambigüedad su valor de verdad.

Comunicación

5. Negaciones:

- a. La bandera de Ecuador no tiene cinco colores
- b. No es cierto que $8 + 36 - 20 = 15$
- c. El producto de dos números naturales no es otro número natural.
- d. Un metro no tiene 98 cm.

Razonamiento

6.

Proposición	p	$\sim p$
a.	V	F
b.	F	V
c.	V	F
d.	V	F

Resolución de problemas

7. a. La joya está en el cofre. b. La joya no está en el cofre

Recomendaciones para desarrollar la lección

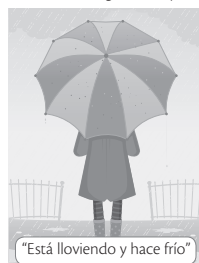
- Analice con los estudiantes las proposiciones simples, estudiadas en el tema anterior como aseguramiento del nivel de partida.
- Explique el concepto que aparece en el libro de texto en la página 236 sobre las proposiciones compuestas, donde los estudiantes serán capaces de relacionar y comparar las simples con las compuestas.
- Explique a los estudiantes mediante ejemplos sencillos, los conectivos lógicos que se utilizan para relacionar las proposiciones simples y convertirlas en compuestas.
- Muestre ejemplos de los nombres que reciben las proposiciones compuestas en función del conectivo que aparezca entre ellas.
- Utilice la asignatura de español para recordar los conceptos de: conjunción, disyunción, implicación, equivalencia, tautología, contingencia y contradicción.
- Muestre para cada uno de los conectivos, ejemplos sencillos para que los estudiantes sean capaces de reconocer el tipo de proposición y el nombre que recibe según el conectivo que aparezca en la misma.
- Analice con los estudiantes los símbolos que deben utilizar para cada conectivo. Conjunción ($\wedge$); disyunción ($\vee$); implicación (si, entonces $\rightarrow$); equivalencia (si y solamente si $\leftrightarrow$); Tautología (verdadera para todos los valores de verdad), contingencia (si no es tautología ni contradicción) y contradicción (si es falsa para todos los valores de verdad).

2

Proposiciones compuestas

Explora

Ten en cuenta la siguiente expresión.



• ¿Es una proposición? ¿Por qué?

Ten en cuenta

El arreglo que permite conocer todos los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones componentes se llama **tabla de verdad**. Así, la tabla de verdad de la conjunción está dada por:

Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 1



Figura 1

La expresión "Está lloviendo y hace frío" está formada por dos proposiciones simples: p : está lloviendo y q : hace frío, unidas por el conectivo lógico y ; por tal razón es una **proposición compuesta**.

Las **proposiciones compuestas** son aquellas conformadas por dos o más proposiciones simples. En una proposición compuesta, las proposiciones simples se combinan mediante las partículas u operadores lógicos y , o , **si... entonces**, **o si y solo si**, los cuales se denominan **conectivos lógicos**.

Ejemplo 1

Las siguientes son proposiciones compuestas.

r : $2 + 2 = 4$ **y** Argentina es un país suramericano

s : Tres es un número par **o** siete es un número primo

t : Si Alberto ganó la lotería, **entonces** es millonario

v : Un triángulo es equilátero **si y solamente si** todos sus lados tienen la misma medida

Una **proposición compuesta** recibe un nombre particular de acuerdo con el conectivo lógico que ligue las dos proposiciones simples: conjunción, disyunción, implicación o equivalencia.

2.1 Conjunción

La **conjunción** es una proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico **y**. Esta proposición es denotada por $p \wedge q$, y se lee " p y q ".

La proposición $p \wedge q$ es verdadera únicamente cuando las proposiciones p y q son ambas verdaderas. Si al menos una de las proposiciones que la conforman es falsa, el valor de verdad de la conjunción es falso (Tabla 1).

Ejemplo 2

La proposición compuesta "3 es un número impar y 10 es divisible por 2" es una conjunción de la forma $p \wedge q$ que es verdadera, pues tanto p como q son proposiciones verdaderas.

Un **circuito lógico** es un conjunto de símbolos y operaciones que satisfacen las reglas de la lógica, simulando el comportamiento de un circuito eléctrico.

Para los interruptores p y q , su conexión en serie (sobre una misma línea) se puede representar como se muestra en la Figura 1.

En este circuito pasará corriente solamente en el caso de que p y q se encuentren cerrados. En otro caso, no habrá paso de corriente.

La Tabla 1 muestra lo que ocurre con el paso de corriente en cada uno de los cuatro casos posibles:

- Si los interruptores p y q están cerrados (o sea, si las proposiciones p y q son verdaderas) hay paso de corriente; es decir, $p \wedge q$ es verdadera.
- Si p está cerrado y q está abierto, no hay paso de corriente: $p \wedge q$ es falsa.
- Si p está abierto y q está cerrado, no hay paso de corriente: $p \wedge q$ es falsa.
- Si tanto p como q están abiertos, no hay paso de corriente: $p \wedge q$ es falsa.

Bloque de Geometría y Medida

Destreza con criterios de desempeño:

Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado).

2.2 Disyunción

La **disyunción** es una proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico **o**. La disyunción de las proposiciones simples p y q se simboliza con $p \vee q$, y se lee " p o q ".

La proposición $p \vee q$ es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones, p o q , es verdadera; es decir, la disyunción solamente es falsa si las dos proposiciones son falsas simultáneamente.

Tabla de verdad de la disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2

Ejemplo 3

Considera este análisis.

Dadas las proposiciones p : La Luna es un satélite natural de la Tierra y q : $9 \times 12 = 100$, entonces $p \vee q$ será la siguiente disyunción:

"La Luna es un satélite natural de la Tierra o $9 \times 12 = 100$ ".

Observa que p es verdadera y que q es falsa; por tanto, $p \vee q$ es verdadera, ya que basta con que una de las proposiciones sea verdadera para que la disyunción también lo sea. Esto se verifica en la Tabla 2.

Dos interruptores se encuentran conectados en paralelo cuando se disponen en un circuito como el que se muestra en la Figura 2. Este tipo de circuito deja pasar corriente si por lo menos uno de los interruptores eléctricos, p o q , está cerrado.

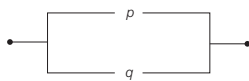


Figura 2

La Tabla 2 de la disyunción se puede interpretar a la luz de este circuito de la siguiente forma:

- Si los dos interruptores (p y q) están cerrados, hay flujo de corriente. En términos lógicos, si tanto p como q son proposiciones verdaderas, la disyunción $p \vee q$ es verdadera.
- Si el interruptor p está cerrado y el interruptor q está abierto, hay paso de corriente. En este caso, $p \vee q$ es verdadera.
- Si el interruptor p está abierto y el interruptor q está cerrado, hay paso de corriente, tal como en el caso anterior. Bajo estas circunstancias, $p \vee q$ es nuevamente verdadera.
- Si tanto el interruptor p como el q están abiertos, no hay posibilidad de que fluya corriente y, por lo tanto, $p \vee q$ es falsa.

Ejemplo 4

La Tabla 3 muestra el valor de verdad de la proposición compuesta $[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee (\sim p)$, para completarla, se van poniendo por separado las proposiciones compuestas mientras va aumentando su complejidad de izquierda a derecha, y el circuito correspondiente se ve en la Figura 3.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge q$	$[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee (\sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V

Tabla 3

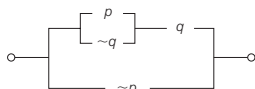


Figura 3

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Ecuador es la Mitad del Mundo si y solo si se encuentra ubicado justo a la Mitad del Mundo (V). Los estudiantes deben reconocer que se cumple la condición, por lo que la proposición es compuesta; equivalente.
2. El conjunto de los números enteros Z está formado por los enteros positivos ($Z+$) y los naturales por los positivos (F). Los estudiantes deben reconocer que el conjunto de los números enteros está compuesto por los naturales y sus opuestos por lo que los enteros positivos coinciden con los naturales..
3. El conjunto de los números naturales N , es un subconjunto del conjunto de los números enteros Z , y el conjunto de los números enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales (V). Los estudiantes deben analizar el enlace, en este caso es una conjunción; por lo que la proposición es verdadera con el conectivo y deben ser ambas verdaderas. Y ciertamente los números naturales son un subconjunto de los enteros, así como los enteros son un subconjunto de los racionales.
4. Un día tiene 24 horas o dos días tienen 72 horas (V). Los estudiantes deben interpretar en este caso la disyunción, implica que al menos una de las dos proposiciones sea verdadera por lo que la proposición es verdadera.

Libro del alumno

■ Actividades colaborativas

El docente elaborará varias tarjetas donde aparecerán proposiciones compuestas, utilizando todos los conectivos para la conformación de las proposiciones. Formará cuatro equipos en el aula. Cada equipo debe resolver los literales que el docente haya propuesto en sus tarjetas; una vez que los equipos hayan resuelto todos sus literales, de forma individual por equipos, el docente procederá a evaluar pero de forma cruzada, o sea, el equipo uno debe resolver en el pizarrón los literales de las tarjetas del equipo tres y el equipo tres evaluará a los estudiantes del equipo uno; los estudiantes del equipo tres, resolverán en el pizarrón los literales del equipo uno, y los estudiantes del equipo uno evaluarán a los estudiantes del equipo tres. El docente procederá a evaluar a los estudiantes de cada equipo (uno y tres) una vez resueltos sus literales, de forma grupal a los equipos y de forma individual a los estudiantes. De igual forma procederán los estudiantes de los equipos dos y cuatro y el docente evaluará su desempeño y la aplicación de los conocimientos adquiridos en clases.

El docente realizará un taller en el aula con el objetivo de resumir el tema de las proposiciones compuestas, elaborará una tabla donde mostrará la esencia de las proposiciones y su relación con todas las asignaturas que reciben y la aplicación de las mismas en la vida práctica.

Bloque de Geometría y Medida

2

Proposiciones compuestas

2.3 Implicación

Tabla de verdad de la implicación

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 4

La implicación o condicional es la proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico **si... entonces...**. En la proposición compuesta "Si p, entonces q" —que se simboliza como $p \rightarrow q$ —, p recibe el nombre de **antecedente** y q de **consecuente**.

En general, la proposición $p \rightarrow q$ es falsa solamente cuando p es verdadera y q es falsa; es decir, cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. En todos los demás casos, la implicación será verdadera (Tabla 4).

Ejemplo 5
En la proposición "Si 8 y 22 son números impares, entonces 15 y 20 son números primos", se identifican las componentes p: 8 y 22 son números impares y q: 15 y 20 son números primos. Tanto p como q son falsas, de modo que $p \rightarrow q$ es verdadera.

Ejemplo 6
La implicación "Si apruebo la materia, te presto el libro", puede interpretarse como un compromiso condicionado por la aprobación de la materia y se puede asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Si el antecedente es falso, es decir, si no apruebo la materia, queda liberado el compromiso, y preste o no el libro la implicación es verdadera.

Por otra parte, si apruebo la materia y no presto el libro, el compromiso no se cumple y la implicación es falsa.

Finalmente, si tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos, entonces la implicación es verdadera, pues el compromiso se cumple.

2.4 Equivalencia

La equivalencia o bicondicional es la proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones mediante el conectivo lógico **si y solamente si**. La equivalencia de las proposiciones simples p y q se simboliza con $p \leftrightarrow q$, y se lee "p si y solo si q".

La proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando p y q son ambas verdaderas o ambas falsas. En todos los demás casos, la equivalencia será falsa, como se verifica en la Tabla 5.

Ejemplo 7
La proposición "15 es divisible por 3 si y solo si 3 es un número par" es falsa, ya que las proposiciones componentes tienen diferente valor de verdad.

Actividad resuelta
Comunicación
1. Determina el valor de verdad de las proposiciones compuestas.
a. 7 es un número primo, entonces es un número impar
b. 24 es un número par si y solo si es divisible por 9

Solución:
a. Como p: 7 es un número primo es verdadera y q: 7 es un número impar es verdadera, entonces $p \leftrightarrow q$ es verdadera.
b. Como p: 24 es un número par es verdadera y q: 24 es divisible por 9 es falsa, entonces, $p \leftrightarrow q$ es falsa.

APLICACIÓN DE LA LÓGICA

238

Bloque de Geometría y Medida

2

Proposiciones compuestas

2.5 Tautología, contingencia y contradicción

Se puede conocer el valor de verdad de una proposición compuesta mediante la elaboración de tablas de verdad. Según el resultado, la proposición compuesta puede ser: tautología, contradicción o contingencia.

Una proposición compuesta es **tautología** si es verdadera para todos los valores de verdad, es **contradicción** si es falsa para todos los valores de verdad y es **contingencia** si no es tautología ni contradicción.

Ejemplo 8
Determina el valor de verdad de la proposición $p \wedge q \rightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tabla 6

La proposición es una tautología.

Ejemplo 9
Determina el valor de verdad de la proposición $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Tabla 7

La proposición es una contingencia.

Ejemplo 10
Determina el valor de verdad de la proposición $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Tabla 8

La proposición es una contradicción.

Actividad resuelta
Comunicación
2. Mediante tablas de verdad determina si las proposiciones dadas son tautologías, contradicciones o contingencias.
a. $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Tabla 9

La proposición es una tautología.

b. $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Tabla 10

La proposición es una contradicción.

c. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

Tabla 11

La proposición es una contingencia.

APLICACIÓN DE LA LÓGICA

239

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

3. Niega de dos formas cada proposición.

a. Lima es la capital de Perú.
b. Un triángulo equilátero tiene tres lados congruentes.
c. Bolivia no tiene costa.
d. Enero tiene 31 días.
e. 77 es un número primo.
f. El nombre Aurelio tiene las cinco vocales.

Razonamiento

4. Escribe la proposición compuesta representada en cada caso, si sabes que:

p: Un hexágono tiene seis lados, y
q: México está en Suramérica.

a. $p \wedge q$ b. $p \rightarrow q$
c. $p \vee q$ d. $p \leftrightarrow q$
e. $\neg q$ f. $p \rightarrow \neg p$
g. $\neg q \wedge \neg p$ h. $\neg q \leftrightarrow \neg p$

Razonamiento

5. Determina el valor de verdad de las proposiciones que obtuviste en la actividad 4.

6. Escribe las proposiciones que se piden a continuación, si sabes que:

p: La ballena es un mamífero
q: El mercurio es un metal
r: La rosa es una flor

a. $\neg r$ b. $p \vee q$
c. $\neg p \wedge \neg r$ d. $\neg q \wedge \neg r$
e. $p \rightarrow q$ f. $r \leftrightarrow \neg p$

7. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones simples. Luego, determina el valor de verdad de las proposiciones compuestas que se enuncian abajo.

p: 13 es un número primo
q: 77 es múltiplo de 11
r: 7 es divisor de 49

a. $p \vee q$ b. $p \leftrightarrow q$
c. $p \rightarrow q$ d. $p \vee \neg p$

Comunicación

8. Identifica las proposiciones simples que componen cada una de las proposiciones compuestas.

a. Si 27 es un número impar, entonces 12 es divisible por 5.
b. 15 es divisible por 3 si y solo si 2 es un número primo.
c. 2 no es un número par o 12 es divisible por 5.
d. 27 no es un número impar y 18 es un múltiplo de 9.

Razonamiento

9. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, indica además si la proposición compuesta es una tautología o una contradicción, suponiendo que p es falsa y q es verdadera.

a. $p \vee q$ b. $p \wedge q$
c. $p \vee \neg q$ d. $\neg p \wedge q$
e. $p \vee \neg p$ f. $\neg p \rightarrow \neg p$
g. $p \leftrightarrow \neg p$ h. $\neg q \rightarrow p$
i. $p \leftrightarrow \neg q$ j. $\neg p \wedge \neg q$
k. $p \rightarrow q$ l. $\neg p \leftrightarrow \neg p$

Resolución de problemas

10. Certo día lluvioso y frío, un grupo de amigos compartió su merienda. Cada uno de ellos hizo una afirmación:

- Juan dijo: "si no llueve, entonces hace frío"
- Felipe dijo: "si no llueve, entonces no hace frío"
- Marcela dijo: "si llueve, entonces no hace frío"
- Otro compañero que los escuchaba les dijo: "uno de ustedes ha hecho una afirmación falsa."

¿Cuál de los tres amigos fue quien dijo una proposición falsa? Explica tu respuesta.

11. Escribe con símbolos cada enunciado, a partir de las siguientes proposiciones.

p: Las estrellas emiten luz
q: Los planetas reflejan la luz
r: Los planetas giran alrededor de las estrellas

a. Si las estrellas emiten luz, entonces los planetas la reflejan y giran alrededor de ellas.
b. Las estrellas emiten luz o los planetas la reflejan y, por otra parte, los planetas giran alrededor de ellas.
c. Los planetas reflejan luz si y solo si las estrellas la emiten, y los planetas giran alrededor de estas.

Comunicación

3. a. Lima no es la capital de Perú. No es cierto que Lima es la capital de Perú.
b. Un triángulo equilátero no tiene tres lados congruentes. Es falso que un triángulo equilátero tiene tres lados congruentes.
c. Bolivia tiene costa. No es cierto que Bolivia no tenga costa.
d. Enero no tiene 31 días. No es cierto que enero tiene 31 días.
e. 77 no es un número primo. No es cierto que 77 es un número primo.
f. El nombre Aurelio no tiene las cinco vocales. No es cierto que el nombre Aurelio tenga las cinco vocales.

4. a. Un hexágono tiene seis lados y México está en Suramérica.
b. Si un hexágono tiene seis lados entonces México está en Suramérica.
c. Un hexágono tiene seis lados o México está en Suramérica.
d. Un hexágono tiene seis lados si y solo si México está en Suramérica.
e. México no está en Suramérica.
f. Si un hexágono tiene seis lados entonces no tiene seis lados.
g. Ni México está en Suramérica ni un hexágono tiene seis lados.
h. México no está en Suramérica si y solo si un hexágono no tiene seis lados.

Razonamiento

- 5.a. F b. F c. V d. F e. V f. F g. F h. F

Comunicación

- 6.a. La rosa no es una flor.
b. La ballena es un mamífero o el mercurio es un metal.
c. Ni la ballena es un mamífero ni la rosa es una flor.
d. Ni el mercurio es un metal ni la rosa es una flor.
e. Si la ballena es un mamífero entonces el mercurio es un metal.
f. La rosa es una flor si y solo si la ballena no es un mamífero.

7. p: V q: V r: V
a. V b. V c. V d. V
8. a. p: 27 es un número impar, q: 12 es divisible por 5.
b. r: 15 es divisible por 3, s: 2 es un número primo.
c. t: 2 es un número par, v: 12 es divisible por 5.
d. n: 27 es un número impar, y: 18 es múltiplo de 9.

Razonamiento

9. a. V b. F c. F d. V e. V f. V g. F
h. V i. V j. F k. V l. F

Resolución de problemas

10. La proposición compuesta falsa la dijo Marcela.
11. a. $p \rightarrow (q \wedge r)$ b. $(p \vee q) \wedge r$ c. $q \leftrightarrow (p \wedge r)$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Explique a los estudiantes que desde grados anteriores han utilizado las variables, que no son más que letras que representan números cualesquiera.
- Muestre a los estudiantes que, una variable, un número o las combinaciones de números y variables mediante las operaciones de multiplicación, división y potencia se llaman términos.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Solicite a los estudiantes aplique la traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico, por ejemplo:

Determine cuáles de las siguientes literales son términos y cuáles son expresiones algebraicas:

- 8
- $3t$
- $3t + 5mn - 8$
- $5mn$
- $2x2y$
- $10x + 2y + 6$

Los estudiantes deben seleccionar los literales a , b , d y e , como términos. Deben reconocer los literales c y f como expresiones algebraicas pues además de presentar la parte literal y la parte numérica también aparecen operaciones de cálculo.

- Seleccione la respuesta correcta.

Un monitor de Matemática quiere representar en el lenguaje de las variables la siguiente situación: La mitad de los ejercicios realizados en clases aumentado en uno fueron resueltos correctamente. Señale cómo escribiría el monitor esta situación, si x representa la cantidad de ejercicios realizados.

- $2x$; $1/2x$; $1/2x + 1$; $2x + 1$

Números y letras 3

Bloque de Álgebra y Funciones

3.1 Lenguaje algebraico

Si se representa el número de libros que tiene Jairo con la letra a , entonces la expresión $3a$ corresponde al triple de los libros que tiene Jairo, y la expresión $3a + 5$ indica el triple de los libros que tiene Jairo más 5. Esta expresión representa la cantidad de libros que tiene Ana.

El lenguaje algebraico utiliza una combinación de números y letras relacionados por los signos de las operaciones con el fin de expresar información.

Ejemplo 1

En la Figura 1 se observa una pintura de forma rectangular y su marco a dos centímetros de los lados del lienzo. Como no se conoce la longitud de los lados del lienzo, se escogen las letras a y b para designarlos.

Las expresiones $2 \cdot (a + b)$ y $a \cdot b$ representan el perímetro y el área del lienzo, respectivamente. Por su parte, el área del marco en lenguaje algebraico es:

$$(a + 4) \cdot (b + 4) - a \cdot b$$

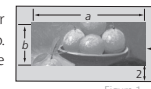


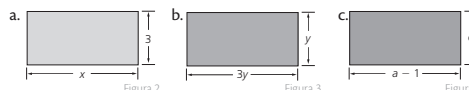
Figura 1

3.2 Uso de las letras para expresar relaciones

Con las letras se expresan de forma concisa relaciones y propiedades entre magnitudes. Las expresiones literales reciben el nombre de fórmulas.

Ejemplo 2

Con letras y signos matemáticos se pueden expresar el perímetro y el área de los rectángulos de las Figuras 2 a la 4.



$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot (x + 3) = 2x + 6 & P &= 2 \cdot (3y + y) = 8y & P &= 2 \cdot (a - 1 + c) = 2a + 2c - 2 \\ A &= 3x & A &= 3y \cdot y = 3y^2 & A &= (a - 1) \cdot c = ac - c \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Un grifo vierte 10 cm^3 de agua cada minuto en un recipiente. Las magnitudes tiempo y volumen, representadas con las letras t y V respectivamente, se relacionan como se muestra en la Tabla 1.

Tiempo (min)	1	2	3	...	t
Volumen (cm^3)	10	20	30	...	$V = 10 \cdot t$

Tabla 1

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- Un pintor recubre de barniz piezas cuadradas de madera. Cobra \$5 por metro cuadrado barnizado y \$10 por el desplazamiento. Expresa la relación de la superficie barnizada y el costo mediante una fórmula.

Solución:

Si se designa con x el lado del cuadrado, x^2 es la superficie barnizada. Si con la letra y se designa el costo, entonces la fórmula es $y = 5 \cdot x^2 + 10$.

Explora

Jairo tiene cierta cantidad de libros, y Ana tiene el triple de los libros que tiene Jairo más cinco.



- ¿Cómo se puede expresar el número de libros que tiene Ana?

Ten en cuenta

Las letras empleadas en el lenguaje algebraico se denominan **variables** o **incógnitas** y se utilizan para designar valores desconocidos.

Ten en cuenta

Un **término** es una expresión algebraica en la cual solo hay operaciones de multiplicación y división de letras y números (tanto el número como la letra pueden estar elevados a una potencia). Un término consta de dos partes: numérica y literal.



Bloque de Álgebra y Funciones

Destrezas con criterios de desempeño: Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas. Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

- 2 Utiliza el lenguaje algebraico para escribir las siguientes expresiones.

- El área de un triángulo.
- El perímetro de un cuadrado.
- El producto de dos números consecutivos.
- El cuadrado de un número más su mitad.
- El triple de un número menos cuatro.
- El triple de un número más su cuarta parte.
- El cuadrado de la diferencia de dos números.
- La diferencia de los cuadrados de dos números.
- La tercera parte de la suma de tres números.

- 3 Relaciona cada enunciado con su correspondiente expresión en lenguaje algebraico.

- | | |
|---|------------------------|
| a. El cuadrado de un número menos su triple. | () $\frac{2}{4}x + 7$ |
| b. El 70% de un número. | () $x^2 - 3x$ |
| c. Un número impar. | () $2x$ |
| d. Los dos cuartos de un número más siete unidades. | () $2x + 1$ |
| e. Un número par. | () $0,7x$ |

- 4 Lee y resuelve.

- El salario de un vendedor de automóviles se compone de un sueldo fijo de \$ 800 mensuales y de una comisión de \$ 2000 por automóvil vendido.

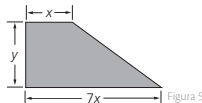
- Expresa cuánto gana el vendedor en un mes si vende x automóviles.
- Si en el mes de mayo el vendedor concreta la venta de cinco automóviles, ¿cuál fue su salario ese mes?
- Si en junio el vendedor recibió un salario de \$ 10800, ¿cuántos autos vendió ese mes?

- 5 Expresa los siguientes enunciados en lenguaje algebraico. Ten en cuenta que x y y son las edades actuales de dos hermanos.

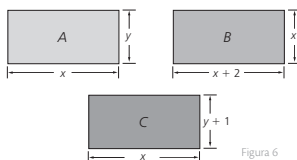
- La suma de las edades que tenían los hermanos hace 5 años.
- El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.
- La diferencia entre la edad del hermano mayor y la mitad de la edad del hermano menor

Comunicación

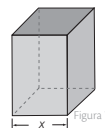
- 6 Representa algebraicamente el área del trapecio rectángulo de la Figura 5.



- 7 Expresa algebraicamente el perímetro y el área de cada uno de los rectángulos de la Figura 6.



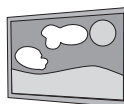
- 8 Expresa en lenguaje algebraico el volumen del ortoedro de la Figura 7, cuyas dimensiones son tres números consecutivos, si se sabe que la longitud de la menor dimensión es x metros.



Resolución de problemas

- 9 Un cristal para enmarcar cuadros tiene un precio fijo de \$20, y cada decímetro del marco cuesta \$3.

- Expresa con una fórmula lo que se debe invertir para enmarcar un cuadro cualquiera.
- ¿Cuánto cuesta enmarcar un cuadro que tiene 80 cm de largo y 30 cm de ancho?
- Si Jaime pagó \$80 por enmarcar un cuadro, ¿se pueden saber con exactitud las dimensiones del cuadro? (Si es así, indícalas; si no lo es, escribe algunas posibles dimensiones).



- 10 Un recipiente contiene 6 L de agua y cada hora se vierten en este 0,7 L de agua.

- Expresa con lenguaje matemático la información.
- Al cabo de ocho horas y media, ¿cuántos litros de agua contendrá el recipiente?
- Si la capacidad del recipiente es de 12 L, ¿en cuánto tiempo se habrá llenado completamente?

APLICA © EDICIONES SM

Comunicación

2.a. $A = \frac{B \cdot h}{2}$

b. $P = 4l$

c. $x(x + 1)$

d. $x^2 + \frac{x}{2}$

e. $3x - 4$

f. $3x + \frac{x}{4}$

g. $(x - y)^2$

h. $x^2 - y^2$

i. $\frac{w + x + y}{3}$

3. a. $x^2 - 3x$;

b. $0,7x$;

c. $2x + 1$

d. $\frac{2}{4}x + 7$; e. $2x$

4.a. $2000 \cdot x + 800$

b. \$ 10800

c. 5

5.a. $(x - 5) + (y - 5)$

b. $(x + 6) \cdot (y + 6)$

c. $x - \frac{y}{2}$ si la edad del mayor es x .

6. $A = \frac{(7x + x) \cdot y}{2} = 4xy$

7. a. Rectángulo A; $P = 2 \cdot x + 2 \cdot y$, $A = x \cdot y$

b. Rectángulo B; $P = 2 \cdot (x + 2) + 2 \cdot x$,
 $A = x \cdot (x + 2)$

c. Rectángulo C; $P = 2 \cdot (y + 1) + 2 \cdot x$,
 $A = x \cdot (y + 1)$

8. $V = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \text{ m}^3$

Resolución de problemas

9. a. $20 + 3 \cdot x$

b. \$ 86

c. No se puede saber con exactitud las dimensiones del cuadro, sin embargo, algunas posibles medidas son:
Ancho 9 dm ; largo 1 dm y ancho 8 dm y largo 2 dm.

10. a. $6 + 0,7 \cdot t$

b. 11,95 L

c. En 8 h 32 min 18 s

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Muestre a los estudiantes que una expresión algebraica es aquella en la que se utilizan letras (variables), números y signos de operaciones. Son expresiones algebraicas las siguientes: Suma de cuadrados: $a^2 + b^2$; triplo de un número menos el doble de otro: $3x - 2y$; suma de varias potencias de un mismo número: $a^4 + a^3 + a^2 + a$
- Recomiende a los estudiantes que lean detenidamente el texto a traducir. Identifiquen las palabras claves y busquen en el diccionario su significado, así como sinónimos de las mismas que los ayuden a interpretar la situación que aparece en el texto. Por último recuérdelos que deben señalar el significado de las variables que emplearán en la traducción.
- Muestre a los estudiantes que si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por números y se realizan las operaciones indicadas se obtiene un número que es el valor numérico de la expresión algebraica para los valores de las variables dadas.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Calcule el valor numérico de la expresión algebraica $A = a^2 - 2ax + 4$ en los casos:
 - $a = 2$; $x = 3$
entonces $2^2 - 2(2 \times 3) + 4 = -4$
 - $a = -2$; $x = 1$
entonces $A = (-2)^2 - 2(-2)(1) + 4 = 12$
 Los estudiantes deben tener en cuenta el orden operacional para proceder a efectuar los cálculos, una vez sustituidas las variables por sus valores, en cada caso.

Expresiones algebraicas

4

Bloque de Álgebra y Funciones

Para analizar el problema, se usará el lenguaje algebraico. Si se designa con x el precio del iPod, las diversas situaciones enunciadas en el problema se pueden expresar como se muestra en la Tabla 1.

Situación	Expresión verbal	Expresión matemática
Precio del iPod	Entre \$ 80 y \$ 100	$80 < x < 100$
Dinero que le regala el papá a Yesid	La mitad del precio	$\frac{1}{2}x$
Aporte de la mamá	Le da \$ 20	\$ 20
Ahorros de Yesid	La cuarta parte del precio del iPod	$\frac{1}{4}x$
Dinero que tiene para la compra	La suma de sus ahorros más lo que le dieron sus padres	$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 20$

Tabla 1

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados entre sí por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Ejemplo 1

El volumen del cilindro de la Figura 1, cuya altura h mide el doble del radio r de la base, se calcula mediante la expresión $V = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

Ejemplo 2

- La distancia d recorrida por un vehículo que lleva una velocidad constante v durante un tiempo t es: $d = v \cdot t$
- El área A de un cubo de arista a es: $A = 6a^2$
- La densidad D de un cuerpo de masa m y volumen V es: $D = \frac{m}{V}$

4.1 Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico de una expresión algebraica** es el número que se obtiene al sustituir las letras por números determinados y hacer las operaciones indicadas.

Ejemplo 3

El área de cualquier rectángulo de lados a y b se calcula mediante la expresión $A = a \cdot b$.

Si el rectángulo de la Figura 2 tiene 4 unidades de ancho y 6 unidades de largo, su área es:

$$A = 6 \cdot 4 = 24 \text{ unidades cuadradas.}$$

El número 24 es el **valor numérico** de la expresión algebraica $a \cdot b$ cuando $a = 6$ y $b = 4$.



Figura 2

Actividad resuelta

Comunicación

- Escribe la expresión algebraica del área del trapecio de la Figura 3 e indica el significado de las letras.

Solución:

El área del trapecio es $\frac{1}{2}(B + b) \cdot h$, donde B es la base mayor del trapecio, b es la base menor y h es la altura.

Explora

Yesid desea comprar un iPod que cueste entre \$ 80 y \$ 100. Su papá le regaló la mitad de ese valor y su mamá le dio \$ 20.

- Si Yesid ya había ahorrado una cuarta parte de lo que cuesta el aparato, ¿cuánto dinero reunió para comprarlo?

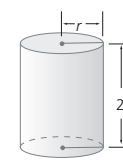


Figura 1

Ten en cuenta

El valor numérico depende del valor que se dé a las letras.

Datos

Fórmula

Valor numérico

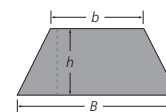


Figura 3

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Escribe en cada situación la expresión algebraica que le corresponda.
- El perímetro de un cuadrado de lado $m + 1$.
 - El cociente de dos números consecutivos.
 - La raíz cuadrada del triple de un número.
 - Las dos terceras partes de la raíz cuadrada de un número.
 - La diferencia de dos números pares consecutivos.
 - El producto de un número con la tercera parte del mismo.
 - La suma del doble de un número con su cuarta parte.

Modelación

3. Traduce al lenguaje natural cada una de las siguientes expresiones algebraicas.
- $2 \cdot (a + b)$
 - $3b^3 - b^2$
 - $(x + y)^2$
 - $3 \cdot \sqrt{x - 1}$
 - $x^2 \cdot (x + 1)^2$
 - $3x \cdot x^2$

Razonamiento

4. Halla la expresión algebraica que expresa el volumen de los sólidos de las figuras 4 y 5.

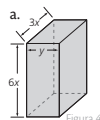


Figura 4

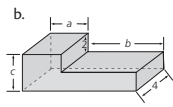


Figura 5

5. Escribe las expresiones que representan el perímetro de la Figura 6 y el área del rectángulo de la Figura 7.

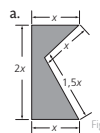


Figura 6

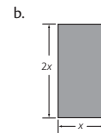


Figura 7

Ejercitación

6. Calcula el valor numérico de cada expresión, si $x = -2$.
- $a \cdot x - 3$
 - $2 - x$
 - $(x + 1)(x - 2)$
 - $8 - x^2$
 - $-(1 - x^2)$
 - $2x - \frac{1}{2}x^2$

7. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican.
- $x^2 - x$, para $x = 3$
 - $4x - 5$, para $x = 1$
 - $3z^2 - 10$, para $z = 2$
 - $20 - 2rt^2$, para $r = 1$ y para $t = 5$

Razonamiento

8. Determina para qué valores de la letra el valor numérico de las expresiones es 0.
- $(a + 1)(a + 2)$
 - $x^3 + 8$
 - $x^2 - 1$
 - $(2x + 4)(x - 10)$
9. Encuentra el valor del área de una superficie cuadrada de 7,5 m de lado.
10. Calcula el valor de L en la fórmula $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, que relaciona la longitud y el radio de una circunferencia, dado que $r = 2$ cm, $r = 0$ y $r = 5$ cm.

Resolución de problemas

11. Un automóvil, cuyo tanque contiene 40 L de gasolina, consume 5 L por cada 100 km recorridos.
- Expresa mediante una fórmula los litros de gasolina que quedan en el tanque a medida que el automóvil recorre kilómetros.
 - Si el auto sale con el tanque completamente lleno, ¿cuántos kilómetros recorrerá antes de quedar desocupado?
12. Un pintor cobra su trabajo del siguiente modo: \$200 al iniciar el trabajo y \$4 por metro cuadrado pintado.
- Con esta información, calcula mediante una fórmula cuánto cobra por pintar los 350 m² de pared de un apartamento.
 - Si el pintor cobra \$620 por pintar 80 m² de pared, ¿fue honesto al hacer el cobro?
13. Luis es un técnico informático al que le pagan \$75 por la revisión de cada computador, aunque le descuentan el 12 % de la cantidad que cobra por concepto del IVA.
- Halla la fórmula que relaciona el dinero d que recibe el técnico y el número x de computadores revisados.
 - ¿Cuánto recibe el técnico por la revisión de 15 computadores?

Comunicación

2. a. $P = 4 \cdot (m + 1) = 4 \cdot m + 4$
- b. $\frac{x}{x+1}$ c. $\sqrt{3x}$
- d. $\frac{2}{3}\sqrt{x}$ e. $2x - (2x + 2)$
- f. $x \cdot \frac{x}{3}$ g. $2x + \frac{x}{4}$
3. a. El doble de la suma de dos números.
- b. El triple del cubo de una cantidad menos el cuadrado de esa misma cantidad.
- c. El cuadrado de la suma de dos números.
- d. El triple de la raíz cuadrada de un número disminuido en una unidad.
- e. El producto de los cuadrados de dos números consecutivos
- f. El producto del triple de un número por su cuadrado.
4. $V = 3x \cdot 6x \cdot y$ $V = 4ac + 4bc - 8b$
5. a. $P = 2x + x + x + 1,5x$ b. $A = 2x \cdot x$
6. a. -5 b. 4 c. 4 d. 4 e. 3 f. -6
7. a. 6 b. -1 c. 2 d. -30
8. a. $a = -1$ o $a = -2$ b. $x = -2$
- c. $x = -1$ o $x = 1$ d. $x = -2$ o $x = 10$

Razonamiento

9. $A = 56,25 \text{ m}^2$
10. 12,56 cm, 0 cm y 31,4 cm, respectivamente.

Resolución de problemas

11. a. $40 - 5 \cdot \frac{x}{100}$ b. 800 km
12. a. $C = 200 + 4 \cdot 350 = \$1\,600$
- b. No, pues el trabajo tenía un costo de \$520.
13. a. $d = 66 \cdot x$
- b. \$990

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes que en muchas ocasiones es necesario utilizar los números para localizar puntos en el plano. Explique que para ello es útil emplear el sistema de coordenadas rectangulares (como se define en el libro de texto página 245); teniendo en cuenta los conjuntos numéricos estudiados hasta el momento.
- Muestre a los estudiantes los elementos formados, al trazar las dos rectas que se cortan perpendicularmente, muestre las coordenadas del centro y las coordenadas de cada cuadrante para familiarizar a los estudiantes con el tema en cuestión.
- Analice con los estudiantes el nombre que recibe cada uno de los ejes, tanto el vertical (eje y) como el horizontal (eje x), al cortarse las rectas y formar los cuadrantes.
- Explique a los estudiantes que para leer las coordenadas de un punto dado, deben colocar el cartabón de modo que uno de los lados cortos pase por el punto y el otro por el eje x ; ahí lee la primera coordenada. De la misma forma lo hace para el (eje y) y obtiene la segunda coordenada y muéstreles como deben plantear el par ordenado, como $(x; y)$, donde x siempre representará los valores en ese eje y (y) a las valores del eje y .
- Analice con los estudiantes una pareja ordenada para los números enteros y una pareja ordenada para los números racionales. Analice que al otorgarle valor a una variable en una ecuación se obtiene la segunda coordenada, siempre y cuando satisfaga la igualdad.

Sistema de coordenadas cartesianas 5

Para indicar cualquier posición en la cuadrícula, cada jugadora debe sugerir un cierto número de unidades a la derecha o a la izquierda del cero y un cierto desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo. En la Figura 1, el tesoro A está ubicado 3 unidades a la izquierda del 0 y 2 unidades arriba, lo cual se indica de manera abreviada como $A(-3, 2)$. Los números -3 y 2 son las **coordenadas** de la ubicación del tesoro en el tablero.

Un **sistema de coordenadas cartesianas** está formado por dos rectas perpendiculares y graduadas, una horizontal y otra vertical, denominadas **ejes de coordenadas**, que dividen el plano en **cuatro cuadrantes**.

En la Figura 2 se representa un sistema de coordenadas cartesianas.

- El punto de intersección de los ejes es el **origen de coordenadas**.
- El eje horizontal se llama **eje de abscisas** o eje X .
- El eje vertical recibe el nombre de **eje de ordenadas** o eje Y .
- Los puntos del plano se indican dando sus dos coordenadas $P(x, y)$.

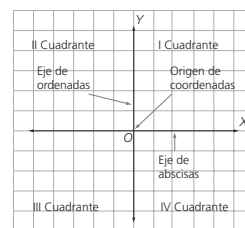


Figura 2

5.1 Parejas ordenadas con números enteros

Una **pareja ordenada de números enteros** es una representación numérica que consta de dos números enteros, no necesariamente distintos, escritos en un orden específico. La notación (x, y) representa la pareja ordenada cuyo primer elemento es x y cuyo segundo elemento es y .

La coordenada x indica el desplazamiento sobre el eje horizontal X . Si el valor es positivo, el desplazamiento se realiza hacia la derecha del origen de coordenadas tantas unidades como indique el número; si es negativo, las unidades se contarán hacia la izquierda de dicho punto.

Por su parte, la coordenada y corresponde al desplazamiento sobre el eje Y ; hacia arriba si el número es positivo o hacia abajo si es negativo. El punto de referencia es el origen de coordenadas.

Ejemplo 1

En la Figura 3 se observa la representación de los puntos $A(3, 2)$ y $C(-2, -1)$.

El punto $A(3, 2)$ está 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba, tomando como referencia el origen de coordenadas. Como x y y son positivos, el punto A está en el cuadrante I.

El punto $C(-2, -1)$ está ubicado 2 unidades a la izquierda de 0 y una unidad hacia abajo. Como x y y son negativos, el punto C está en el cuadrante III.

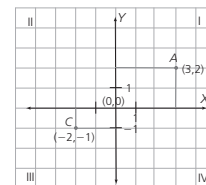


Figura 3

Explora

Lucía invita a Sara a jugar "Encuentra el tesoro". Para ello, cada una tiene un tablero con una cuadrícula numerada como la de la Figura 1, en la cual ubica el tesoro que la otra debe descubrir.

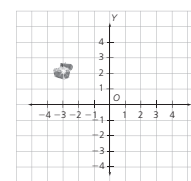


Figura 1

- ¿Qué deben tener en cuenta las jugadoras para encontrar el tesoro?

Ten en cuenta

A cada punto del plano le corresponde una única pareja ordenada.

Ten en cuenta

La pareja ordenada (x, y) no es la misma que la pareja ordenada (y, x) .

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Ubicar pares ordenados con números enteros y racionales, en el plano cartesiano.

Ten en cuenta

- Cualquier pareja de la forma $(0, b)$ está sobre el eje Y.
- Cualquier pareja de la forma $(a, 0)$ está sobre el eje X.

5.2 Parejas ordenadas con números racionales

Una **pareja ordenada con números racionales** (x, y) es aquella que tiene como coordenadas x y y números racionales.

Para representar en el plano parejas ordenadas con números racionales expresados como fracción, se deben realizar procedimientos similares a los utilizados para representar números racionales en la recta numérica.

Ejemplo 2

Para representar el punto $A\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{3}\right)$ en el plano cartesiano, se ubica la primera componente a la derecha del eje Y y la segunda en la parte negativa del eje Y; al trazar la perpendicular de los ejes coordenados desde esos puntos, se encuentra su intersección donde se ubica el punto A. En el par ordenado $B\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$ se puede observar que el valor de x es negativo y el de y también lo es, razón por la que tal punto se localiza en el tercer cuadrante. Si el punto a localizar es $C\left(-\frac{14}{3}, 4\right)$ dicho punto estará en el segundo cuadrante; y si es $D\left(\frac{7}{2}, 3\right)$ estará en el primer cuadrante. La Figura 4 muestra la representación de los puntos $A\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{3}\right)$, $B\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$, $C\left(-\frac{14}{3}, 4\right)$ y $D\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

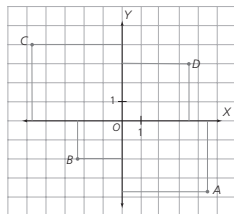


Figura 4

Ten en cuenta

- Todos los puntos que están sobre la recta vertical que pasa por (a, b) tienen abscisa a .
- Todos los puntos que están sobre la recta horizontal que pasa por (a, b) tienen ordenada b .



TECNOLOGÍAS
de la información y la
comunicación

<http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/index.html>

Practica la ubicación de parejas ordenadas en el plano cartesiano.

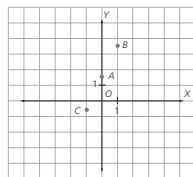


Figura 5

Actividad resuelta

Ejercitación

- 1 Encuentra varias parejas ordenadas que sean solución de la ecuación $y = 2x + \frac{3}{2}$, y ubícalas en un sistema de coordenadas.

Solución:

Una manera de obtener algunas soluciones de la ecuación consiste en dar valores a la incógnita x y calcular el valor numérico de la expresión, así:

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot (0) + \frac{3}{2} = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad A\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot (1) + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \quad B\left(1, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) + \frac{3}{2} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \quad C\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

La Figura 5 muestra la representación en el plano de los pares ordenados que se formaron.

APLICA © EDICIONES SM

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Solicite a los estudiantes que representen en un sistema de coordenadas los siguientes pares ordenados, que unan los puntos con segmentos y determinen qué figuras geométricas se forman.

a) $A(2;-2)$; $B(4;-2)$; $C(5;-4)$; $D(4;-6)$; $E(2;-6)$; $F(1;-4)$ (hexágono)

b) $P(1/2; 1/2)$; $Q(18/4)$; $R(27/5; 7/2)$; $S(1/2; 7/2)$; $T(7/2; 28/5)$ (pentágono)

c) $M(-1; -1)$; $N(-1; -3)$; $P(-3; -3)$; $Q(-3; -1)$ (cuadrado)

d) $C(-2; 2)$; $V(-2; 4)$; $B(-6; 4)$; $N(-6; 2)$ (Rectángulo)

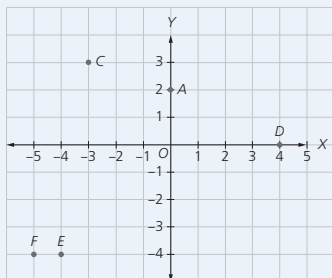
e) $A(3; 0)$; $B(18/4; 2)$; $C(1; -4)$ (triángulo)

■ Actividades colaborativas

El docente propondrá realizar una actividad por equipos; seleccionará varios niños para conformar ambos equipos. Explicará en qué consiste la actividad y luego procederá al desarrollo de la misma, el docente les proporcionará varios puntos con sus pares ordenados y el primer equipo representará los pares ordenados y el segundo equipo una vez ubicados los puntos, reconocerá la figura que se forma al unir dichos puntos. El docente evaluará a los estudiantes individual y grupalmente. Luego de la primera actividad el docente propondrá una segunda actividad donde les proporcionará a los estudiantes un sistema de coordenadas rectangulares con varias figuras representadas en él, para que los estudiantes mencionen las coordenadas de cada punto que compone cada figura geométrica y mencionará el nombre de cada figura y sus propiedades.

Ejercitación

2.



3. a. (2, 7)

b. (4, 3)

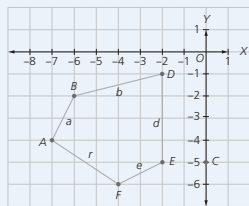
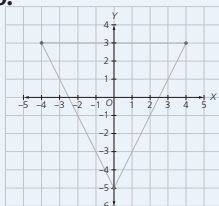
4. $A(3, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(-4, 0)$, $D(-4, -3)$, $E(0, 0)$ y $F(2, -1)$ 4.

Modelación

5.

Puntos dados	a. $(-2, -1)$	b. $(3, 0)$	c. $(0, 4)$
Simetría eje X	$(-2, 1)$	$(3, 0)$	$(0, -4)$
Simetría eje Y	$(2, -1)$	$(-3, 0)$	$(0, 4)$
Simetría origen	$(2, 1)$	$(-3, 0)$	$(0, -4)$

6.



7. La palabra escondida es ORO.

8. a. V

b. F

c. V

Comunicación

9. a. $A'(-3, 2)$

b. $B'(-1, 4)$ y $C'(1, 4)$

Sistema de coordenadas cartesianas

5

Bloque de Álgebra y Funciones

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Representa los siguientes puntos en un plano cartesiano.

- a. $A(0, 2)$ b. $C(-3, 3)$ c. $E(-4, -4)$
- d. $B(1, -6)$ e. $D(4, 0)$ f. $F(-5, -4)$

3 Ubica en el plano cartesiano cada par de puntos y determina las coordenadas del punto medio entre los dos.

- a. $(2, 4)$ y $(2, 10)$ b. $(6, 3)$ y $(2, 3)$

4 Escribe las coordenadas de los puntos representados en el plano de la Figura 6.

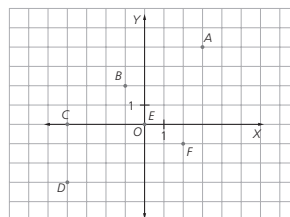


Figura 6

Modelación

5 Lee y resuelve.

En la Figura 7, los puntos $A(3, 2)$ y $B(-3, 2)$ corresponden a puntos simétricos respecto al eje Y; ambos puntos tienen la misma ordenada, y la abscisa del punto A es el opuesto de la abscisa del punto B.

Los puntos $B(-3, 2)$ y $C(-3, -2)$ son simétricos respecto al eje X; ambos puntos tienen la misma abscisa, y la ordenada de uno es el opuesto de la ordenada del otro.

Los puntos $C(-3, -2)$ y $A(3, 2)$ son simétricos respecto al origen. La abscisa del punto C es el opuesto de la abscisa del punto A, y la ordenada del punto C es el opuesto de la ordenada del punto A.

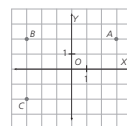


Figura 7

Halla las coordenadas del punto simétrico al punto dado, respecto a cada eje y al origen.

- a. $(-2, -1)$ b. $(3, 0)$ c. $(0, 4)$

6 Dibuja en el plano cartesiano los polígonos cuyos vértices son los puntos que se indican.

- a. $A(-4, 3)$, $B(4, 3)$ y $C(0, -5)$
- b. $A(-7, -4)$, $B(-6, -2)$, $C(-2, -1)$, $D(-2, -5)$ y $E(-4, -6)$

7 Ubica sobre el plano cartesiano las coordenadas que se indican y une con una línea los puntos obtenidos en el orden dado. Descubre la palabra que arruinó la vida del rey Midas.

- Une estos puntos en orden y descubre la letra inicial: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 1)$ y $(1, 1)$.
- Une estos puntos en orden y descubre la segunda letra: $(4, 1)$, $(4, 4)$, $(6, 4)$, $(6, 3)$, $(5, 2)$ y $(6, 1)$.
- Une estos puntos en orden y descubre la tercera letra: $(7, 4)$, $(9, 4)$, $(9, 1)$, $(7, 1)$ y $(7, 4)$.

La palabra escondida es: _____.

8 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

- a. La intersección de los ejes tiene coordenadas $(0, 0)$. ()
- b. Un punto en el cuadrante III tiene abscisa negativa y ordenada positiva. ()
- c. La intersección de los ejes de coordenadas divide al plano en cuatro cuadrantes. ()

Comunicación

9 Observa la Figura 8, y responde.

- a. Si el punto A se gira 90° en el sentido de las manecillas del reloj y el punto B se mantiene en el mismo lugar, ¿cuáles son las nuevas coordenadas del punto A?
- b. Nombra las coordenadas del punto B y C, si el triángulo ABC se trasladara tres unidades a la izquierda y dos hacia arriba.

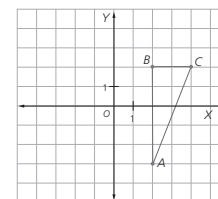


Figura 8

Bloque de Álgebra y Funciones

Destreza con criterios de desempeño: Ubicar pares ordenados con números enteros y racionales, en el plano cartesiano.

Razonamiento

- 10 Indica en qué cuadrante está cada uno de los siguientes puntos. Si no está en ninguno de ellos, explica la razón.

- a. $A(-2, -5)$ b. $B(1, 2)$
c. $C(5, 0)$ d. $D(-6, 8)$
e. $E(0, 5)$ f. $F(8, -5)$
g. $G(4, 4)$ h. $H(1, -5)$

- 11 Escribe las coordenadas de un punto B que tenga como abscisa el doble de la del punto $A(-3, 6)$ y esté sobre el eje de abscisas.

Resolución de problemas

- 12 ¿Qué valor debe tomar k para que el punto $A(2, 3k-12)$ esté sobre el eje X?

- 13 En una isla se encuentra oculto un tesoro exactamente en el punto de corte del segmento AB con el segmento CD. Si las coordenadas de cada punto son: $A(4, 5)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$ y $D(0, 2)$, traza los segmentos de un plano cartesiano e indica las coordenadas del punto en el que está ubicado el tesoro.

- 14 Si la hipotenusa del triángulo rectángulo de la Figura 9 está sobre el eje de las X, ¿cuáles son las coordenadas del punto B?

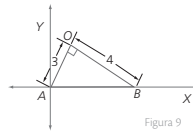


Figura 9

- 15 Observa la Figura 10, y responde.

- a. En el eje de las X, ¿qué coordenadas indican los extremos del diámetro?
b. Si la circunferencia se moviera tres unidades a la izquierda y dos hacia abajo, ¿cuáles serían las coordenadas de su centro?

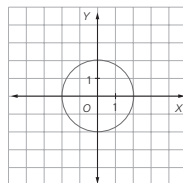


Figura 10

- 16 En el plano de la Figura 11 se trazó un polígono cuyos vértices son los puntos A, B, C, D y E.

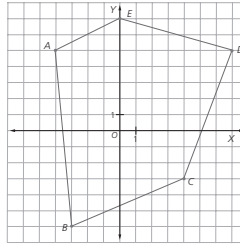


Figura 11

- a. Determina las coordenadas de cada uno de los vértices del polígono.
b. Según el número de lados, ¿qué tipo de polígono es ABCDE?
c. Indica las coordenadas de un polígono regular con el mismo número de lados que ABCDE.

- 17 Responde las preguntas a partir de la información provista en la Figura 12.

- a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto correspondiente a la intersección de las diagonales del hexágono?
b. ¿Cuáles serían las coordenadas de tal punto si el hexágono se traslada dos unidades a la derecha?

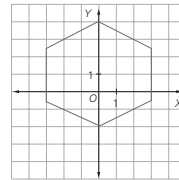


Figura 12

- 18 La casa de Manuela está ubicada en el punto $(5, 10)$, el colegio en el punto $(8, 4)$ y el parque en el punto $(1, 2)$.

- a. Ubica en el plano los tres lugares.

- b. Traza algunas rutas para ir de la casa al colegio. ¿Cuál es la ruta más corta?

- c. ¿Qué lugar está más cerca del parque, la casa de Manuela o el colegio?

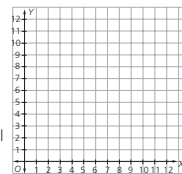


Figura 13

APLICA © EDICIONES SM

Razonamiento

10. a. Cuadrante III b. Cuadrante I
c. Eje X d. Cuadrante II
e. Eje Y f. Cuadrante IV
g. Cuadrante I h. Cuadrante IV

11. Múltiples respuestas; por ejemplo: $B(-6, 0)$.

Resolución de problemas

12. $k = 4$

13. Solución $(1, 2)$

14. $B(5, 0)$

15. a. $(2, 0)$, $(-2, 0)$ b. $(-3, -2)$

16. a. $A(-4, 5)$; $B(-3, -6)$; $C(4, -3)$;

$D(7, 5)$; $E(0, 7)$

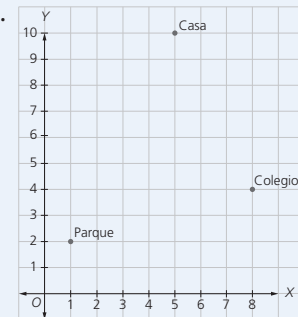
- b. Pentágono abierta

- c. Respuesta

17. a. $(0, 1)$

- b. $(2, 1)$

18. a.



- b. Respuesta abierta

- c. El colegio.

Ampliación conceptual

Dados los conjuntos X , Y cualesquiera, una función f . $X \in Y$ es una correspondencia que a cada elemento $x(x \in X)$ le hace corresponder un único elemento $y(y \in Y)$ que se denota $y = f(x)$.

Al conjunto X se le llama conjunto de partida o dominio de la función y se denota $\text{Dom } f$. Al conjunto de todos los $y \in Y$, tales que exista un x con $y = f(x)$ se le denomina imagen de la función y se denota $\text{Im } f$. $A x$ se le denomina preimagen, argumento o variable independiente y $y = f(x)$ imagen de x por la función f o variable dependiente.

También puede definirse como: dados dos conjuntos X , Y cualesquiera, una función f de X en $Y(f: X \rightarrow Y)$ es un conjunto de pares ordenados (x, y) tal que $x \in X$, $y \in Y$, y cada x aparece como la primera coordenada de un solo par ordenado.

La correspondencia f que a cada $x \in \text{reales}$ le hace corresponder el número real $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales dados, se denomina función lineal. La representación gráfica de esta función lineal es una recta donde m es la pendiente de la recta que se puede calcular como $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ y n es el valor de la ordenada del punto donde la gráfica de la función corta al eje de las ordenadas.

La función f es par si y solo si para todo $x \in \text{Dom } f$, $-x \in \text{Dom } f$ se tiene que $f(x) = f(-x)$. La función f es impar si y solo si para todo $x \in \text{Dom } f$, $-x \in \text{Dom } f$ se tiene que $f(x) = -f(-x)$.

Funciones

6

Bloque de Álgebra y Funciones

6.1 Relaciones

Una relación de un conjunto A en un conjunto B es el conjunto R de pares ordenados que satisfacen una regla o propiedad y tales que, el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B .

$$R \subseteq A \times B$$

El conjunto A se llama conjunto de partida y el conjunto B se llama conjunto de llegada (figura 1).

Ejemplo 1

Es una relación:

Cada persona está relacionada con un nombre

Esto es similar a decir que: A cada persona le corresponde un nombre.

Ejemplo 2

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{5, 6\}$

El producto cartesiano $A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\}$

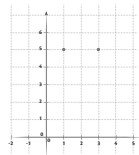
Del producto cartesiano $A \times B$ se podrían extraer varias relaciones como:

Relación 1: Conjunto de los pares ordenados tales que los dos elementos del par ordenado sean impares: $\{(1, 5), (3, 5)\}$

Relación 2: Conjunto de los pares ordenados tales que la suma de sus elementos sea par: $\{(1, 5), (2, 6), (3, 5)\}$

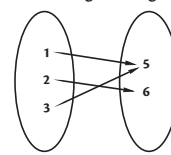
Las relaciones se representan gráficamente mediante el plano cartesiano o un diagrama sagital así:

Plano Cartesiano



Relación 1

Diagrama Sagital



Relación 2

Actividad resuelta

1 En referencia a la figura 1, escribe los pares ordenados de las siguientes relaciones:

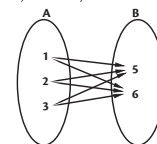
- a. Conjunto de los pares ordenados cuyo resultado de la suma de sus elementos sea 8 o 9.
- b. Conjunto de los pares ordenados tales que el valor absoluto de la diferencia de sus elementos sea 1 o 2.

Solución

- a. $\{(2, 6), (3, 5), (3, 6)\}$
- b. $\{(3, 5)\}$

Explora

Observa los elementos de los conjuntos A y B .



¿Cuántos pares ordenados se pueden formar?

Ten en cuenta

Producto cartesiano

El producto cartesiano $A \times B$ se define como:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Si A define el número natural n y B define el número natural m , entonces $A \times B$ define el número $n \cdot m$.

Ten en cuenta

Las relaciones son subconjuntos de pares ordenados que se forman del **producto cartesiano** entre los elementos de dos conjuntos, como se indica en el ejemplo 2.

6

Funciones

Explora

Raúl necesita sacar fotocopias para un trabajo de biología.



• Si por cada fotocopia paga \$ 0,02, ¿cómo puede determinar cuánto debe pagar por cierta cantidad de fotocopias?

Ten en cuenta

En una correspondencia, al primer conjunto se le denomina **conjunto de partida** y al segundo conjunto se le conoce como **conjunto de llegada**.



CULTURA del Buen Vivir

La comunicación

Una buena comunicación nos permite intercambiar de forma efectiva pensamientos, ideas y sentimientos con las personas que nos rodean, en un ambiente de cordialidad.

• Describe una situación donde hayas establecido una buena comunicación con tu profesor y con tus compañeros.

6.2 Fórmulas, tablas y gráficas

Una forma de responder la pregunta consiste en registrar en una tabla como la siguiente, la relación entre el número de fotocopias y el costo a pagar.

Número de fotocopias	1	2	3	4	5	6	7	8
Costo (\$)	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16

Tabla 1

En la Tabla 1 se observa que para averiguar el costo a pagar por cualquier número de fotocopias, basta con multiplicar el número de fotocopias por el costo de una. Con lo anterior se obtiene la fórmula $y = 0,02 \cdot x$, donde x indica el número de fotocopias.

Si una magnitud depende de otra, se puede expresar esta dependencia mediante una **fórmula**, una **tabla** o una **gráfica**.

La magnitud que se fija previamente es la **variable independiente**.

La magnitud que se deduce de la otra es la **variable dependiente**.

Ejemplo 3

En la situación inicial, la variable independiente es el número de fotocopias y la variable dependiente es el costo total.

Ejemplo 4

El área de un cuadrado es igual a lado por lado. El valor del área depende de la medida del lado. Esta relación entre el lado y el área se puede expresar de varias maneras:

Con una fórmula: $A = l^2$

Con una tabla:

Lado (cm)	1	1,5	2	2,5	3	...	5
Área (cm ²)	1	2,25	4	6,25	9	...	25

Tabla 2

Con una gráfica:

La variable lado (l) corresponde a la variable independiente, y la variable área (A) corresponde a la variable dependiente.

La gráfica se muestra en la Figura 2.

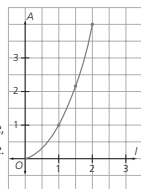


Figura 2

Ejemplo 5

El Ministerio de Salud ha hecho un estudio sobre el peligro del consumo de tabaco. Los resultados se muestran en la Tabla 3.

Número de cigarrillos diarios	3	5	10	15	20
Índice de mortalidad	0,2	0,3	0,6	0,8	1,2

Tabla 3

Las magnitudes *Índice de mortalidad* y *Número de cigarrillos diarios* están correlacionadas y son dependientes entre sí, ya que un incremento de la segunda lleva a un aumento de la primera.

En matemáticas, cuando existe una relación de dependencia entre dos magnitudes se dice que se puede expresar una **función** de la otra.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes primeramente el concepto de función y cada elemento que conforman las funciones. Analice el concepto de función lineal.
- Muestre a los estudiantes mediante un ejemplo sencillo la representación gráfica de una función.
- Explique a los estudiantes que en dependencia del grado del exponente de la variable, recibe el nombre la función. En este grado solo estudiarán las funciones lineales donde el mayor exponente de la variable es uno (1).
- Muestre a los estudiantes, para asegurar el nivel de partida de la clase, el método de resolución de una ecuación lineal. Analice cuándo se está en presencia de una ecuación y cómo determinar el conjunto solución de dicha ecuación.
- Analice el procedimiento para determinar los ceros de una función, se procede de la misma forma que para determinar el conjunto solución de las ecuaciones lineales, salvo que para determinar el valor de "y" se sustituye el valor de "x" en la función y de esta forma se obtiene el valor de y así el par ordenado (x;y).
- Explique cada uno de los elementos que conforman la función, m es el término que acompaña siempre a la variable y n es el término independiente. Desarrolle un ejemplo en el pizarrón. Muestre a los estudiantes que si $m > 0$ la función es monótona creciente MC y si $m < 0$ es monótona decreciente MD.

■ Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

- Solicite a los estudiantes que dada la siguiente función determinen su cero, el valor de "y" y representen en un sistema de coordenadas rectangulares la función. a) $f(x) = 3/4x - 6$
- Proponga a los estudiantes ejercicios como los siguientes: Determine cuáles de los siguientes ejemplos son funciones lineales de la forma $f(x) = mx + n$:
 - $f(x) = 5x - 5$
 - $f(x) = -3x$
 - $h(x) = 5x^2 - 4x$
 - $g(x) = x^2 + 3$
- Proponga varios ejercicios donde los estudiantes representen gráficamente una función, además, puede entregarle a los estudiantes la gráfica de una función para que determinen sus elementos. Pida que, de varias funciones propuestas por el docente, determinen su pendiente y la ordenada del origen de cada una de las rectas; por ejemplo:

$$y = -3x + 6$$

En este caso el docente debe explicar a los estudiantes nuevamente cuáles son los elementos de la función para que el estudiante recuerde y seleccione de la función, si hay en este caso sin calcular, algunos de los elementos que pide el docente.

Se iguala la función a cero $-3x + 6 = 0$ con el objetivo de encontrar los ceros de la función que no son más que el valor donde la función corta al eje de las abscisas (x) y se despeja la x tanto como sea posible y se obtiene: $x = \frac{-6}{-3}$; $x = 2$, esta

función corta al eje de las x en 2 y se sustituye por el valor en la función original y se obtiene el valor de y obtendríamos para $x = 2$; $y = 0$.

Destreza con criterios de desempeño:

Calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos para definir relaciones binarias (subconjuntos) representándolas con pares ordenados.

Bloque de Álgebra y Funciones

6.3 Concepto de función

Una **función** es una relación entre un conjunto, llamado **dominio**, y otro conjunto, llamado **rango**, de forma que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango.

Ejemplo 6

En la Tabla 4 se registran algunos valores para una función que asigna a cada número su mitad; esto es, $f(x) = \frac{x}{2}$.

x	2	3	4	5	6
f(x)	1	1,5	2	2,5	3

Tabla 4

En este caso, x es la variable independiente y f(x) (que también se puede notar como y) es la variable dependiente.

6.4 Representación gráfica de funciones

Para representar gráficamente una función se siguen estos pasos.

- Se construye una tabla de valores.
- Se representan los puntos obtenidos sobre el plano cartesiano y se unen, si es el caso.

Ejemplo 7

Una función f asigna a cada número entero su doble más 1: $f(x) = 2x + 1$. En la Tabla 5 figuran algunos valores de la función y la Figura 3 muestra su representación.

x	y
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

Tabla 5

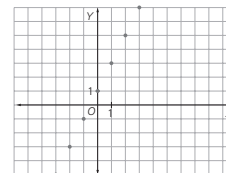


Figura 3

Como f está definida solo para los números enteros, no se unen los puntos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

- Ricardo paga en su recibo de teléfono \$ 0,12 por minuto y \$ 0,25 de cargo fijo.

● Escribe la función que relaciona el tiempo que dura la llamada con el precio.

Solución:

La función es $f(x) = 0,25 + 0,12x$, donde x es el tiempo en minutos.

La Tabla 6 muestra algunos valores de x y sus imágenes.

x	1	2	3	5	6
y	0,37	0,49	0,61	0,85	0,97

Tabla 6

La Figura 4 representa la función f(x).

Ten en cuenta

- El **dominio** de una función es el conjunto de los valores que se le asignan a x (variable independiente).
- El **rango** de una función es el conjunto de los valores que toma la función y (variable dependiente); por eso se denomina f(x).

TECNOLOGÍAS

de la información y la comunicación

<http://www.disfrutalasmatematicas.com/puzzles/puzzles-de-logica-index.html>

Refuerza el concepto de función.

App

Funciones

Abre la aplicación *Graph it!* y obtén la gráfica de algunas funciones de proporcionalidad directa.

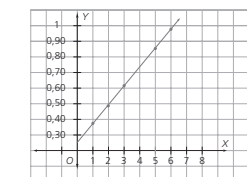
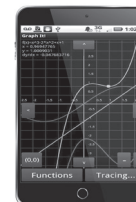


Figura 4

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8\}$

a. Determina el producto cartesiano $A \times B$

b. Escribe el conjunto que se obtiene de la siguiente relación: Conjunto de los pares ordenados tales que la suma de sus elementos sea par; represéntala en el plano cartesiano.

c. Escribe el conjunto que se obtiene de la siguiente relación: Conjunto de los pares ordenados tales que el valor absoluto de la diferencia de sus elementos sea igual a 1 o 2; represéntala en un diagrama sagital.

Comunicación

4. Observa la Tabla 7, donde se registra la temperatura de una persona a lo largo de un día.

Hora	0	4	8	12	16	20	24
Temperatura (°C)	38	36	36,5	36	38	39	38

a. ¿Cuál es la variable dependiente?
b. ¿Cuándo varió más la temperatura?

5. Escribe la fórmula del perímetro de un triángulo equilátero en función de su lado.

Razonamiento

6. Escribe la fórmula asociada a la Tabla 8.

x	-2	-1	0	1	2	6
y	-6	-3	0	3	6	18

7. Observa los siguientes cuerpos geométricos.

a. Copia y completa la Tabla 9.

	Vértices	Aristas	Caras
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

b. Escribe una fórmula que relacione el número de vértices, aristas y caras de estos cuerpos.

8. Lee, analiza y responde.

Un programa hace el siguiente proceso: al introducir un número lo eleva al cuadrado, luego multiplica por 3 el resultado y por último, adiciona 1 al valor obtenido.

a. Justifica que el proceso descrito es una función.
b. Escribe una fórmula que describa el proceso.

9. Completa la Tabla 10 de la función que relaciona cada número entero con su cuadrado. Luego, resuelve.

x	-5	-2	-1	0	3	4
y						

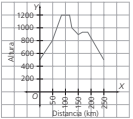
a. Escribe una fórmula para dicha función.
b. Representa gráficamente la función en tu cuaderno.
c. Explica si se deben unir los puntos obtenidos.

Ejercitación

10. Calcula el valor de a , si se sabe que una función tiene la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9).

Resolución de problemas

11. La Figura 6 representa una etapa ciclistica. A cada distancia del punto de salida le corresponde una determinada altitud.



a. ¿Cuál es la variable independiente?
b. ¿Cuándo se alcanza la mayor altitud?

12. La función para pasar una temperatura de grados Celsius (x) a grados Fahrenheit (y) es $y = 1,8x + 32$.

a. ¿Cuál es la variable independiente?
b. Copia y completa la Tabla 11, la cual relaciona ambas temperaturas.

x	-20	-10	0	20	30	50
y						

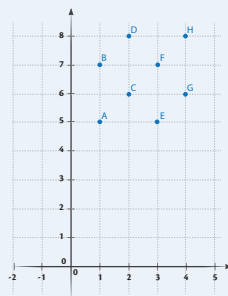
c. Haz la representación gráfica de la función.

13. Dos frascos de duraznos cuestan \$ 6,50.

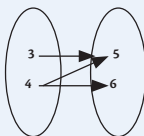
a. ¿Cuál es la fórmula de la función que relaciona el precio con el número de frascos de duraznos comprados?
b. ¿Cuánto cuestan siete frascos de duraznos?
c. ¿Cuántos frascos pueden comprarse con \$ 39?

Ejercitación

3. a. $A \times B = \{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8)\}$
- b. $\{(1,5), (1,7), (2,6), (2,8), (3,5), (3,7), (4,6), (4,8)\}$



- c. $\{(4,5), (3,5), (4,6)\}$



Comunicación

4. a. La temperatura.
b. En las primeras 4 horas y de las 12 a las 16 horas.
5. $P = 3 \cdot x$, (x = longitud del lado del triángulo)

Razonamiento

6. $y = 3x$

7. a.

	Vértices	Aristas	Caras
Tetraedro	4	6	4
Cubo	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

b. $V + C = A + 2$

8. a. Sí es una función. b. $y = 3x^2 + 1$

- 9.

x	-5	-2	-1	0	3	4
y	25	4	1	0	9	16

- a. $y = x^2$
c. No se deben unir porque se está trabajando con números enteros.

Ejercitación

10. $a = 4$

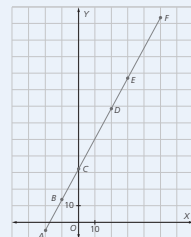
Resolución de problemas

11. a. Distancia (km) b. Entre los 90 km y 110 km lo que da en promedio: 100 km
12. a. Grados Celsius.

- b.

x	y
-20	-4
-10	14
0	32
20	68
30	86
50	122

- c.



13. a. $y = 3,25 \cdot x$
b. \$ 22,75
c. 12

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes el concepto de función.
- Muestre varios ejemplos para determinar las propiedades de las funciones.
- Analice nuevamente el concepto de función y luego analice el concepto que se muestra en el libro de texto en la página 254 sobre las funciones directamente proporcionales.
- Explique a los estudiantes qué es la proporcionalidad, muéstreles ejemplos sencillos por ejemplo: la segunda Ley de Newton establece la proporcionalidad directa entre fuerza y aceleración. Relacione el tema con la física.
- Analice con los estudiantes que la proporcionalidad directa, no es más, que una correspondencia entre valores, pues, a medida que va variando el primer valor, el segundo aumenta para cada valor específico aumentado en la misma proporción por ejemplo: teniendo en cuenta la proporcionalidad directa entre funciones se tiene la fórmula $y = m \cdot x$ donde m es el valor constante de proporcionalidad entre los valores de x e y . Se plantea que la fórmula $y = m \cdot x$ es una función lineal pues el mayor exponente de la variable es uno, por tanto, representada gráficamente es una recta y la misma pasa por el centro de coordenadas rectangulares.
- Establezca relaciones de proporcionalidad directa con ejemplos de la vida práctica para que los estudiantes interioricen el contenido de forma simple y lo apliquen de forma correcta.

Funciones de proporcionalidad directa

Explora

Yolanda quiere representar en un plano cartesiano la información registrada en la Tabla 1.

Cantidad de galones de gasolina	Precio (\$)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tabla 1

- ¿Cuál es la expresión asociada a los datos de la tabla y qué tipo de gráfica se obtiene al representar dichos datos en el plano cartesiano?

Ten en cuenta

Las funciones de proporcionalidad directa también reciben el nombre de funciones lineales.



Figura 2

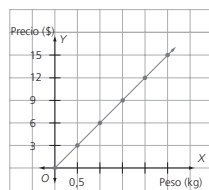


Figura 3

Para representar la información de la tabla, Yolanda debe considerar las parejas ordenadas cuya primera componente es la cantidad de galones de gasolina y la segunda, el precio correspondiente. Así, las parejas que debe ubicar sobre el plano son (2), (4), (6), (8) y (10). Es preciso que ella use una escala adecuada para obtener una clara representación de los datos.

- El número de galones de gasolina y su costo son magnitudes directamente proporcionales. La razón de proporcionalidad es 2.
- La expresión algebraica que representa la situación es $y = 2 \cdot x$, donde x es el número de galones de gasolina y y es su precio en dólares.

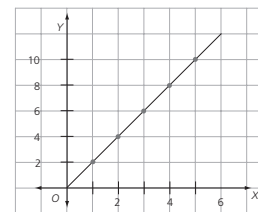


Figura 1

- La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 1).

Las funciones que relacionan dos magnitudes directamente proporcionales se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. Su fórmula es: $y = m \cdot x$

El valor de m corresponde a la constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes que se relacionan.

Las gráficas de las funciones de tipo $y = m \cdot x$ son rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Ejemplo 1

Jorge compró un queso en el supermercado y leyó en la información de la etiqueta que cada kilogramo de queso cuesta \$ 6.

Jorge establece que las magnitudes *Precio* y *Peso* son directamente proporcionales. Él representa con x el peso del queso en kilogramos y con y su precio en dólares, y relaciona las dos magnitudes mediante la expresión:

$$y = 6 \cdot x$$

Para hallar el precio de 2,5 kilogramos de queso, él reemplaza x por 2,5 y obtiene:

$$y = 6 \cdot 2,5 = 15. \text{ Así que 2,5 kilogramos de queso cuestan \$ 15.}$$

Jorge construye la Tabla 2 para trazar la gráfica de la función $y = 6 \cdot x$.

Peso (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Precio (\$)	0	3	6	9	12	15

Tabla 2

Una vez ubicados cada par de puntos de la tabla en el plano y unidos mediante una recta continua, Jorge obtiene una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 3).

En este caso, como no hay valores negativos de x , se considera solo la semirrecta que pasa por el primer cuadrante del plano cartesiano.

Bloque de Álgebra y Funciones

Destaca con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones lineales en $\mathbb{Z}$, en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1) Para preparar una torta, la receta indica que se añaden dos gramos de chocolate por cada gramo de harina que se emplee. Yanay va a hornear tres tortas y, para ello, ha amasado 60 g, 90 g y 100 g de harina, respectivamente.

a. ¿Qué cantidad de chocolate deberá añadir en cada caso?
b. Escribe la fórmula y haz la gráfica de la función que relaciona las distintas cantidades empleadas de harina y de chocolate.

Solución:

a. La cantidad de chocolate que hay que añadir es directamente proporcional a la cantidad de harina empleada, y la razón de proporcionalidad es 2. En la Tabla 3 se presentan algunos valores.

b. Si se llama x a la cantidad de gramos de harina y y a la cantidad de gramos de chocolate, la expresión que representa los datos de la tabla es $y = 2 \cdot x$.

La gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 4).

Tabla 3

Harina (g)	0	1	60	90	100
Chocolate (g)	0	2	120	180	200

Figura 4

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2) Representa las siguientes funciones.

a. $y = x$ b. $y = -x$
c. $y = 4x$ d. $y = -4x$

Comunicación

3) Lee y resuelve.

a. El sueldo de un trabajador es de \$ 10 por hora trabajada. Determina el sueldo del trabajador en función de las horas trabajadas.
b. Juan lee cuatro páginas diarias de un libro. Indica el tiempo que tarda en leer un libro en función del número total de páginas.

Modelación

4) Construye una situación que corresponda a la función asociada a la Tabla 4.

Tabla 4

x	1	2	3	4	5
y	20	40	60	80	100

5) Observa la Tabla 5, la cual muestra la distancia recorrida por un carro en un tiempo determinado a una velocidad constante de 85 km/h.

Tabla 5

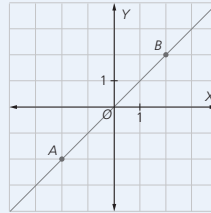
Tiempo	0	1	2	3	4
Distancia	0	85	170	255	340

a. Representa los datos gráficamente.
b. Escribe la función que relaciona la distancia recorrida por el carro con el tiempo que tarda en alcanzarla.

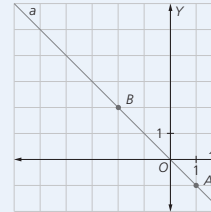
255

Ejercitación

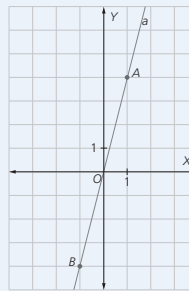
2. a. $y = x$



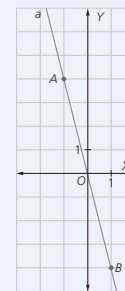
b. $y = -x$



c. $y = 4x$



d. $y = -4x$



Comunicación

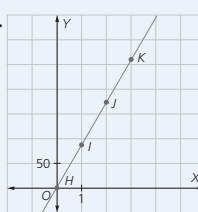
3. a. $y = 10 \cdot x$

$y = \frac{x}{4}$

Modelación

4. Respuesta abierta

5. a.



b. $y = 85t$

Razonamiento

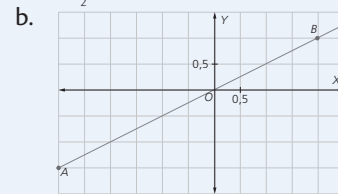
6. $y = -3x$

7. Respuesta abierta

8.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1

a. $y = \frac{1}{2}x$

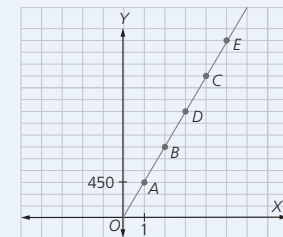


Resolución de problemas

9. a.

x	1	2	3	4	5
y	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00

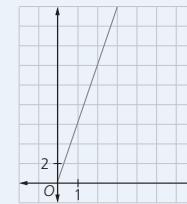
b.



10. a.

Tiempo	1	2	3	4	5
capacidad	6	12	18	24	30

b.

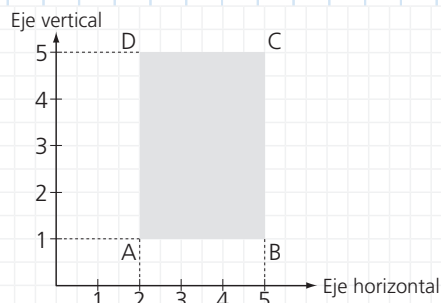


c. $y = 6t$

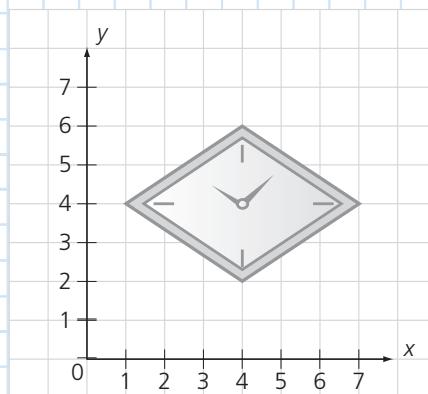
UNIDAD
6

Evaluación formativa

1. Escribe las parejas que corresponden a los vértices del rectángulo.



2. Los vértices del reloj en el plano cartesiano son las coordenadas.



- A. (2, 3), (4, 2), (4, 5) y (6, 3)
B. (3, 2), (2, 4), (5, 4) y (3, 6)
C. (4, 2), (1, 4), (4, 6) y (7, 4)
D. (2, 4), (4, 1), (6, 4) y (4, 7)

Nombre:.....

Grado:..... Fecha:.....

3. Señale con una P, cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones

- A. Los pájaros vuelan ()
B. Cuba es una isla ()
C. ¿A qué jugamos? ()
D. ¿Cómo está? ()
E. Todos los meses tienen 30 días ()
F. Todos los días tienen 24 horas ()

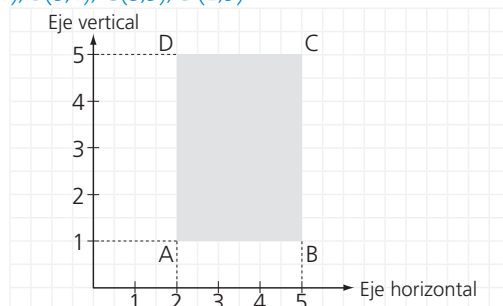
4. Dadas las siguientes proposiciones diga:

a) ¿Cuáles son simples? Marque con una S. ¿Cuáles son compuestas? Marque con una C. ¿Cuáles son los conectivos lógicos que se han utilizada en cada caso? Y ¿Cuáles son verdaderas y cuáles falsas?

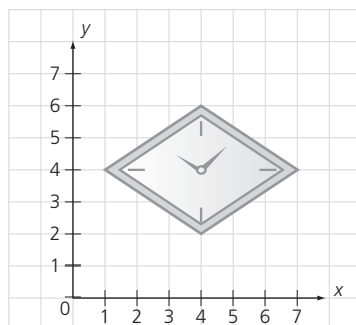
- Dos triángulos son semejantes, si y solo si, un ángulo de uno de los triángulos es congruente con un ángulo del otro triángulo y los lados correspondientes que determinan los ángulos son proporcionales. ()
- Los cuadrados tienen sus lados opuestos paralelos e iguales, sus ángulos iguales y los rombos cumplen las mismas propiedades de los cuadrados. ()
- Si evolución es una palabra aguda se acentúa siempre en la última sílaba. ()
- Todos los triángulos tienen tres lados y ángulos. ()

1. Escribe las parejas que corresponden a los vértices del rectángulo.

A(2 ; 1); B(5;1); C(5;5); D(2;5)



2. Los vértices del reloj en el plano cartesiano son las coordenadas.



- A. (2, 3), (4, 2), (4, 5) y (6, 3)
B. (3, 2), (2, 4), (5, 4) y (3, 6)
C. (4, 2), (1, 4), (4, 6) y (7, 4)
D. (2, 4), (4, 1), (6, 4) y (4, 7)

3. Señale con una P, cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones

- A. Los pájaros vuelan (P)
B. Cuba es una isla (P)
C. ¿A qué jugamos? (NP)
D. ¿Cómo está? (NP)
E. Todos los meses tienen 30 días (P)
F. Todos los días tienen 24 horas (P)

4. Dadas las siguientes proposiciones diga:

- a) ¿Cuáles son simples? Marque con una S. ¿Cuáles son compuestas? Marque con una C. ¿Cuáles son los conectivos lógicos que se han utilizada en cada caso? Y ¿Cuáles son verdaderas y cuáles falsas?
- Dos triángulos son semejantes, si y solo si, un ángulo de uno de los triángulos es congruente con un ángulo del otro triángulo y los lados correspondientes que determinan los ángulos son proporcionales. (V); Compuesta (equivalencia)
 - Los cuadrados tienen sus lados opuestos paralelos e iguales, sus ángulos iguales y los rombos cumplen las mismas propiedades de los cuadrados. (F); Compuesta, (conjunción)
 - Si evolución es una palabra aguda se acentúa siempre en la última sílaba. (V), Compuesta; (implicación)
 - Todos los triángulos tienen tres lados y ángulos. (V); simple

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.º	N.º de aciertos	N.º de desaciertos	Refuerzo sí / no
Ubicar pares ordenados con números enteros y racionales, en el plano cartesiano.	1 y 2			
Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado).	3			
Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado).	4			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Recomendaciones para desarrollar la lección

- Analice con los estudiantes las funciones de proporcionalidad directa estudiadas en el tema anterior, para asegurar el nivel de partida de las funciones de proporcionalidad inversa.
- Muestre a los estudiantes la expresión algebraica que se utiliza para determinar el valor de la proporcionalidad inversa entre dos magnitudes. $x \cdot y = k$, o bien, $y = k/x$.
- Explique cada variable que contiene la fórmula para calcular la razón de proporcionalidad inversa. Las variables x y y , son las magnitudes inversamente proporcionales que se relacionan y k es la variable que toma el valor que corresponde a una constante de proporcionalidad.
- Explique a los estudiantes que la variable x al pasar con la operación inversa para el miembro derecho no puede tomar el valor de cero porque se invalida la proporcionalidad inversa entre las funciones.
- Explique a los estudiantes que, específicamente, en la página 258 del libro de texto aparece una tabla donde muestran un ejemplo sencillo, relacionado con la vida práctica, analice cada valor que toman las variables independientes y la relación que existe entre el al resolver la expresión algebraica como producto y como cociente. Muestre que con cada valor que tomen x y y para que se cumpla la proporcionalidad inversa su producto tienen que resultar la variable k que es la constante de proporcionalidad y como razón se debe obtener el tercer valor, resultado de despejar la x .

8

Funciones de proporcionalidad inversa

El número de grifos y el tiempo que tardan en llenar la piscina son magnitudes inversamente proporcionales. Si se representa con x el número de grifos y con y el número de horas que se tarda en llenar la piscina, se verifica que $x \cdot y = 8$. Por tanto, la fórmula que expresa el tiempo de llenado en función del número de grifos utilizados es:

$$y = \frac{8}{x}$$

Las funciones que relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales se denominan **funciones de proporcionalidad inversa**. Su expresión algebraica es de la forma: $x \cdot y = k$, o bien, $y = \frac{k}{x}$. El valor de k corresponde a una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1

Para representar la anterior función, que relaciona el número de grifos y el número de horas que tardan en llenar la piscina, se pueden seguir estos pasos.

1. Se construye la Tabla 1 de valores.

x	1	2	4	8
y	8	4	2	1

Tabla 1

2. Como los productos de cada par de datos correspondientes siempre es 8, la constante de proporcionalidad es 8.

$$1 \cdot 8 = 8 \quad 2 \cdot 4 = 8 \quad 4 \cdot 2 = 8 \quad 8 \cdot 1 = 8$$

Entonces, se verifica que $x \cdot y = 8$ o $y = \frac{8}{x}$.

3. Al representar los valores de la tabla como puntos en el plano, se unen estos puntos con una línea curva. En la Figura 1 se presenta la gráfica correspondiente.

Explora

David tiene varios grifos en su finca que vierten la misma cantidad de agua por hora. Uno solo de estos tarda 8 horas en llenar una piscina.

- ¿Cuál es la fórmula que expresa cómo obtener el tiempo de llenado de la piscina en función del número de grifos utilizados?

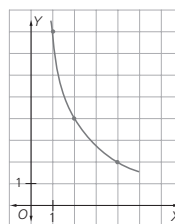


Figura 1

Ten en cuenta

En la ecuación $y = \frac{k}{x}$, correspondiente a una función de proporcionalidad inversa, la variable independiente se encuentra en el denominador; por ello, no puede tomar el valor 0.

Ejemplo 2

Un automóvil recorre una pista circular de 480 km a velocidad constante.

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, la razón de proporcionalidad es 480.

La Tabla 2 muestra cuánto tiempo emplearía el automóvil en recorrer la pista a una velocidad de 40, 60, 80 y 120 kilómetros por hora.

Velocidad (km/h)	40	60	80	120
Tiempo (horas)	12	8	6	4
Distancia (km)	480	480	480	480

Tabla 2

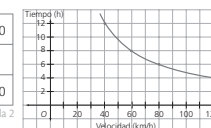


Figura 2

Si se llama x a la velocidad y y al tiempo, la fórmula que relaciona las dos magnitudes

$$\text{es } x \cdot y = 480, \text{ o bien, } y = \frac{480}{x}.$$

Al representar los valores de la tabla como puntos en el plano, se unen los puntos con una línea curva, pues la velocidad varía en forma continua (Figura 2).

Bloque de Álgebra y Funciones

Destaca con criterios de desarrollo: Define y reconoce funciones de proporcionalidad inversa en $\mathbb{Z}$, en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología.

Actividad resuelta

Comunicación

1. Representa la función $y = \frac{4}{x}$ elaborando dos tablas de valores, una en la que solo tome valores positivos y otra en la que solo tome valores negativos.

Solución:

x	y
1	4
2	2
4	1

Tabla 3

x	y
-1	-4
-2	-2
-4	-1

Tabla 4

A partir de las tablas 3 y 4 se obtiene la gráfica de la Figura 3.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Indica cuáles de las funciones son de proporcionalidad inversa. Justifica tu respuesta.

a. $y = \frac{3}{2}x$ b. $y = -\frac{12}{x}$
c. $y = -x + 3$ d. $y = \frac{1}{x}$

3. Representa gráficamente la función $y = \frac{5}{x}$. Para ello, elabora dos tablas de valores, una con valores positivos de x y otra con valores negativos, y luego representa los puntos de ambas en los mismos ejes de coordenadas.

Comunicación

4. Escribe la función asociada a la siguiente situación:

● Un curso de octavo EGB ha ganado un premio de \$ 1 500. ¿Cómo se distribuye el premio en partes iguales si hubiera 2, 3, 5, 10, 15, 30 o x estudiantes?

Razonamiento

5. Analiza. Un cliente encargó a Ricardo un corte de tela rectangular de 16 m².

a. ¿De cuántas formas diferentes puede cortar la pieza? ¿Qué relación hay entre los dos lados del rectángulo?
b. Si un lado mide 5 m, ¿cuánto medirá el otro lado?
c. Representa la función que relaciona los dos lados del rectángulo.

6. Representa la función $y = \frac{1}{x}$ elaborando una tabla de valores en la que x solo tome valores positivos y otra en la que solo tome valores negativos. ¿Qué relación hay entre las representaciones gráficas correspondientes a cada una de las tablas?

Resolución de problemas

7. Se quiere repoblar con 6 000 árboles una zona boscosa que sufrió un incendio forestal. Si se sabe que seis personas necesitan 120 horas para plantar todos los árboles, ¿cuántas horas hacen falta para plantarlos si colaboran 60 voluntarios?

a. Haz una tabla de valores que relacione el número de personas con el tiempo que tardan en plantar los árboles.
b. Dibuja la gráfica de la función y escribe su fórmula.

8. Una familia tiene un acuario y pretende alimentarlo durante 30 días a los 50 peces que viven allí. Para ello, compran un pedo de alimento.

a. Si cuando llega el pedo se dan cuenta de que son en realidad 75 peces, ¿cuánto tiempo les durará la comida?
b. ¿Cuál es la función que expresa la relación entre el tiempo que durará la comida y el número de peces del acuario?

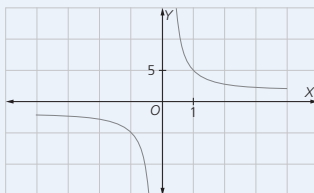
9. El producto de dos números es 18.

a. Escribe la función correspondiente al enunciado.
b. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función asociada a la situación.

Ejercitación

2. Las funciones b. y d. porque relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales.

3.



Comunicación

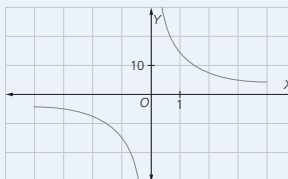
4. $y = \frac{1500}{x}$

Razonamiento

5. a. Asumiendo los cortes con número enteros se pueden realizar 5 cortes así:

b. 1 : 16 2 : 8 4 : 4

c.

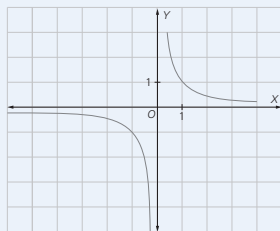


6. Positivos

x	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,04
y	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	25

Negativos

x	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,04
y	-0,1	-0,2	-0,5	-1	-2	-5	-10	-25



Son simétricas respecto al origen.

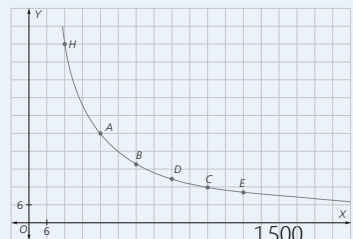
Resolución de problemas

7. 12 horas.

a.

Número de personas x	1	2	3	4	6	12	24	36	48	60
Tiempo (horas) y	720	360	240	180	120	60	30	20	15	12

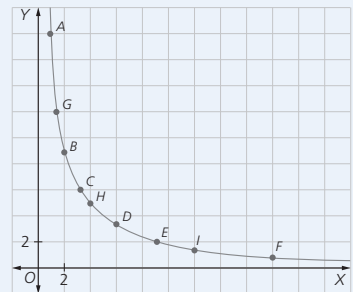
b. $y = \frac{720}{x}$



8. a. 20 días

9. a. $y = \frac{18}{x}$
b.

x	y
1	18
1,5	12
1,8	10
2	9
3	6
4	4,5
6	3
9	2
12	1,5
18	1

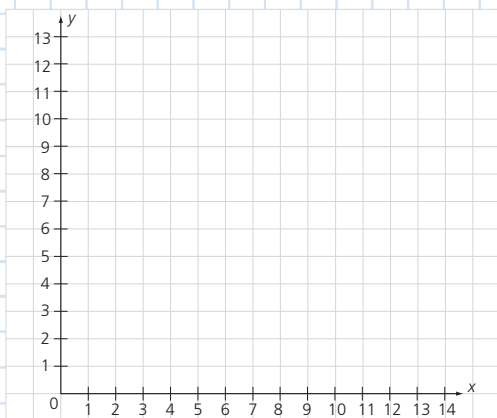


UNIDAD
6

Evaluación sumativa

1. Elena localizó en un plano cartesiano, el sendero que acaba de recorrer y comprobó que forma un paralelogramo con los vértices en los puntos: (3, 2); (3, 8); (13, 2) y (13, 8). Traza el recorrido de Elena. Identifica el paralelogramo.

- Sitúa en el plano, los puntos de los vértices del sendero.
- Une consecutivamente los puntos dibujados. Después, colorea la superficie que encierran.
- El paralelogramo es un:



2. A partir de los siguientes conjuntos:
 $A = \{1, 3, 5\}$; $B = \{4, 2\}$; $C = \{m, n, p\}$ determina en forma de conjunto:

A. $A \times B$ y $B \times A$

B. $A \times C$ y $C \times A$

C. $B \times C$ y $C \times B$

Nombre:

Grado: Fecha:

3. Para la semana de la naturaleza que se celebra en el colegio de Camila ella debe exponer sobre un animal del conjunto $A = \{\text{tortuga, perro, gato, papagayo}\}$ y sembrar una planta del conjunto $P = \{\text{cilantro, yerbabuena, toronjil}\}$.

A. Representa en un diagrama sagital el conjunto producto $P \times A$.

B. Si Camila reemplaza los conjuntos por $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, ¿cuál es la representación de $A \times P$ en el plano cartesiano?

4. María tenía \$ 24. Si compra un libro de matemáticas con la cuarta parte de su dinero y un libro de historietas cómicas con la mitad de lo que le quedaba...

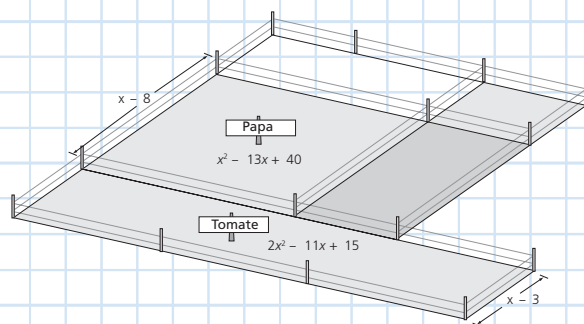
A. Escribe una expresión que represente la compra del libro de matemáticas y la compra de la historieta.

B. ¿Cuánto le costó a María el libro de matemáticas?

C. ¿Cuánto le costó a María la historieta?

D. ¿Cuánto dinero le quedó a María?

5. Un terreno se va a dividir en cinco sectores de diferentes tamaños para sembrar papa, cebolla, zanahoria, tomate y lechuga respectivamente. Después de investigar en el mercado, las posibilidades de venta de cada producto, el dueño del terreno decide distribuir su siembra como se muestra en la figura.



Analiza los datos de la figura.

A. Escribe las expresiones algebraicas que representan las dimensiones de los sectores que se indican a continuación.

Papa:

Tomate:

B. Escribe las expresiones que representan el área de cada terreno.

6. Utiliza el lenguaje algebraico para escribir las siguientes expresiones.

A. El triplo de un número aumentado en diez.

B. La mitad de un número disminuido en cinco.

C. El duplo de un número más el cuádruplo de otro aumentado en veinte.

D. El producto de dos números aumentado en quince. a mitad de un número disminuido en cinco.

E. El cuadrado de un número menos el triplo de otro.

7. Señale con una P, cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones.

A. Los pájaros vuelan. ()

B. Cuba es una isla. ()

C. ¿A qué jugamos?. ()

D. ¿Cómo está?. ()

E. Todos los meses tienen 30 días. ()

Prueba quimestral



Nombre:

Grado: Fecha:

1. Un grupo de personas tomó un plan de telefonía celular, en el que cada uno dispone de 150 minutos al mes. En cierto mes el consumo fue:

Persona	Luis	Mariana	Carlos	Lucía
Consumo (Min)	145	152	155	147

Si se expresa con (+) la cantidad de minutos en que se excede el usuario, con respecto al límite establecido por el plan, y con (-) la cantidad no consumida, se puede decir que Luis consumió:

- A. - 5 minutos
 - B. - 3 minutos
 - C. + 5 minutos
 - D. + 2 minutos
2. El número total de minutos que se excedieron o que sobraron del plan total se puede calcular con la operación:
- A. $-5 + 2 + 5 + 3$
 - B. $+5 + 2 + (+5) - 3$
 - C. $+2 - 1 (+5) - 3$
 - D. $-5 + 2 + 5 + (-3)$

3. El resultado de la operación anterior es:

- A. -1
- B. 21
- C. 0
- D. 15

4. De los números que representan los consumos de Luis y de Carlos se puede decir que:

- A. Son negativos
- B. Son complementarios
- C. Son positivos
- D. Son opuestos

5. Para fabricar cinco cortinas se necesitan 8 m de velo. La proporción que permite hallar la cantidad de velo que se requiere para confeccionar dos docenas de cortinas del mismo tipo es:

- A. $\frac{5}{n} = \frac{8}{24}$
- B. $\frac{5}{8} = \frac{24}{n}$
- C. $\frac{5}{n} = \frac{8}{12}$
- D. $\frac{5}{8} = \frac{12}{n}$

6. Si se resuelve la proporción planteada en el ejercicio anterior se puede afirmar que para confeccionar las dos docenas de cortinas se necesitan:

- A. 38,4 metros de tela
- B. 7,5 metros de tela
- C. 15 metros de tela
- D. 19,2 metros de tela

7. Julia quiere pintar las caras de una pirámide hexagonal, para saber el número de caras utiliza la fórmula de Euler. Si tiene 12 aristas y 7 vértices, ¿cuántas caras tiene la pirámide?

- A. Seis caras
- B. Siete caras
- C. Nueve caras
- D. Doce caras

8. Ricardo es un gran deportista. Durante sus entrenamientos realiza series de 15, 30, 60 y 120 abdominales. En la sucesión que indica la cantidad de abdominales realizados por Ricardo el patrón de cambios es:

- A. triplicar el anterior
- B. multiplicar por 5
- C. duplicar el anterior
- D. elevar al cuadrado

9. Lucía hace ejercicios de gimnasia en una colchoneta cuadrada cuya superficie mide 49 m^2 . Para calcular la medida de los lados de la colchoneta se realiza la siguiente operación:

- A. $\sqrt{49} = 7$ B. $\sqrt{49} = 6$
C. $\sqrt{49} = 8$ D. $\sqrt{49} = 5$

10. Durante los entrenamientos semanales de ciclismo, Adriana recorre 100 km. Los martes recorre 43 km; los jueves, 29 km, y los sábados el resto. La expresión que permite calcular la distancia que Adriana recorre los sábados es:

- A. $100 - 43 + 29$
B. $(100 - 43) + 29$
C. $100 - (43 + 29)$
D. $(100 - 29) + 43$

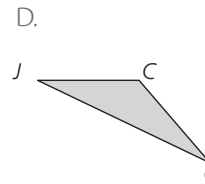
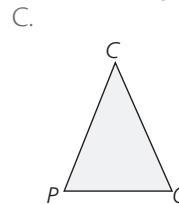
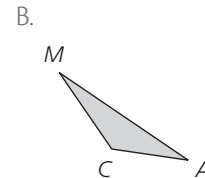
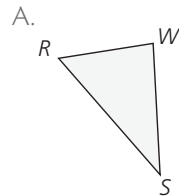
11. Los juegos pirotécnicos que disfrutaron los asistentes a la fiesta de la Diablada, se lanzaron en varias tandas. Si en cada tanda se lanzaba el doble de voladores que en la anterior y en la primera tanda se lanzaron 36 voladores, la sucesión que muestra correctamente el número de voladores lanzados en las tres tandas siguientes es:

- A. 36, 72, 144 B. 36, 108, 324
C. 72, 144, 288 D. 72, 216, 648

12. Señala cuál de los siguientes productos es negativo, sin resolver la multiplicación.

- A. $-2 \times 18 \times (-44)$
B. $-2 \times 23 \times 18$
C. $-75 \times 25 \times (-12)$
D. $44 \times (-3) \times (-21)$

13. ¿Cuál de los siguientes triángulos es isósceles?



14. El valor de la siguiente expresión $|-23|$ es:

- A. $|27|$
B. $|18|$
C. $|36|$
D. 23

15. El resultado de calcular la siguiente ecuación $\frac{x}{6} + \frac{3}{2} = 0$ es:

- A. 12
B. 9
C. 26
D. 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

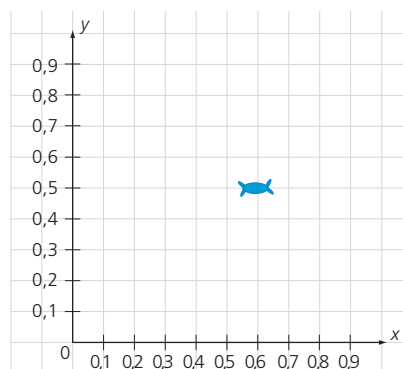
Prueba quimestral

2

Nombre:

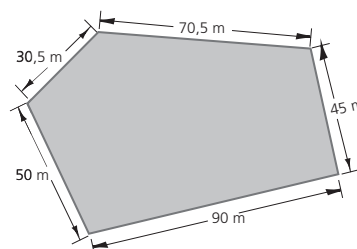
Grado: Fecha:

1. Diego construye una cuadrícula en el piso, trazando líneas verticales y horizontales. Si en los ejes de coordenadas se representan las décimas entre 0 y 1, ¿en qué par ordenado está el caramelo?



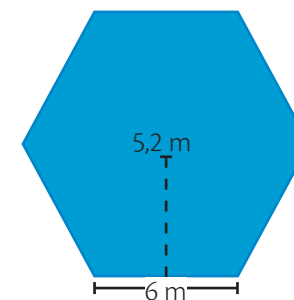
- A. (0,1; 0,6) B. (0,6; 0,5)
C. (0,4; 0,7) D. (0,7; 0,4)
2. Adriana recorre de Lunes a Domingo 57 Km en bicicleta, si entre los primeros seis días de la semana recorre 43 Km. ¿Cuántos Km recorre Adriana los sábados?
- A. 14 km.
B. 28 km.
C. 38 km.
D. 114 km.

3. El perímetro del terreno del polideportivo mide:



- A. 225 metros B. 286 metros
C. 315 metros D. 450 metros.
4. En un plano cartesiano están definidos los puntos (3, 2); (6, 2) y (3, 5). ¿Qué par ordenado falta si se quiere formar un rectángulo?
- A. (5, 6) B. (6, 5)
C. (2, 6) D. (2, 3)
5. En la lista de los 30 trabajadores de un cultivo de flores para nombrar el representante al comité de trabajadores hay 17 mujeres. Según lo anterior se puede afirmar que:
- A. Hay mayor probabilidad de que sea elegida una mujer
B. Con seguridad será elegido un hombre
C. Hay menor probabilidad de que sea elegida una mujer
D. Con seguridad será elegida una mujer

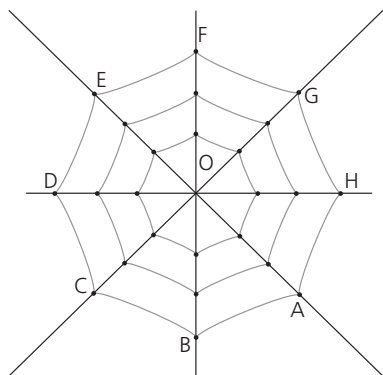
6. A la entrada de un cultivo de rosas hay un hermoso jardín con la forma y las dimensiones dadas en el dibujo.



El área del jardín es de:

- A. 187,2 m²
B. 187,2 m²
C. 31,2 m²
D. 93,6 m²
7. Daniela quiere comprar un terreno que tiene las siguientes coordenadas.
- a, $(\frac{3}{2}, 4)$: b, $(\frac{1}{2}, 2)$:
c, $(2\frac{1}{2}, 3)$: c, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
- ¿De qué forma es el terreno?
- A. Cuadrado B. Rectángulo
C. Romboide D. Rombo

8. Pilar es una joven muy curiosa y amante de la naturaleza. Hoy en su jardín encontró una enorme telaraña y al dibujarla con detalle encontró varias particularidades.



Al observar la estructura del tejido se puede asegurar que el ángulo AOB es congruente con el ángulo:

- A. AOG B. BOF
C. EOF D. HOF
9. De la medida del ángulo AOB se puede afirmar que:
- A. Es menor que 90° por tanto es un ángulo recto
B. Es mayor que 90° por tanto es un ángulo obtuso
C. Es menor que 90° por tanto es un ángulo agudo
D. Es mayor que 90° por tanto es un ángulo obtuso

10. Sebastián y Mateo comparan el dinero que tienen en sus bolsillos,

Sebastián dice:

El dinero que tengo es el doble del que tú tienes".

Mateo contesta:

"Si tú me das seis dólares, ambos tendremos el mismo dinero".

- A. $y = 2x$
 $x + 6 = y - 6$
- B. $2y = x$
 $x + 6 = y - 6$
- C. $2y = 2x$
 $x + 6 = y + 6$
- D. $y - 2 = x$
 $6x = -6y$

11. El dinero que tienen Mateo y Sebastián respectivamente es:

- A. \$ 8 y \$ 16
B. \$ 24 y \$ 12
C. \$ 12 y \$ 24
D. \$ 30 y \$ 36

12. Ejercicio 16. El resultado de resolver la siguiente inecuación $5x - 10 \leq 0$ es:

- A. $x \leq 5$
B. $x \leq 2$
C. $x \geq 4$
D. $x \geq 2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Solucionario

Evaluaciones de las unidades

1- Unidad

Evaluación de la unidad

1.

Número relativo
-17
-50
+22
+18
+358

2. a. $\notin$ b. $\notin$ c. $\in$ d. $\in$ e. $\in$ f. $\in$
g. $\notin$ h. $\notin$

3. a. 5 b. -6 c. 13 d. 2 e. -4

4. 114 metros

5. a. 6 b. -4
c. 11 d. -12
e. 6 f. -18

6. a. -16 b. -8 c. 10

7. 249 escalones

8. a. Que disminuyó 9 metros el nivel del agua.

b. Entre el segundo y el tercer mes.

c. 663 metros

9. a. 336 b. -24

c. 70 d. 12

e. -364 f. -6

g. 4

10.

	15	-16	-8	-1
-6	-90	96	48	6
4	60	-64	-32	-4
-12	-180	192	96	12
3	45	-48	-24	-3
-7	-105	112	56	7

11. 11 °C

12. No

13. 4680 m

14. 25 minutos

15. 18 litros menos.

16. a. -27 b. 256

c. 512 d. -32

17. a. -12 b. 10 c. 2

d. -2 e. -9

18. a. $x = 9$ b. $y > 20$

c. $x = 280$ d. $y < 13$

2- Unidad

Evaluación de la unidad

1. Verificar validez

2. a. $>$ b. $>$ c. $=$ d. $>$

e. $>$ f. $=$

3. a. $\frac{87}{17}$ b. $\frac{19}{6}$ c. $-\frac{57}{56}$

4. $\frac{19}{36}$

5. a. $\frac{65}{77} \text{ m}^3$

6. $\frac{467}{72}$ de galón

7. Carlos caminó $\frac{7}{12}$ del trayecto.

8. Verificar validez

9. $\frac{2}{15}$ de kilómetro.

10. 150 hectáreas y 50 hectáreas, respectivamente.

11. 22 vasos

12. A cada persona le correspondió $\frac{1}{8}$ de millón, es decir, \$ 125 000.

13. a. V b. F c. V d. F

e. V f. V g. F

14. a. $\frac{7}{2}$ b. $\frac{394}{25}$ c. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{1}{50}$

e. $\frac{54}{125}$ f. $\frac{9}{10}$ g. $\frac{29}{50}$ h. $\frac{178}{25}$

i. $\frac{65}{2}$ j. $\frac{107}{10}$

15. a. $>$ b. $<$ c. $<$ d. $<$

e. $<$ f. $<$

16. a. 3,33 b. 29,744 c. 14,17

d. 15,39 e. 20,7872 f. 50,3

17. 2,06 km

18. 9,62 cm

19. 243,2 km

3- Unidad

Evaluación de la unidad

1. a. Caras: 10; vértices: 11; aristas: 19

b. Caras: 6; vértices: 8; aristas: 12

2. a. Poliedro irregular

b. Poliedro irregular

c. Poliedro regular

d. Poliedro regular

3. a. F b. F c. V d. F e. F

4. Triangular convexa

5. Si es posible.

6.

Polígono de sus caras	Número de caras que concurren en un vértice
Triángulos	3
cuadrado	3
triángulos	4
pentágono	3
triángulo	5

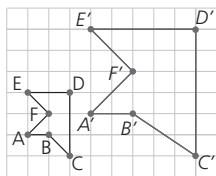
Solucionario

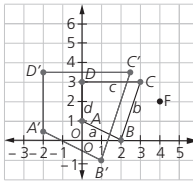
Evaluaciones de las unidades

7. a. Sí b. No
8. 14,47 cm
9. $AB = 7,07$ cm
10. a. Polígono convexo de cuatro lados y cuatro vértices.
b. Polígono cóncavo de seis lados y seis vértices.
c. Polígono cóncavo de seis lados y seis vértices.
d. Polígono convexo de cuatro lados y cuatro vértices.
11. $m\angle G = 65^\circ$, $m\angle K = m\angle I = 115^\circ$

4 Unidad

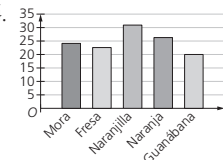
Evaluación de la unidad

1. Sí
2. 
3. $x = 6,4$ cm
4. a. Son semejantes, criterio LLL.
b. Son semejantes, criterio AA.
5. a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{49}{4}$
6. Verificar validez

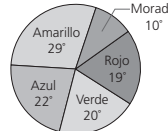
7. 
8. a. $P = 24$ cm b. $P = 12$ cm
c. $P = 0,19$ m d. $P = 0,225$ m
9. a. 0,018 b. 32 000 000
c. 124 000 d. 0,7865
e. 0,3216 f. 0,01582
10. 11,31 cm
11. $A = 84 \text{ m}^2 = 840\,000 \text{ cm}^2$
12. Verificar Validez
13. a. $A = 25\pi$ cm
b. 5,236 cm
c. 18,544 cm²
14. $A_{\text{total}} = 250 \text{ cm}^2$
15. Verificar Validez

5 Unidad

Evaluación de la unidad

1. **Cuantitativa discreta:** Goles, edad y número de hijos. **Cuantitativa continua:** Peso, altura y litros de agua.
2. Verificar Validez
3. Verificar Validez
4. 

5. Color de camisetas favoritas



6. Verificar validez
7. a. Cuantitativa.
b. 7,25 personas.
c. La moda es 3 y la mediana es 4.
8. a. 6,14 libras b. [16, 19] c. 3
9. Rango = 6 Desviación media = 1,67
Varianza = 4,33 Desviación típica = 2,08
10. b. 12, 18, 14, 13, 16.
11. Verificar validez
12. a. $\frac{5}{26}$ b. $\frac{11}{26} = \frac{6}{13}$
13. Una lotería de cuatro números.
14. $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{21}$, respectivamente.

6 Unidad

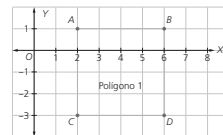
Evaluación de la unidad

1. $4x$, $c^2 = a^2 + b^2$, $10x$, $360 + 5x$ y $5 + 1t$, respectivamente.
2. a. $P = 2(2x + 1) + 2(y - 2)$
b. $(a + 3)^3$ c. $\sqrt{x^2 + (x + 1)^2}$
3. a. 31 b. 175 c. 13
d. -4 e. 432
4. (a) 8; (b) 5; (c) 0; (d) 33; (e) 21; (f) $-\frac{1}{4}$; (g) $\frac{7}{4}$

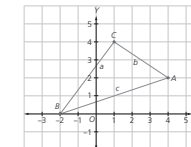
5. A(2, 3); B(5, 2); C(3, 1); D(0, 21)

6.

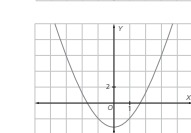
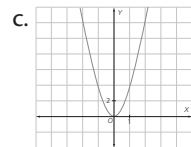
a.



b.



7. a. $y = 3x^2$ b. $f(5) = 75$ f(12) = 432



8.

9. a. Creciente b. Decreciente
c. Creciente

10. a. Variable independiente: Tiempo, variable dependiente: distancia recorrida.
b. 40 km c. $y = 40t$

11. Verificar Validez

12. Verificar Validez

13. Verificar Validez

Solucionario

Evaluaciones sumativas

1- Unidad

Evaluación sumativa

- b) 28, 15, 11, 5, 0 -3, -7, -9.
- a) $a = -9$; $b = -6$; $c = -2$;
 $d = 4$; $e = 6$; $f = 9$
b) $6310 \text{ m} - 3169 \text{ m} = 3141 \text{ m}$
• $5319 \text{ m} - 4012 \text{ m} = 1307 \text{ m}$
• $6310 \text{ m} - 4290 = 2020 \text{ m}$
• $3377 \text{ m} - 3169 = 208 \text{ m}$
- a) $(32 + 21) \times 3 = 53 \times 3$
 $32 \times 3 + 21 \times 3 = 53 \times 3$
 $96 + 63 = 159$
 $159 = 159$
b) $(25 + 5) / 5 = 30 / 5$
 $25 / 5 + 5 / 5 = 6$
 $5 + 1 = 6$
 $6 = 6$
c) $1 + 1 - 2 = 2 - 2$
 $2 - 2 = 0$
 $0 = 0$
d) $15 \times 3 + 5 = 45 + 5$
 $45 + 5 = 50$
 $50 = 50$
- a. 51997 b. 3871 c. 4332
5. a. $89 > -79$ b. $45 > -17$
c. $-96 < 63$ d. $124 < 278$
e. $245 = 245$ f. $-9678 < 9678$
- a. $2 \times 2 \times 2 = 8$ b. $(-4) \times (-4) = 16$
c. $(-5) \times (-5) \times (-5) = -125$

- $7 \times p + 5 - 5 \leq 40 - 5$
 $7 \times p \leq 35$
 $p \leq 35 / 7$
 $p \leq 5$
- $X - 16 = 32$
 $X - 16 + 16 = 32 + 16$
 $X = 48$
El número que satisface la igualdad de la ecuación es 48.
- Verificar validez de la respuesta
- $y - 35 \geq 10$
 $y \geq 10 + 35$
 $y \geq 45$

2- Unidad

Evaluación sumativa

- a) $\frac{437}{100}$ b) $\frac{35}{99}$ c) $\frac{5456}{999}$
- a) 0,9262 b) 7,8187 c) 13,1539
d) 0,8219 e) 14,1421 f) 9,2194403
- a) 1,58
b) 4,75
c) 8,0833
d) 7,375
Verificar la respuesta en la recta numérica
- a. -3,04 b. 1,09
5. a. $-\frac{98}{65} = -1,51$
b. $\frac{61}{210} = 0,29$
c. $-\frac{1}{40} = 0,025$
- a) $\frac{81}{625}$ b) $-\frac{32\,768}{243}$ c) $-\frac{64}{729}$
d) $-\frac{216}{125}$ e) $-\frac{9}{49}$ f) $-\frac{169}{196}$
g) $\frac{9}{4}$ h) $-\frac{6}{7}$ i) $\frac{20}{19}$
j) $\frac{16}{15}$ k) $\frac{8}{5}$ l) $\frac{4}{6}$
- $x = \frac{3}{10}$
- $\frac{1}{24}$
- a) 2 b) 11 c) 7 d) 8
e) 5 f) 12 g) 6 h) 100
- $p = 5$ $y = 13$ $p = 1$ $a = 9$
 $a = 6$ $o = 20$ $g = 7$ $a = 2$
El animal es un PAPAGAYO
- Verificar la respuesta en la recta numérica
- Verificar validez de la respuesta

3- Unidad

Evaluación sumativa

- Todos los polígonos son irregulares ya que ninguno tiene ni todos sus lados, ni todos sus ángulos iguales.
- a) Hexágono irregular
b) Triángulo escaleno
c) Pentágono irregular
- c) pentagonal
- a) trapecios (el estudiante puede dibujar un trapecio isósceles o rectángulo)
b. b) trapezoide (el estudiantes puede dibujar un trapezoide simétrico o no simétrico)
c) Paralelogramos. (el estudiantes puede dibujar el rectángulo, cuadrado ó rombo)
- Verificar validez de la respuesta
- a) Una elipse
- Verificar validez de la respuesta
- c) pentagonal

Solucionario

Evaluaciones sumativas

4 Unidad

Evaluación sumativa

- 186 cm
- $p = 6$ cm,
 $q = 8$ cm
 $r = 10$ cm.
- 9 m.
- $A' (7,5;2)$,
 $B' (4,5;3,5)$,
 $C' (6;-1)$.
- 1386 dm
- 63152 m²
- 160
- 8; 15; 17
- 3,44 cm²
- 3440 cm²
- 66 cm²
- 1130,4 cm²
- 3736,7 m²
- No, porque el área total de la cartulina que tiene Alberto (90cm²) es menor que el área total de la pirámide (96 cm²)

5 Unidad

Evaluación sumativa

- a) Cualitativa
b) Cuantitativa discreta.
c) Cualitativa.
d) Cuantitativa continua.
e) Cuantitativa continua.
- Verificar la validez de la tabla
b) 24.
c) Cuantitativa discreta.
d) 10.
- a)
b) 800 refrescos que se vendieron.

Tipo	Botellas vendidas	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
Limón	150	150	18,75
Naranja	200	350	25
Cola	400	750	50
Otros	50	800	6,25

- Verificar validez de la respuesta
- 29,05
- La mediana 12
- a. 2, 4, 6.
b. 2, 3, 5.
c. 5, 6.
d. 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- a) 55%; b) 3.
- $\frac{1}{3}$

6 Unidad

Evaluación sumativa

- Rectángulo
- Verificar la validez de la respuesta
- Verificar la validez de la respuesta
- a) $m = 24/4$; $h = 18/2$
b) A María le costó \$ 6 el libro de matemática
c) A María le costó \$ 9 el libro de historietas
d) A María le quedaron \$ 9.
- a) Papa 180 m²; Tomate 595 m²
b) el área de tomate es mayor que el área sembrada de papa.
- a) $3x + 10$
c) $2x + (4y + 20)$
e) $x^2 - 3y$
- a) (P)
c) (NP)
e) (P)

1 Quimestral

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

2 Quimestral

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Bibliografía

Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá, 1999.

Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1990.

Alsina Catalá, Claudi; Burgués F, Carme; Fortuny A., Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Editorial Síntesis, Madrid, 1995.

Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.

Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, España, 2007.

Castro, Encarnación; Rico, Luis; Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Editorial Síntesis, Madrid, 1996.

Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. Editorial Síntesis, España, 1997.

Clemens et al. Serie Awli. *Geometría*. Pearson Educación, México, 1998.

De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Ágora, Málaga, España, 1990.

Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, Madrid, España, 1991.

Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Pearson-Addison Wesley V. A. M, Madrid, 1994.

Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1995.

Jouette, André. *El secreto de los números*. Intermedio Editores, Bogotá, 2002.

Küchemann, D. The meaning children give to the letters in generalised arithmetic. En: *Cognitive Development Research in Sci. and Math*, 1980. The University of Leeds, págs. 28-33.

Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. Harla, S. A. de C.V., México, 1972.

Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. MEC/Labor, 1992.

Moise, Edwin; Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, Estados Unidos, 1966.

Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa*. Editorial Mir, Moscú, 1986.

Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México, 1989.

Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. Compañía Editorial Continental S. A., España, 1996.

Rich, Barnett. *Geometría*. McGraw-Hill, México, 1991.

Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes; Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis, México, 1991.

Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill, México, 1975.

Suppes, Patrick; Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté S. A., Colombia, 1976.

Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores, México, 1998.

Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. Ed. Limusa, México, 1988.

Zill, Dennis; Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. McGraw-Hill, Colombia, 2000.

Webgrafía

Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/eltanquematematico/>

Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: <http://www.genmagic.net/>

Cómo mentir con estadísticas. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/administracion/plan97/adm_financiera/De%20La%20Fuente/Como_mentir_con_estadisticas.pdf

Diccionario de la Real Academia Española. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: <http://www.rae.es/>

Disfruta las matemáticas. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: <http://www.disfrutalasmatematicas.com/puzzles/>

El Patio de los Leones de la Alhambra. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: <http://www.diariodelviajero.com/museos/el-patio-de-los-leones-de-la-alhambra>

Geometría recreativa de Jacob Perelman. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Perelman_Geometry.pdf

Números astronómicos. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://es.docsity.com/es-docs/Numeros_Astronomicos_-_Apuntes_-_Astronomia_

¿Qué es una bolsa de valores? [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: <http://dinero.about.com/od/Ahorrando/a/que-Es-Una-Bolsa-De-Valores.htm>